МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 2 (31). 2019

УДК 372.8:517.1

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА: ПРЕДНЕПРЕРЫВНОСТЬ

В. А. Попов

Дана характеристика комплекта исследовательских задач, разработанных автором по тематике разделов математического анализа функции одной переменной, сформулированных с помощью введенного им понятия преднепрерывности функции в точке.

Ключевые слова: исследовательская задача, преднепрерывность функции в точке слева (справа).

Математический анализ как учебная дисциплина обладает особенностями, создающими благоприятные условия для развития исследовательских умений и навыков студентов. Однако в силу ограниченности количества практических занятий при изучении многих тем курса в аудитории с обучаемыми удается решать лишь задачи стандартного типа. Такое обучение не позволяет формировать у студентов элементов исследовательской деятельности. Выходом из положения могут стать индивидуальные задания исследовательского характера, которые даются преподавателем заранее, преимущественно в начале прохождения темы. Эти задания студент выполняет вне занятий, в счет часов, предусмотренных современными ФГОС для самостоятельной работы. Естественно, что при этом обучающийся должен иметь возможность консультироваться с преподавателем. Предполагается, что итоги такой исследовательской работы должны быть доложены и обсуждены на аудиторных занятиях (которые организуются преподавателем в формате семинара или конференции).

Мы не будем здесь углубляться в обсуждение определения понятия исследовательской задачи, тем более что в научной литературе однозначной формулировки такого определения нет (например, в работе [1] приведено 15 формулировок разных исследователей). Опускаем также обоснование важности и полезности рассмотрения таких задач в учебном процессе (см., например, [1]).

Отметим, что задачи исследовательского характера имеются во многих хороших сборниках задач по математическому анализу.

Хорошим дополнением к ним служит специальное пособие Гелбаума Б. и Олмстеда Дж. [2], которое длительное время было единственным в этом роде. В настоящее время публикаций такого вида много, отметим лишь пособия [3] и [4].

Ниже излагается комплект учебно-исследовательских задач, который был представлен в докладе на Всероссийской конференции «Математическое моделирование и информационные технологии» в декабре 2018 года [5], разработанный автором в связи с введенным им новым понятием преднепрерывности функции в точке [6, с. 111].

Пусть действительнозначная функция $y = f(x)$ задана на множестве $D(f) \subset (-\infty; +\infty)$ и точка x_0 принадлежит $D(f)$.

Определение 1. Функция f называется *преднепрерывной в точке* x_0 *справа* (*слева*), если найдется хотя бы одна сходящаяся к x_0 последовательность (x_n) значений аргумента функции f, для которой все члены x_n больше (соответственно меньше) x_0 и $f(x_n) \to f(x_0)$.

Определение 2. Функция f называется *преднепрерывной в точке*

x_0, если она преднепрерывна в ней слева или справа.

Уже на этапе исследования соотношений этих понятий с непрерывностью в точке установления арифметических свойств, необходимых и / или достаточных условий преднепрерывности, возникает много интересных задач (см. [7, с. 9–12, 14–19]).

Так легко показать, что любая элементарная функция преднепрерывна в каждой предельной точке своей области определения, а в каждой ее внутренней точке она преднепрерывна справа и слева.

С другой стороны, существуют элементарные функции, которые не имеют ни одной точки преднепрерывности (например, это функции $y = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$ и $y = \sqrt{\cos x - 1}$).

Напротив, функция Дирихле $\psi(x)$, равная 1 на рациональных числах и 0 – на иррациональных, преднепрерывна слева и справа в каждой точке, хотя эта функция в каждой точке своей области определения не является непрерывной и слева, и справа.

Приведем еще одно интересное сопоставление. Функция $g(x) = (1/x) \cdot \sin(1/x)$ непрерывна всюду, где она определена (т. е. кроме точки $x = 0$). При попытке расширить эту функцию никакое числовое значение $g(0)$ не позволит добиться непрерывности расширенной функции в точке $x = 0$. С другой стороны, при любом выбранном значении $g(0)$ это расширение будет преднепрерывным справа и слева в точке 0.

