НАСТАВНИК-УЧЕНИК

*Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 2 (31). 2019*

УДК 372.800.4:511

«ДЛИННАЯ» АРИФМЕТИКА В ИССЛЕДОВАНИЯХ СТАТИСТИКИ ПЕРВЫХ ЦИФР СТЕПЕНЕЙ ДВОЙКИ, ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ И ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

В. А. Попов, Е. А. Канева

В работе рассмотрены учебно-исследовательские задачи о статистических закономерностях первых цифр натуральных степеней двойки, чисел Фибоначчи и простых чисел в среде программирования PascalABC.NET. При этом использованы элементы теории «длинной» арифметики, которые позволяют значительно расширять объемы множеств исследуемых массивов натуральных чисел и могут быть полезны на занятиях по изучению языков программирования студентами.

Ключевые слова: закон Бенфорда, степени двойки, числа Фибоначчи, простые числа, среда программирования PascalABC.NET, «длинная» арифметика.

XXI век считается информационной эрой или цифровой эпохой. Сегодня человек не может представить свою жизнь без информационных и коммуникационных технологий. ЭВМ — это неотъемлемая часть нашей жизни. Вычислительная техника помогает решить многие математические задачи, производить все большее количество операций в секунду, находить решения различных научных проблем, которые, увы, неподвластны умам человечества. Однако при решении с помощью ЭВМ задач, в которых необходимо обрабатывать многозначные числа, существует следующее ограничение: при использовании персональных компьютеров и ноутбуков, применяемых в учебном процессе, мы ограничены размером чисел (тип int64), для которых без специальных методов можно получать точные результаты вычислений. Естественно, что при обучении программированию студентов профилей «Информатика», «Математика» (и многих других) необходимо рассмотреть способы преодоления этого ограничения.

Ниже на примере нескольких конкретных задач будет показано, как можно решать названную проблему с помощью элементов «длинной арифметики» [1], т. е. приемов точных вычислений над числами, разрядность которых превышает длину машинного слова используемой вычислительной машины. Эти операции реализуются программно, с помощью применения базовых аппаратных средств работы с числами меньших порядков [2–4].

Основная часть

В статье [5] рассмотрена проблематика выявления определенных статистических закономерностей и их соответствия закону Бенфорда (см. [6–9]) для некоторых множеств чисел как способа активации учебного процесса при овладении компьютерными технологиями. В частности, в ней были рассмотрены следующие задачи:

Пример 1. Определить в процентах относительные частоты появления первых цифр у чисел 2^n, меньших чем $5 \cdot 10^{16}$, для неотрицательных целых n.

Пример 2. Исследовать, соответствует ли закону Бенфорда относительная частота появления первых цифр на множестве чисел Фибоначчи, меньших чем $8 \cdot 10^{18}$.

Пример 3. Исследовать, соответствует ли закону Бенфорда относительная частота появления первых цифр простых чисел, меньших чем 10^7.

Для их решения были разработаны соответствующие программы, написанные в PascalABC.NET. Поскольку задачи предназначались для учебного процесса, были созданы программы двух видов: без использования массивов и посредством массивов, в которых были применены стандартные возможности среды программирования (операторы: присваивания, вывода на экран, составной, дифференциальный оператор div; циклы: с предусловием, с постусловием, с параметром, и другие изучаемые средства программирования). Сама постановка задач позволяла достичь этого. Полученные при этом результаты вычислений указаны в табл. 1–3.

Таблица 1

Статистика первых цифр степеней числа 2, меньших $5 \cdot 10^{16}$

1-я цифра числа 2^n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
%	30,16	20,63	9,52	11,11	9,52	6,35	3,17	7,94	1,59

Таблица 2

Статистика первых цифр чисел Фибоначчи, меньших $8 \cdot 10^{18}$

1-я цифра числа Фибоначчи	1	2	3	4	5	6	7	8	9
%	29,35	18,48	11,96	9,78	7,61	6,52	5,44	6,52	4,35

Таблица 3

Статистика первых цифр простых чисел, меньших 10000000

1-я цифра простого числа	1	2	3	4	5	6	7	8	9
%	12,04	11,59	11,33	11,15	10,98	10,87	10,77	10,69	10,58

