МАТЕМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 2 (31). 2019

УДК 512.55

О ПОЛУКОЛЬЦЕ КОСЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ЛОРАНА И РАСШИРЕНИИ ЖОРДАНА

Д. А. Масляев

В статье показано, что изучение полуколец косых многочленов Лорана сводится к случаю, когда инъективный эндоморфизм полукольца коэффициентов является автоморфизмом. Именно пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S. Тогда строится расширение $\mathbb{S}_\varphi$ полукольца S и автоморфизм $\bar{\varphi}$ полукольца $\mathbb{S}_\varphi$, являющийся продолжением исходного эндоморфизма φ. Показано, что полукольца косых многочленов Лорана $S[x^{-1}, x, \varphi]$ и $\mathbb{S}_\varphi[x^{-1}, x, \bar{\varphi}]$ изоморфны.

Ключевые слова: полукольцо косых многочленов Лорана, расширение Жордана.

В работе рассматриваются полукольцо косых многочленов и его надполукольцо — полукольцо косых многочленов Лорана. Отметим, что кольца косых многочленов являются классическими объектами и изучаются достаточно давно. В 1982 году D. A. Jordan предложил конструкцию расширения кольца A с эндоморфизмом до кольца $\mathbb{A}$ с автоморфизмом, продолжающим исходный эндоморфизм. Идея этого расширения связана с рассмотрением кольца косых многочленов Лорана. Кроме того, кольца косых многочленов Лорана над A и над $\mathbb{A}$ при этом получаются изоморфными (детали см. в [1]). Нашей задачей является перенесение конструкции Жордана на полукольца.

Под *полукольцом* мы понимаем алгебру$(S, +, \cdot, 0)$, которая является коммутативной полугруппой с нулем относительно сложения, полугруппой относительно умножения, умножение дистрибутивно справа и слева относительно сложения, нуль мультипликативен (т. е. справедливо условие $a0 = 0 = 0a$). Все рассматриваемые нами полукольца содержат единицу.

Пусть $\varphi : S \to S$ — эндоморфизм полукольца S. Рассмотрим множество $S[x, \varphi]$ всех многочленов $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ с коэффициентами $a_i \in S$, записываемыми слева от переменной x. Сложение многочленов определяется обычным способом, а умножение задается правилом $xa = \varphi(a)x$. Стандартно проверяется, что $S[x, \varphi]$ является полукольцом, которое называется *левым полукольцом косых многочленов*. Ясно, что в случае тождественного автоморфизма мы имеем обычное полукольцо многочленов $S[x]$. Если $\varphi(1) = 1$, то $S[x, \varphi]$ будет полукольцом с единицей. В дальнейшем будем рассматривать только эндоморфизмы, сохраняющие единицу.

Ненулевой элемент $s \in S$ называется *левым уравнителем*, если $sa = sb$ для некоторых $a \neq b$. Симметрично определяется правый уравнитель. Подмножество A полукольца S, не содержащее как левых, так и правых уравнителей в S, будем называть множеством без уравнителей. Несложно понять, что уравнители в полукольцах играют роль, близкую к роли делителей нуля в кольцах. Каждый делитель нуля является уравнителем, но не каждый уравнитель в полукольце (например, в ограниченной дистрибутивной решетке) — делитель нуля.

Для построения полуколец частных существует почти полная аналогия с кольцами. Именно *левым множеством Оре* полукольца S называется такое множество $A \subseteq S$, что выполняются условия:

1) мультипликативно замкнутое, $0 \notin A, 1 \in A$;

2) A — множество без уравнителей;

3) для любых $s \in S, a \in A$ выполняется $a's = s'a$ для подходящих $s' \in S, a' \in A$ (*условие Оре*).

Тогда левое полукольцо частных относительно A — это полукольцо $A^{-1}S$, содержащее S, и каждый элемент A обратим в $A^{-1}S$ (см., например, [2, §2]).