Изучение связей преднепрерывности с другими понятиями из математического анализа осуществлено нами в работах [6–8]. Оказалось, что с помощью преднепрерывности можно обобщать многие, хотя и не все, теоремы классического математического анализа, в формулировках которых применялось условие непрерывности функции. Это позволило сформулировать исследовательские задачи о преднепрерывности по многим темам математического анализа: монотонность; связность; классы функций, аналогичные классам Бэра; непрерывность (дифференцируемость) на интервалах с дополнительными условиями на их концах; применение производных к исследованию функций; правила Лопиталя; первообразные; интегрируемость по Риману; обобщения теорем о формуле Тейлора с остаточными членами в формах Лагранжа и Коши.

Сформулируем некоторые примеры исследовательских задач (которые большей частью являются скорее темами исследований).

Задача 1. Каждая аддитивная на множестве $(-\infty; +\infty)$ функция преднепрерывна слева и справа в каждой точке из $(-\infty; +\infty)$.

Задача 2. Если прообраз хотя бы одного значения функции f является несчетным множеством, то имеется, по крайней мере, одна точка преднепрерывности этой функции.

Задача 3. Исследуйте, является ли достаточным для преднепрерывности функции в предельной точке области определения какое-либо из условий в терминах полунепрерывности функции снизу (сверху) в этой точке.

Задача 4. Следует ли из преднепрерывности в точке 0 слева и справа условие полунепрерывности функции в этой точке снизу или сверху?

Задача 5. Перефразируйте определения 1 и 2, применив ε-подход О. Коши или терминологию окрестностей.

Отметим, что подход к определению понятия преднепрерывности посредством окрестностей позволяет сформулировать и изучать это понятие и для отображений $\varphi : X \to Y$ одного топологического пространства X в другое топологическое пространство Y, в частности для метрических пространств X и Y, или функций $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ нескольких действительных переменных. Это направление исследований мы здесь опускаем.

Пусть даны две числовые функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, и пусть x_0 – внутренняя точка множества $D(f) \cap D(g)$.

Задача 6. Исследуйте вопрос о выполнимости (или нет) одного из условий преднепрерывности в точке x_0 для функций: $f \pm g$, $g \pm f$, $f \cdot g$,

$g \cdot f$, f/g (при $g(x_0) \neq 0$) и g/f (при $f(x_0) \neq 0$), если функции f и g – преднепрерывны в ней.

Задача 7. Исследуйте, какие свойства функций f и g гарантируют какую-либо преднепрерывность их композиции $f \circ g$.

При изучении связей между условиями преднепрерывности и монотонности возникла потребность в нижеследующем понятии (см. [7, определение 3.1 на с. 21]), которое общее каждого из понятий: возрастание (убывание) в точке.

Определение 3. Функцию f будем называть монотонной в точке x_0, если существует число $\delta > 0$, такое, что

$$\forall x_1 \in (x_0 - \delta; x_0)\ \forall x_2 \in (x_0; x_0 + \delta)(f(x_1) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_2))$$

или

$$\forall x_1 \in (x_0 - \delta; x_0)\ \forall x_2 \in (x_0; x_0 + \delta)(f(x_1) \geqslant f(x_0) \geqslant f(x_2)).$$

Отметим, что непрерывность функции f в точке не следует из преднепрерывности и монотонности ее в этой точке.

Задача 8. Пусть функция f преднепрерывна справа в каждой точке $[a; b)$, преднепрерывна слева в каждой точке $(a; b]$, причем f монотонна в каждой точке из интервала $(a; b)$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$. Можно ли утверждать, что найдется точка $c \in (a; b)$ со свойством $f(c) = 0$? Если да, то является ли это утверждение обобщением известной теоремы о нуле непрерывной на отрезке функции? Исследуйте аналогичные вопросы относительно ситуации с теоремой о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции.

Задача 9. Приведите примеры, соответственно показывающие, что теоремы Вейерштрасса об ограниченности и достижении граней непрерывной на отрезке функции f не обобщаются на случай, когда функция f непрерывна на интервале $(a; b)$, а в концевых точках a и b преднепрерывна с соответствующей стороны.