Сравним их с соответствующими значениями закона Бенфорда (для десятичной системы счисления): вероятность того, что первая цифра числа $x \geqslant 1$ равна p ($p \in \{1, 2, \ldots, 9\}$), составляет $\lg(p+1) - \lg p = \lg(1 + 1/p)$. В процентах (с точностью до 0,1) они показаны в табл. 4 из [9]:

Таблица 4

Статистика первых цифр закона Бенфорда

1-я цифра числа $x \geqslant 1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
%	30,1	17,6	12,5	9,7	7,9	6,7	5,8	5,1	4,6

Отклонения значений в табл. 1 и 2 имеются, хотя и не столь значительные как в табл. 3. На соответствующем занятии со студентами можно выяснить возможную причину этих отклонений и поставить задачу о выявлении тенденции в изменениях значений, если увеличивать мощности исследуемых множеств рассматриваемых чисел.

Отметим, что примененные в работе [5] подходы к исследованию указанных статистических закономерностей уже не позволяют делать это увеличение: возникает превышение разрядности 64.

Как сказано в статье С. М. Окулова [1]: «Числа, для представления которых в стандартных компьютерных типах данных не хватает количества двоичных разрядов, называются «длинными». Реализация арифметических операций над такими «длинными» числами получила название «длинной» арифметики. В таких случаях мы сами должны позаботиться о представлении чисел в машине и о точном выполнении арифметических операций над ними. . . ».

В качестве применения приемов и идей «длинной» арифметики в среде программирования PascalABC.NET нами были разработаны новые программы решения учебно-исследовательских задач 1–3 в случаях значительно более многозначных чисел. Теперь каждое число представляется в виде массива цифр, причем число кодируется в массив так, что последняя цифра числа является первым элементом массива. Количество элементов массива определяется пользователем. Для исследования первой цифры числа используется последний элемент массива, обозначающего данное число.

Ниже приведены фрагменты и комментария новых программ, соответствующие каждой выше сформулированной учебно-исследовательской задаче.

1. О программе для степеней двойки.

В ней с помощью параметра max пользователь может сам выбрать ограничение на максимальное количество цифр исследуемого числа вплоть до 10^7 и представить это число в виде массива цифр digit = 0..9; massiv = array[1..max] of digit. С помощью параметра kol можно выбирать количество исследуемых степеней двойки.

Приведем ее фрагмент, который показывает использование теории «длинной» арифметики при получении новой степени двойки (умножении предыдущей степени двойки на два):

```
Program stepeni_dvojki;
const max = 10000000; //максимальное количество цифр числа
type digit = 0..9; massiv = array[1..max] of digit;
var ch1,ch2,ch3:massiv; //числа, представленные в виде массива цифр
k,kol:word; p:array[0..9] of word; x:digit;
Procedure obnulenie(var A:massiv);
...
Procedure umnozhenie(A,B:massiv; var C:massiv; var t1:digit);
var i,j:word; q:digit; prom:0..99;
begin
obnulenie(C);
for i:=1 to kolichestvo_cifr(A) do
begin
```

q:=0;
for j:= 1 **to** kolichestvo_cifr(B) **do**
begin
prom:=A[i]*B[j]+q+C[i+j-1]; //умножение двух соответствующих цифр чисел A и B
C[i+j-1]:=prom **mod** 10; //остаток от целочисленного деления полученного ранее произведения на 10
q:=prom **div** 10; //целая часть от деления полученного ранее произведения на 10
end;
C[i+j]:=q //получение элемента массива (получение соответствующей цифры числа C — результата операции умножения чисел A и B)
...
end;
Begin
...
write('Введите количество степеней двойки: ');readln(kol); //ввод пользователем количества степеней двойки
writeln('2');
for k:=1 **to** kol-1 **do**
begin
umnozhenie(ch1,ch2,ch3,x); //получение новой степени двойки vyvod(ch3); //вывод на экран новой степени двойки
...
end;
...
end.

В программе используются также следующие подпрограммы (процедуры и функции): обнуление числа (массива цифр) — Procedure obnulenie(var A:massiv), определение количества цифр в числе (элементов массива) — Function kolichestvo_cifr(A:massiv):word, вывод числа на экран — Procedure vyvod(A:massiv), умножение двух чисел — Procedure umnozhenie(A,B:massiv; var C:massiv; var t1:digit).