Замечание. Термин «полукольцо частных» не всегда используется для конструкции, рассматриваемой нами. Например, Дж. Голан в своей монографии (см. [3, §11] и цитируемые в этом параграфе работы) требует, чтобы элементы множества Оре были неделителями нуля, допуская, что они являются уравнителями. Возникающее полукольцо (полукольцо частных для полукольца S в терминологии Голана) уже необязательно содержит само полукольцо S. Кроме того, для коммутативного полукольца S без делителей нуля полукольцо частных относительно множества $S \setminus \{0\}$ является полуполем; например, для любой конечной цепи такая конструкция полукольца частных по Голану будет двухэлементной цепью.

Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, и $R = S[x, \varphi]$ — полукольцо косых многочленов. Множество $X = \{x^i : i \geq 0\}$ образует левое множество Оре полукольца R; в частности, для любых $k \geq 0$ и $s \in S$ выполняется $x^k s = \varphi^k(s) x^k$ — условие Оре. Элементами полукольца частных $X^{-1}R$ являются выражения вида $x^{-k} f$, где $f \in R$, или же

$$\sum_{i=0}^{n} (x^{-k} a_i x^i) \text{ для } k \geq 0, a_i \in S.$$

Обозначим $S[x^{-1}, x, \varphi] = X^{-1}R$ и назовем его *левым полукольцом косых многочленов Лорана.*

Требование инъективности эндоморфизма необходимо по следующей причине. Предположим, что $\varphi(a) = \varphi(b)$ для некоторых различных a и b. Тогда $xa = \varphi(a)x = \varphi(b)x = xb$, и x оказывается левым уравнителем.

Лемма 1. *Пусть* φ *— инъективный эндоморфизм полукольца* S, $i, j, k, l \geq 0$ *и* $a, b \in S$. *Тогда справедливы следующие свойства:*

1. $x^{-i}ax^j = x^{-k}bx^l, i \leq k \Leftrightarrow -i+j = -k+l$ *и* $b = \varphi^{k-i}(a)$;

2. $x^{-i}ax^i = x^{-l}bx^l, i \leq l \Leftrightarrow b = \varphi^{l-i}(a)$;

3. $x^{-i}ax^i = x^{-(i+j)}\varphi^j(a)x^{i+j}$.

Доказательство. (1) Пусть $i \leq k$, тогда $x^{-i}ax^j = x^{-k}bx^l \Leftrightarrow x^{k-i}ax^j = bx^l \Leftrightarrow \varphi^{k-i}(a)x^{k-i+j} = bx^l \Leftrightarrow k-i+j = l$ и $\varphi^{k-i}(a) = b$.

(2) и (3) следуют из (1). □

Рассмотрим теперь множество $\mathbb{S}_\varphi = \{x^{-i}ax^i : a \in S, i \geq 0\}$, являющееся подмножеством полукольца $S[x^{-1}, x, \varphi]$.

Лемма 2. $\mathbb{S}_\varphi$ *является подполукольцом с единицей полукольца* $S[x^{-1}, x, \varphi]$.

Доказательство. Достаточно показать замкнутость сложения и умножения на $\mathbb{S}_\varphi$. С помощью леммы 1 получаем:

$$x^{-i}ax^i + x^{-j}bx^j = x^{-(i+j)}\varphi^j(a)x^{i+j} + x^{-(i+j)}\varphi^i(b)x^{i+j} = \\ = x^{-(i+j)}(\varphi^j(a) + \varphi^i(b))x^{i+j}.$$

Таким же образом доказывается: $x^{-i}ax^i \cdot x^{-j}bx^j = x^{-(i+j)}(\varphi^j(a)\varphi^i(b))x^{i+j}$. □

Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S. Рассмотрим отображение

$$\bar{\varphi} : \mathbb{S}_\varphi \to \mathbb{S}_\varphi,\ \bar{\varphi}(x^{-i}ax^i) = x^{-i}\varphi(a)x^i.$$

По лемме 1 отображение $\bar{\varphi}$ определено корректно. Действительно, для $0 \leq i \leq j$ из $x^{-i}ax^i = x^{-j}bx^j$ следует $b = \varphi^{j-i}(a)$, откуда имеем

$$\bar{\varphi}(x^{-j}bx^j) = x^{-j}\varphi(b)x^j = x^{-j}\varphi^{j-i}(\varphi(a))x^j = x^{-i}\varphi(a)x^i = \bar{\varphi}(x^{-i}ax^i).$$