Задача 10. Докажите, что если функция f дифференцируема на интервале $(a;b)$, преднепрерывна в точке a справа, в точке b – слева и $f(a)=f(b)$, то найдется число $c\in(a;b)$, такое, что $f'(c)=0$.

Задача 11. Докажите, что если функция f дифференцируема на интервале $(a;b)$, преднепрерывна в точке a справа, в точке b – слева, то найдется число $c\in(a;b)$ со свойством $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Задача 12. Пусть функции f и g дифференцируемы на интервале $(a;b)$, преднепрерывны в точке a справа, в точке b – слева, причем для всех $x\in(a;b)$ выполняется $g'(x)\neq 0$. Тогда найдется такое число $c\in(a;b)$, что $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Задача 13. Имеются ли примеры функций f, для которых утверждения задач 10–13 применимы, а классические теоремы Ролля, Лагранжа и Коши — нет?

Задача 14. Докажите следующие модифицированные теоремы об исследовании функций с помощью производных:

1. Если функция f преднепрерывна в точке a справа, в точке b – слева и для всех $x\in(a;b)$ $f'(x)>0$ ($f'(x)\geqslant 0$), то функция f возрастающая (соответственно неубывающая) на отрезке $[a;b]$.

2. Пусть функция f дифференцируема на интервалах $(a;x_0)$ и $(x_0;b)$, преднепрерывна слева и справа в точке x_0, причем ее производная сохраняет постоянный знак на каждом из указанных интервалов. Тогда если знаки производной слева и справа от x_0 различны, то x_0 — точка экстремума, а если совпадают, то — не является точкой экстремума.

При этом: 1) если знак производной при переходе через x_0 меняется с положительного на отрицательный, то x_0 — точка максимума; 2) если же с отрицательного на положительный, то x_0 — точка минимума функции f.

3. Если функция f задана на отрезке $[a;b]$, преднепрерывна справа в точке a и слева в точке b, преднепрерывна слева и справа во всех заданных точках x_k, $(k=1,2,...,n)$, удовлетворяющих неравенствам

$a < x_1 < x_2 < ... < x_n < b$, а на каждом из интервалов $(a; x_1)$, $(x_1; x_2)$, ..., $(x_{n-1}; x_n)$, $(x_n; b)$ имеет знакопостоянную производную, то эта функция имеет на отрезке $[a; b]$ наибольшее и наименьшее значения, которые находятся среди чисел $f(a)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$,..., $f(x_n)$, $f(b)$.

4. Если функция f преднепрерывна справа в точке a, преднепрерывна слева в точке b и имеет на интервале $(a; b)$ возрастающую (убывающую) производную, то она выпукла вниз (соответственно вверх) на отрезке $[a; b]$.

5. Пусть функция f преднепрерывна справа в точке a, преднепрерывна слева в точке b и имеет на интервале $(a; b)$ производную второго порядка. Если f'' в каждой точке $(a; b)$ положительна (отрицательна), то функция f выпукла вниз (соответственно вверх) на отрезке $[a; b]$.

6. Пусть функции f и g на интервале $(a; b)$ удовлетворяют следующим пяти условиям:

(I) Существует хотя бы одна последовательность (x_n), $x_n \to a$, для которой $x_n > a$ при всех n, а $f(x_n) \to 0$.

(II) Существует хотя бы одна последовательность (t_n), $t_n \to a$, для которой $t_n > a$ при всех n, а $g(t_n) \to 0$.

(III) f и g дифференцируемы на интервале $(a; b)$.

(IV) Для всех $x \in (a; b)$ выполняется $g'(x) \neq 0$.

(V) При $x \to a + 0$ существует предел отношения производных: $f'(x)/g'(x)$, и он равен A (числу или одному из символов бесконечности).

Тогда при $x \to a + 0$ существует предел отношения $f(x)/g(x)$, и этот предел также равен A.