С помощью нее были исследованы (после запуска программы в окне сообщений появляется: «Введите количество степеней двойки:», далее пользователь вводит с клавиатуры задаваемое для исследований число. Программа запоминает это число и продолжает свою работу) первые 2000 степеней двойки (самое «длинное» число — 600-значное) и получены результаты (с заданной точностью до 0,01), приведенные в табл. 5.

Таблица 5

Статистика первых цифр для первых 2000 степеней числа 2

1-я цифра числа 2^n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
%	30,10	17,70	12,40	9,70	8,00	6,70	5,70	5,25	4,45

Они оказались более близкими к значениям закона Бенфорда и приведенным в работе [10], чем в табл. 1.

2. О программе для исследования первых цифр чисел Фибоначчи (приведены фрагмент основной программы и текст подпрограммы для сложения двух чисел с соответствующими комментариями):

```
Program chisla_fibonachchi;
...
var ch1,ch2,ch3:massiv;
...
Procedure slozhenie(A,B:massiv; var C:massiv; var t1:digit);
...
if kolichestvo_cifr(A)>=kolichestvo_cifr(B) //определение слагаемого, имеющего наибольшее количество цифр
then
begin
```

for i:=1 **to** kolichestvo_cifr(A) **do**
begin
prom:=A[i]+B[i]+q; //сложение двух соответствующих цифр чисел A и B
C[i]:=prom **mod** 10; //остаток от целочисленного деления полученного ранее сложения на 10 (определение соответствующей цифры числа C — результата сложения цифр A и B)
q:=prom **div** 10; //целое от деления полученного ранее сложения на 10
end; **end** ...
Begin
...
write('Введите примерное количество чисел Фибоначчи: ');readln(m);
...
for k:=1 **to** trunc(m/2)-1 **do**
begin
slozhenie(ch1,ch2,ch3,x); //получение нового числа Фибоначчи
vyvod(ch3); //вывод на экран числа Фибоначчи
...
end;
...
end.

В этой программе использованы те же подпрограммы, что и в предыдущей задаче, но вместо процедуры умножения используется процедура сложения двух чисел (массивов) — Procedure slozhenie(A,B:massiv; var C:massiv; var t1:digit). В ней пользователь также может сам выбирать количество исследуемых чисел Фибоначчи с помощью параметра m.

Нами были исследованы первые 4000 чисел Фибоначчи (самое «длинное» число в этом расчете — 831-значное число) и получены следующие результаты (табл. 6).

Они также более близки к данным, отраженным в табл. 4 закона

Таблица 6

Статистика первых цифр для первых 4000 чисел Фибоначчи

1-я цифра числа 2^n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
%	30,10	17,63	12,53	9,65	7,95	6,65	5,78	5,15	4,58

Бенфорда и данным в работе [11], чем в табл. 2.

3. О программе для выявления статистики первых цифр простых чисел:

```
Program prostie_chisla;
var ch1,ch2,ch3:massiv;
...
Prozedure obnulenie(var A:massiv);
...
Begin
...
write('Введите возможное максимальное простое число: ');readln(n);
//ввод пользователем верхней границы для исследования
...
proverka_na_prostotu(ch1,S); //проверка, является ли число простым
if S=0
then
begin
vyvod(ch1); //вывод на экран простого числа
i:=ch1[kolichestvo_cifr(ch1)];
k[i]:=k[i]+1;
slozhenie(ch1,ch2,ch3); //получение нового натурального числа
ch1:=ch3;
n:=n-1
end
```

```
else
begin
slozhenie(ch1,ch2,ch3);
ch1:=ch3
end
end;
...
end.
```

В этой программе, кроме упомянутых ранее подпрограмм, используются также: сравнение двух чисел (массивов) — Procedure sravnenie (A,B:massiv; var perestAA,perestBB,perestAABB:Boolean), нахождение квадратного корня — Procedure kv_koren (A:massiv; var B:massiv), проверка числа на простоту — Procedure proverka_na_prostotu (A:massiv; var S1:word).