Пусть далее $\bar\varphi(x^{-i}ax^i) = \bar\varphi(x^{-j}bx^j)$, $0 \le i \le j$, тогда $x^{-i}\varphi(a)x^i = x^{-j}\varphi(b)x^j$. Отсюда получаем $x^{-i-1}\varphi(a)x^{i+1} = x^{-j-1}\varphi(b)x^{j+1}$ и по лемме 1(2) $x^{-i}ax^i = x^{-j}bx^j$. Получили, что отображение $\bar\varphi$ инъективно. Кроме того, для любых $k \ge 0$ и $a \in S$ $\bar\varphi(x^{-k-1}ax^{k+1}) = x^{-k-1}\varphi(a)x^{k+1} = x^{-k}ax^k$, поэтому $\bar\varphi$ сюръективно. Стандартно проверяется, что $\bar\varphi$ является гомоморфизмом. Поэтому справедливо

Предложение 1. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S. Тогда $\mathbb{S}_\varphi$ — расширение полукольца S, $\bar\varphi$ — автоморфизм полукольца $\mathbb{S}_\varphi$, являющийся продолжением эндоморфизма φ, и в полукольце $S[x^{-1}, x, \varphi]$ выполняется $x\alpha = \bar\varphi(\alpha)x$ для любого элемента $\alpha \in \mathbb{S}_\varphi$.*

Доказательство. Очевидно, что S является подполукольцом полукольца $\mathbb{S}_\varphi$. То, что $\bar\varphi$ является автоморфизмом полукольца $\mathbb{S}_\varphi$, доказано выше. Пусть $a \in S$, тогда равенство $\bar\varphi(a) = \varphi(a)$ следует из определения отображения $\bar\varphi$. Если $\alpha = x^{-i}ax^i$, то $x\alpha = xx^{-i}ax^i = x^{-i}xax^i = x^{-i}\varphi(a)x^{i+1} = \bar\varphi(\alpha)x$. □

Полукольцо $\mathbb{S}_\varphi$ назовем *расширением Жордана* полукольца S.

Отметим, что если φ — автоморфизм полукольца S, то $x^{-i}ax^j = \varphi^{-i}(a)x^{-i+j}$, поэтому многочлены из $S[x^{-1}, x, \varphi]$ имеют вид $\sum_{i=k}^m a_ix^i$ для $a_i \in S$ и целых k, m. В этом случае два одночлена αx^i и βx^j из $S[x^{-1}, x, \varphi]$ равны в точности тогда, когда равны их степени $i = j$ и коэффициенты $\alpha = \beta$, и дальше определение равенства многочленов естественным образом продолжается для произвольных многочленов. Укажем также два полезных соотношения при автоморфизме φ, а именно $x^ka = \varphi^k(a)x^k$ и $bx^l = x^l\varphi^{-l}(b)$ для любых целых k, l.

Предложение 2. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S. Тогда полукольца косых многочленов Лорана $S[x^{-1}, x, \varphi]$ и $\mathbb{S}_\varphi[x^{-1}, x, \bar\varphi]$ изоморфны.*

Доказательство. Пусть отображение $f : S[x^{-1}, x, \varphi] \to \mathbb{S}_\varphi[x^{-1}, x, \bar\varphi]$ переводит одночлен $x^{-i}ax^j$ в αx^{-i+j}, где $\alpha = x^{-i}ax^i \in \mathbb{S}_\varphi$, и произвольный многочлен из $S[x^{-1}, x, \varphi]$ — в сумму образов его одночленов. Тогда для доказательства гомоморфности отображения f достаточно сделать проверку для одночленов. Пусть $\alpha = x^{-i}ax^j$, $\beta = x^{-k}bx^l$ и $j < k$. Тогда

$$f(\alpha\beta) = f(x^{-i}ax^{j-k}bx^l) = x^{-i+j-k}\varphi^{-j+k}(a)bx^{i-j+k} \cdot x^{-i+j-k+l}.$$