Заметим, что, как и в случае классических правил Лопиталя, обобщенные формулировки типа 14.6 возможны и в других ситуациях: 1) при $x \to b - 0$, 2) при $x \to x_0 \in (a; b)$.

Пусть (x_n) — последовательность чисел из $D(f)$, $x_n \neq x_0$, сходящаяся к x_0. По мотивам понятия производного числа Дини, предел вида $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$, когда он существует конечный или бесконечный, будем называть *производным числом функции f в точке x_0*.

Задача 15. Очевидно, что если функция f имеет в точке x_0 хотя бы одно конечное производное число, то она в ней преднепрерывна. Обратимо ли это утверждение?

Задача 16. Докажите, что если на интервале $(a;b)$ существует производная функции f, то эта производная f' преднепрерывна слева и справа в каждой его точке. Если дополнительно к основному условию существует производная справа в точке a (слева в точке b), то f' еще и преднепрерывна справа в точке a (соответственно преднепрерывна слева в точке b).

Задача 17. Из утверждения в задаче 16 следует, что для существования на интервале $(a;b)$ первообразной [=примитивной] для функции $y = f(x)$ необходимо, чтобы функция $y = f(x)$ была преднепрерывной слева и справа в каждой точке этого интервала. Приведите пример функции, которая преднепрерывна с обеих сторон во всех точках промежутка, но не имеет первообразную на нем.

Из циклов задач по тематике интеграла Римана и формулы Тейлора приведем только по одной.

Задача 18. Если функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$, а функция $y = F(x)$ обладает следующими свойствами: 1) $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (a;b)$ за исключением, быть может, конечного множества значений x, 2) функция $y = F(x)$ преднепрерывна в точке a справа, в точке b слева, а во всех точках x, в которых не выполнено условие (1), она преднепрерывна слева и справа. Докажите выполнимость формулы Ньютона – Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Задача 19. Пусть $x_0 < x$, функция f преднепрерывна в точке x слева, на интервале $(x_0;x)$ функция f имеет производные до $n+1$ порядка включительно, а в точке x_0 — производные до n порядка. Тогда существует $c \in (x_0; x)$, что

$$f(x) = F_n(f; x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где $F_n(f; x)$ — многочлен Тейлора степени n для функции f.

Приведите пример функции f, для которой эта обобщенная теорема о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа на каком-либо интервале $(x_0; x)$ выполняется, а классическая формулировка неприменима.

В заключение обзора отметим, что понятия преднепрерывности породили новый тип задач, пригодный для использования и в 10–11 классах школ: при изучении темы «Непрерывность функции в точке» теперь можно рассматривать задания на доказательство преднепрерывности конкретных элементарных функций (прежде всего, основных элементарных функций) с помощью определений 1 и 2 выше. Такие задачи решаются на основе применения известных простейших свойств исследуемой элементарной функции и простейших свойств пределов числовых последовательностей. И эти решения, как правило, проще, чем доказательства непрерывности тех же функций. Вместе с тем такие решения (см. примеры в [5, с. 67–72]) носят исследовательский, эвристический характер, так как они, как правило, основываются на использовании выгодных особенностей какой-либо одной последовательности чисел (x_n), сходящейся к x_0, которая обеспечивает наиболее простое доказательство условия сходимости $f(x_n) \to f(x_0)$.

В главе 1 работы [7] можно найти и другие примеры и исследовательские задачи по проблематике преднепрерывности, привлечение которых в учебный процесс позволит студентам университетов и втузов глубже усвоить содержание, смысл и применимость понятий и положений математического анализа и сделает его преподавание и изучение интересным, творческим процессом.

Список литературы

1. **Ярков В. Г.** Сущность и функции исследовательских задач в обучении математике студентов педвуза // *Современные проблемы науки и образования. 2013. № 6.* URL: http://science-education.ru/ru/article/view?id=11061 (дата обращения: 30.10.2018).

2. **Гелбаум Б., Олмстед Дж.** Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967. 251 с.

3. **Шибинский В. М.** Примеры и контрпримеры в курсе математического анализа : учебное пособие. М.: Высшая школа, 2007. 544 с.