Как и ожидалось, применение процедур «длинной» арифметики при проверке простоты больших чисел на используемых в учебном процессе персональных компьютерах весьма сильно увеличивало время получения результата. (Так, в одной из наших пробных проверок, при вводе количества простых чисел для исследования в 10 млн, компьютер вычислял подряд более пяти суток.) Однако эти вычисления для различных исследуемых промежутков показывали существенные отличия значений долей простых чисел, начинающихся на фиксированную десятичную цифру, от соответствующих значений закона Бенфорда.

Размышления над причинами указанных отличий привели к выявлению ряда закономерностей. Укажем одну из них.

Пусть $p_n^{(m)}$ — вероятность события «Простое число, меньшее чем 10^{n+1}, начинается на цифру m» (здесь n — натуральное число, $m \in \{1, 2, \ldots, 9\}$). Вычисления по программе показали, что с ростом n значения $p_n^{(m)}$ при различных m все меньше отличаются друг от друга.

Этот вывод можно подтвердить, используя асимтотическую оценку для функции $\pi(x)$ — количество простых чисел, не превосходящих x.

Действительно, число неоднозначных простых чисел, начинающихся на цифру m и меньших 10^{n+1}, равно

$$S_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\pi\left((m+1)\cdot 10^k\right) - \pi(m\cdot 10^k)\right),$$

а соответствующая вероятность $p_n^{(m)} = \left(a + S_n^{(m)}\right) : \pi(10^{n+1})$, где $a = 1$ при $m = 2, 3, 5, 7$, и равна 0 — в остальных случаях. Очевидно, что ненулевыми значениями a при оценке искомых вероятностей можно пренебречь.

Для оценки поведения величин $S_n^{(m)} : \pi(10^{n+1})$ при $n \to \infty$ применим
• асимптотику Лежандра (1808 г.):

$$\pi(x)\tilde{}\,\frac{x}{\ln x - b},\ \text{где } b = 1,08366, \qquad (*)$$

которая, по крайней мере, для начала ряда простых чисел дает более точный результат для $\pi(x)$, чем закон распределения простых чисел $\pi(x)\,\tilde{}\,x/\ln x$ (доказанный Ж. Адамаром и Ш. Валле-Пуссеном в 1896 году) [12, с. 179];
• неравенство:

$$\pi(n) > \frac{n}{\ln n}\ (\text{при } n \geqslant 17)\ \ [13,\ c.\ 127]. \qquad (**)$$

В силу (*) и (**) имеем:

$$\frac{S_n^{(m)}}{\pi(10^{n+1})} \approx \frac{1}{\pi(10^{n+1})}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(m+1)10^k}{\ln(m+1) + k\cdot\ln 10 - b} - \frac{m10^k}{\ln m + k\cdot \ln 10 - b}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(n+1)\ln 10}{10^{n+1}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{10^k}{\ln(m+1) + k\cdot\ln 10 - 1,08366}.$$

Полученные по этой формуле верхние оценки исследуемых вероятностей при $n = 250$ имеют значения, приведенные в табл. 7.

Таблица 7

Статистика первых цифр простых чисел, меньших 10^{251}

1-я цифра простого числа	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_n^{(m)}$ на $[2; 10^{251}]$	0,111681	0,1116	0,1115	0,1115	0,1115	0,1114	0,1114	0,1114	0,1114

Таким образом на множествах всех простых чисел, меньших чем 10^{n+1}, при $n \to \infty$ вероятности $p_n^{(m)} \to \frac{1}{9}$ для каждого $m \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.

Заключение

В работе представлены программы в среде программирования PascalABC.NET, использующие элементы теории «длинной» арифметики, которые позволили значительно расширить объемы множеств исследуемых массивов натуральных чисел по сравнению с рассмотренными первоначально в [5]. Показанный подход не только усиливает интерес к рассмотренным учебно-исследовательским задачам о статистике первых цифр натуральных степеней двойки, чисел Фибоначчи и простых чисел, но и будет полезен на занятиях по изучению языков программирования студентами. Он также позволил обнаружить новое интересное свойство множества простых чисел: о «равновероятности» начальных цифр у простых чисел на промежутках от 1 до 10^n при очень больших n.