С другой стороны,

$$f(\alpha)f(\beta) = (x^{-i}ax^i \cdot x^{j-i})(x^{-k}bx^k \cdot x^{l-k}) = \\ = x^{-i}ax^i\bar{\varphi}^{j-i}(x^{-k}bx^k) \cdot x^{-i+j-k+l} = (*).$$

Если $j - i \geq 0$, то получаем

$$(*) = x^{-i}ax^i \cdot x^{-k}\varphi^{j-i}(b)x^k \cdot x^{-i+j-k+l} = \\ = x^{-i-k}\varphi^k(a)\varphi^j(b)x^{i+k} \cdot x^{-i+j-k+l} = f(\alpha\beta)$$

по лемме 1(1). Если $j - i < 0$, то

$$(*) = x^{-i}ax^i \cdot x^{-k+j-i}bx^{k-j+i} \cdot x^{-i+j-k+l} = \\ = x^{-i+j-k}\varphi^{-j+k}(a)bx^{i-j+k} \cdot x^{-i+j-k+l} = f(\alpha\beta).$$

Таким же образом рассматривается случай $j \geq k$. Мы показали, что f сохраняет произведение; для суммы доказывать нечего. Покажем, что f — биекция. Пусть $f(\alpha) = f(\beta)$, т. е. $x^{-i}ax^i \cdot x^{-i+j} = x^{-k}bx^k \cdot x^{-k+l}$. Из равенства этих одночленов из $\mathbb{S}_\varphi[x^{-1}, x, \bar{\varphi}]$ следует равенство степеней $-i + j = -k + l$ и равенство коэффициентов $x^{-i}ax^i = x^{-k}bx^k$. По лемме 1 (при $k \geq i$; симметричный вариант рассматривается аналогично) получаем $b = \varphi^{k-i}(a)$, откуда $\alpha = \beta$. Для одночлена $x^{-i}ax^i \cdot x^j$, очевидно, прообразом при отображении f будет $x^{-i}ax^{i+j}$, если $i + j \geq 0$. Если же $i + j < 0$, то $x^j\varphi^{-i-j}(a) \in S[x^{-1}, x, \varphi]$ и $f(x^j\varphi^{-i-j}(a)) = x^{-i}ax^i \cdot x^j$. □

Список литературы

1. **Jordan D. A.** Bijective extensions of injective ring endomorphisms // *J. London Math. Soc. 1982. 25:3. Pp. 435–448.*

2. **Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Чермных В. В.** Элементы теории полуколец. Киров.: Радуга–пресс. Kirov, 2012. 228 с.

3. **Golan J. S.** Semirings and their applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht; Boston; London, 1999. 380 p.

Summary

Maslyaev D. A. About the semiring of the Laurent skew polynomials and the expansion of Jordan

The article shows that the study of semirings of Laurent skew polynomials is reduced to the case when endomorphism is an automorphism. Namely, let φ be the injective endomorphism of the semiring S. Then we construct the extension $\mathbb{S}_\varphi$ of the semiring S and the auto morphism $\bar{\varphi}$ of the semiring S, which is a continuation of the original endomorphism of φ. It is shown that semirings of Laurent skew polynomials $S[x^{-1}, x, \varphi]$ and $\mathbb{S}_\varphi[x^{-1}, x, \bar{\varphi}]$ are isomorphic.

Keywords: semiring of Laurent skew polynomials, extension of Jordan.

References

1. **Jordan D. A.** Bijective extensions of injective ring endomorphisms, *J. London Math. Soc.*, 1982, 25:3, pp. 435–448.

2. **Vestomov E. M., Lubyagina E. N., Chermny V. V.** *Elementy teorii polukolets* (Elements of the theory of semirings), Kirov: Raduga–press, Kirov, 2012, 228 p.

3. **Golan J. S.** *Semirings and their applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht; Boston; London, 1999, 380 p.

Для цитирования: Масляев Д. А. О полукольце косых многочленов Лорана и расширении Жордана // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 2 (31). С. 18–25.*

For citation: Maslyaev D. A. About the semiring of the Laurent skew polynomials and the expansion of Jordan, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, 2 (31), pp. 18–25.

КРАГСИУ *Поступила 09.10.2019*