4. **Босс В.** Лекции по математике. Т. 12. Контрпримеры и парадоксы : учебное пособие. М.: Либроком, 2009. 216 с.

5. **Попов В. А.** Исследовательские задачи в курсе математического анализа: преднепрерывность // *Математическое моделирование и информационные технологии: Национальная (Всероссийская) научная конференция (6–8 декабря 2018 г., г. Сыктывкар) : сборник материалов / отв. ред. А. В. Ермоленко. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2018. С. 71–73.*

6. **Попов В. А.** Согласованные функции // *Вестник Коми государственного педагогического института. Сыктывкар: Изд-во КГПИ, 2005. Вып. 2. С. 110–114.*

7. **Попов В. А.** Преднепрерывность. Производные. *П*-аналитичность : монография. Сыктывкар: Коми пединститут, 2011. 228 с.

8. **Попов В. А.** Интегрируемость по Риману и контактность функции // *Преподавание математики в школах и вузах : проблемы*

содержания, технологии и методики : материалы Всероссийской научно-практической конференции. Глазов: Глазовский гос. пед. ин-т, 2009. С. 22–26.

Summary

Popov V. A. Tasks for researcher in the studying course of mathematical analysis: preliminary-continuity

The characteristic of a set of research problems developed by the author on the subject of sections of mathematical analysis of the function of one variable formulated with the help of the concept of preliminary-continuity of the function at the point by him is given.
Keywords: research problem,the preliminary-continuity of the function at the point on the left (right).

References

1. **Yarkov V. G.** Sushchnost' i funktsii issledovatel'skikh zadach v obuchenii matematike studentov pedvuza (Essence and functions of research problems in teaching mathematics to students the University), *Modern problems of science and education*, 2013, No 6, URL: http://science-education.ru/ru/article/view?id=11061 (date accessed: 30.10.2018).

2. **Gelbaum B., Olmsted J.** *Kontrprimery v analize* (Counterexamples in analysis), Moscow: Mir, 1967, 251 p.

3. **Shibinsky V. M.** *Primery i kontrprimery v kurse matematicheskogo analiza: uchebnoye posobiye* (Examples and counterexamples in the course of mathematical analysis: textbook), Moscow: Higher school, 2007, 544 p.

4. **Boss In.** Lektsii po matematike (Lectures on mathematics), T. 12, *Counterexamples and paradoxes: a Textbook*, Moscow: Librokom, 2009, 216 p.

5. **Popov V. A.** Issledovatel'skiye zadachi v kurse matematicheskogo analiza: prednepreryvnost' (Research problems in the course of mathematical analysis: pre-continuity), *Mathematical modeling and information technologies: national (all-Russian) scientific conference* (6 – 8 December 2018 , G. Syktyvkar): collection of materials, Rev. edited by A. V. Yermolenko. Syktyvkar: Publishing house of SSU. Pitirima Sorokina, 2018, pp. 71–73.

6. **Popov V. A.** Soglasovannyye funktsii (Coordinated functions), *Bulletin of the Komi state pedagogical Institute*, Vol. 2. Syktyvkar: KSPI publishing house, 2005, pp. 110–114.

7. **Popov V. A.** *Prednepreryvnost'. Proizvodnyye. P-analitichnost'* (pre-Continuity. Derivative. P-analyticity: a monograph), Syktyvkar: Komi pedagogical Institute, 2011, 228 p.

8. **Popov V. A.** Integriruyemost' po Rimanu i kontaktnost' funktsii (Riemann Integrability and function contact), *Teaching mathematics in schools and universities: problems of content, technology and methods: materials of the all-Russian scientific and practical conference*, Glazov: Glazovsky state pedagogical University.in-t, 2009, pp. 22–26.

Для цитирования: Попов В. А. Исследовательские задачи в курсе математического анализа: преднепрерывность // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 2 (31). С. 79–90.*

For citation: Popov V. A. Tasks for researcher in the studying course of mathematical analysis: preliminary-continuity, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, 2 (31), pp. 79–90.

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 03.09.2019*