Список литературы

1. **Окулов С. М.** «Длинная» арифметика // *Информатика. М.: Первое сентября, 2000. № 4. С. 19—23.*

2. **Окулов С. М., Лялин А. В., Пестов О. А., Разова Е. В.** Алгоритмы компьютерной арифметики. 2-е изд. [Электронный ресурс]. Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf: 288 с.). М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.

3. **Коптенок Е. В., Кузин А. В., Шумилин Т. Б., Соколов М. Д.** Разработка способа представления длинных чисел в памяти компьютера // *Молодой ученый. 2017. № 46. С. 26—30.* URL: https://moluch.ru/archive/180/46418/ (дата обращения: 14.09.2018).

4. Длинная арифметика от Microsoft [Электронный ресурс]. URL: https:// habrahabr.ru/post/207754 (дата обращения: 07.03.2016).

5. **Попов В. А., Канева Е. А.** Исследовательские задания на занятиях по овладению компьютерными технологиями // *Математическое моделирование и информационные технологии : сборник статей Международной научной конференции (10–11 ноября 2017 г., г. Сыктывкар / отв. ред. А. В. Ермоленко. Сыктывкар: СГУ им. Питирима Сорокина, 2017. С. 109—113.*

6. **Вейль Г.** О равномерном распределении чисел по модулю один // *Избранные труды. Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984. С. 58—93 (Серия «Классики науки»).*

7. **Постников А. Г., Паршин А. Н.** Комментарии к статье Вейля Г. «О равномерном распределении чисел по модулю один» // *Вейль Г. Избранные труды. Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984. С. 451–455 (Серия «Классики науки»).*

8. **Арнольд В. И.** «Жесткие» и «мягкие» математические модели. 2-е изд., стереотип. М.: МЦНМО, 2008. 32 с.

9. **Кувакина Л. В., Долгополова А. Ф.** Закон Бенфорда: Сущность и применение // *Современные наукоемкие технологии. [Электронный ресурс]. 2013. № 6. С. 74—76.* URL: https://www.top-technologies.ru/ru/article/view?id=31987 (дата обращения: 21.07.2017).

10. **Акулич И.** Всего лишь степени двойки // *Квант. № 2. 2012. С. 38–42.*

11. Марио Ливио. φ — число Бога. Золотое сечение — формула мироздания [Электронный ресурс] / пер. А. Бродоцкая. М.: Издательская группа «АСТ», 2015. 432 с. URL: https://e-libra.ru/read/377938-chislo-boga-zolotoe-sechenie-formula-mirozdaniya.html (дата обращения: 07.03.2016).

12. **Дон Цагер.** Первые 50 миллионов простых чисел // *УМН, 39:6(240). 1984. С. 175—190.*

13. **Рибенбойм П.** Рекорды простых чисел (новая глава в книге рекордов Гиннеса) // *УМН, 42:5(257). 1987. С. 119–176.*

14. **Паундстоун У.** Камень ломает ножницы. Как перехитрить кого угодно : практическое руководство / пер. с англ. Ю. Гольдберга. М.: Азбука Бизнес, Азбука-Аттикус, 2015. 352 с.

Summary

Popov V. A., Kaneva E. A. «Long» arithmetic in studies of statistics of the first digits of powers of two, Fibonacci numbers and primes

The paper deals with educational and research problems of statistical regularities of the first digits of natural powers of two, Fibonacci numbers and Prime numbers in the programming environment PascalABC.NET. At the same time, elements of the theory of «long» arithmetic are used, which allow to significantly expand the volume of sets of the studied arrays

of natural numbers and can be useful in the classroom for the study of programming languages by students.
Keywords: Benford's law, powers of two, Fibonacci numbers, prime numbers, PascalABC.NET programming environment, «long» arithmetic.

References

1. **Okulov S. M.** «Dlinnaya» arifmetika («Long» arithmetic), *Informatics*, M.: The first of September, 4, 2000, pp. 19–23.

2. **Okulov S. M.** *Algoritmy komp'yuternoy arifmetiki* (Algorithms of computer arithmetic), S. M. Okulov, A. V. Lyalin, O. A. Pestov, E. V. Razova, 2nd ed. (El.), Electronic Text Data (1 pdf file: 288 p.), M.: BINOM. Knowledge Laboratory, 2015.

3. **Koptenok E. V., Kuzin A. V., Shumilin T. B., Sokolov M. D.** Razrabotka sposoba predstavleniya dlinnykh chisel v pamyati komp'yutera (Development of a presentation method long numbers in computer memory), *Young scientist*, 2017, No 46, pp. 26-30. The same URL https://moluch.ru/archive/180/46418/ (accessed September 14, 2018).

4. *Dlinnaya arifmetika ot Microsoft* (Long arithmetic from Microsoft), URL: https: // habrahabr.ru/post/207754 (accessed: 03.07.2016).

5. **Popov V. A., Kaneva E. A.** Issledovatel'skiye zadaniya na zanyatiyakh po ovladeniyu komp'yuternymi tekhnologiyami (Research tasks in the lessons on mastering computer technologies), *Mathematical modeling and information technology: a collection of articles of the International Scientific Conference*, November 10–11, 2017, city Syktyvkar / otv. ed. A. V. Ermolenko, Syktyvkar: SSU named after Pitirim Sorokin, 2017, pp. 109–113.

6. **Weil G.** O ravnomernom raspredelenii chisel po modulyu odin (On the uniform distribution of numbers modulo one), *Selected Works.*

Maths. Theoretical physics. Series « Classics of Science », M.: Nauka, 1984, pp. 58—93.

7. **Postnikov A. G., Parshin A. N.** Kommentarii k stat'ye Veylya G. «O ravnomernom raspredelenii chisel po modulyu odin» (Comments on Weil G. «On the uniform distribution of numbers modulo one»), *Weil G. Selected Works. Maths. Theoretical physics. Series «Classics of Science»*, M.: Nauka, 1984, pp. 451–455.

8. **Arnold V. I.** «Zhestkiye» i «myagkiye» matematicheskiye modeli («Hard» and «soft» mathematical models), Ed. 2nd, stereotype, M.: MCCNMO, 2008, 32 p.

9. **Kuvakina L. V., Dolgopolova A. F.** (Zakon Benforda: Sushchnost' i primeneniye) Benford's Law: Essence and Application, *Modern high technology*, 6, 2013, pp. 74—76. [Electronic resource] URL: https://www.top-technologies.ru/ru/article/view?id=31987 (date of access: 07.21.2017).

10. **Akulich I.** Vsego lish' stepeni dvoyki (Only powers of two), *Quantum*, 2, 2012, pp. 38–42.

11. **Mario L.** *φ — chislo Boga. Zolotoye secheniye — formula mirozdaniya* (φ is the number of God. Golden section — formula of the universe), trans. A. Brodotskaya, M.: Publishing group «AST», 2015, 432 p, URL: https://e-libra.ru/read/377938-chislo-boga-zolotoe-sechenie-formula-mirozdaniya.html (accessed March 7, 2016).

12. **Don Z.** Pervyye 50 millionov prostykh chisel (The first 50 million primes), *UMN*, 39: 6 (240), 1984, pp. 175–190.

13. **Ribenboym P.** Rekordy prostykh chisel (novaya glava v knige rekordov Ginnesa) (Records of primes (a new chapter in the Guinness Book of Records)), *UMN*, 42: 5 (257), 1987, pp. 119–176.

14. **Poundstone W.** *Kamen' lomayet nozhnitsy. Kak perekhitrit' kogo ugodno: prakticheskoye rukovodstvo* (The stone breaks the scissors. How to outwit anyone: a practical guide), trans. from English Yu. Goldberg, M.: ABC Business, ABC-Atticus, 2015, 352 p.

Для цитирования: Попов В. А., Канева Е. А. «Длинная» арифметика в исследованиях статистики первых цифр степеней двойки, чисел Фибоначчи и простых чисел // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 2 (31). С. 91–107.*

For citation: Popov V. A., Kaneva E. A. «Long» arithmetic in studies of statistics of the first digits of powers of two, Fibonacci numbers and primes, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, 2 (31), pp. 91–107.

СГУ им. Питирима Сорокина

Поступила 15.10.2019