МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 1 (30). 2019

УДК 539.3

ОБУЧЕНИЕ ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ НА МАТЕРИАЛЕ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

О. А. Сотникова

Одно из основных методических умений учителя математики — выполнять логико-математический анализ учебного математического материала. Традиционно эта задача решается в курсе методических дисциплин. Автор исходя из принципа профессионально-педагогической направленности обучения обосновывает целесообразность и возможность решения этой задачи при изучении высшей алгебры. В статье представлен состав действий по выполнению логико-математического анализа алгебраического материала.

Ключевые слова: подготовка учителя математики в вузе, логико-математический анализ, методологические знания.

В современном образовании происходят весьма существенные изменения, связанные с ориентацией на качество подготовки. В этой связи внедряются новые технологии, разрабатываются новые учебники и пособия, изменяются подходы к обучению. Современный учитель должен быть готов к этим преобразованиям. Однако при любых изменениях всегда остается требование фундаментальности к качеству подготовки учителя математики.

© Сотникова О. А., 2019.

Фундаментальность подготовки учителя означает прежде всего его глубокое понимание своей предметной области. Именно оно составляет основу методической готовности к внедрению инноваций. Ученые-методисты рассматривают логико-математический анализ как один из основных видов учебной деятельности в подготовке студента: «Прежде чем разрабатывать методику обучения конкретного содержания тем курсов, необходимо научиться понимать логическую структуру и математическое содержание основных компонентов и связей между ними» [1, с. 36]. Иначе говоря, владение логико-математическим анализом является одним из основных компонентов фундаментальной подготовки учителя математики.

Формирование умений выполнять логико-математический анализ обычно организуется при изучении методических дисциплин, то есть, как правило, после изучения предметных курсов. Однако уже давно в теории и методике обучения математике признан принцип профессионально-педагогической направленности [2], в соответствии с которым необходимо отыскать средства повышения профессиональной подготовки через предметные курсы. В данной статье предлагается обучение логико-математическому анализу учебного материала осуществлять при изучении высшей алгебры.

Действия по выполнению логико-математического анализа вузовского курса алгебры, безусловно, отличаются от действий по анализу школьного курса математики. Это отличие состоит в следующем:

- Содержание школьного курса математики для студента хорошо знакомо, уровень сформированности соответствующих знаний достаточно высок, а курс алгебры — новый по содержанию, в сознании понятия сформированы в лучшем случае на уровне предпонятий. Поэтому если логико-математический анализ школьного курса носит констатирующий характер, то анализ вузовского курса — исследовательский, познавательно-учебный.

- Уровень изложения школьного курса — содержательный или содержательно-формальный, тогда как уровень изложения алгебры — формально-содержательный. Понятия вузовской алгебры более высокого уровня абстракции, а отсюда меньше опоры на «житейские» представления, меньше очевидных применений теории на практике.

- Обучение логико-математическому анализу школьного курса традиционно происходит в курсе методики преподавания математики, то есть тогда, когда созданы предпосылки его выполнения: студенты обладают определенной логической грамотностью, математической культурой, имеют опыт математической деятельности и т. д., то есть уровень познавательной деятельности значительно выше уровня выпускника средней школы. Логико-математический анализ вузовского курса предполагается выполнять в ходе изучения дисциплины, когда такие предпосылки отсутствуют.

- Структура и содержание изучаемых определений и теорем высшей алгебры значительно сложнее, а потому имеются отличия выполняемых умственных действий по осуществлению логико-математического анализа теории.

Логико-математический анализ основных компонентов содержания вузовского курса направлен на осознанный процесс познания математической действительности, заложенной в курсе. Содержание алгебраических тем составляют математические предложения и их доказательства.

Математические предложения, встречающиеся в базовом курсе алгебры в педагогическом вузе, следующие.

Определения понятий. В курсе алгебры встречаются почти все виды определений, используемые в математической теории. Приведем несколько примеров, пользуясь классификацией определений Д.П. Горского [3].

1. Явные и неявные определения. Явные определения – это те, в которых присутствует и определяемое (дифиниендум, definiendum – dfd),

и то, посредством чего определяют (дефиниенс, definiens – dfn), то есть символически это выражается так: $dfd = dfn$. Например, определение подстановки:

Подстановкой степени n называется биективное отображение множества M=1,2, ..., n на себя.

dfd : подстановка степени n, dfn : биективное отображение множества $M = 1, 2, \ldots, n$ на себя.

Под неявным определением понимается определение посредством аксиом (аксиоматические). В курсе алгебры они играют фундаментальную роль, это определения алгебраических структур: группы, кольца, поля, линейного пространства и т. д. В школьном курсе на низком уровне формализации можно отнести к этому типу определение объема простого тела:

Объем — это положительная величина, численное значение которой обладает свойствами:

1. *Равные тела имеют равные объемы.*
2. *Если тело разбито на части, являющиеся простыми телами, то объем тела равен сумме объемов его частей.*
3. *Объем куба, ребро которого равно единице длины, равен единице.*

Если это определение формализовать, то оно примет вид аксиоматического: $\mathbf{T}$ – множество простых тел, T_0 – куб с единичным ребром. Операцию разбиения тела T на простые части обозначим $T = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n$. Пусть задано отображение $v : \mathbf{T} \to R^+$, обладающее свойствами:

1. $v(T_0) = 1$;
2. $(\forall T_1, T_2 \in \mathbf{T})(T_1 = T_2 \Rightarrow v(T_1) = v(T_2))$;
3. $(\forall T_1, T_2 \in \mathbf{T})(v(T_1 \cup T_2) = v(T_1) \cup v(T_2)$.

Тогда значение $v(T)$ будем называть объемом тела T.

К неявным определениям отнесем и контекстуальные, то есть такие, значение вводимого термина в которых задается некоторым контекстом, на основе анализа которого может быть сформулировано определение в явном виде. К этому виду определений в школе можно отнести определение числовой последовательности. В алгебре контекстуально вводится, например, понятие классов смежности по идеалу:

> *Отношение сравнения по идеалу I в кольце является отношением эквивалентности, а значит, задает разбиение кольца на непересекающиеся классы эквивалентности. Эти классы эквивалентности называют классами вычетов по данному идеалу I или классами смежности по идеалу I.*

Чтобы выделить определение понятия из контекста, необходимо осуществить операции:

а) найти общие признаки объекта;

б) найти отличительные его признаки;

в) указать необходимые и достаточные признаки, по которым можно распознать объект.

2. Классификационные и генетические определения. Классификационные — это определения через род и видовое отличие. В школьном курсе они составляют большинство. Многие определения алгебры сформулированы в виде родо-видового определения. Например, аксиоматическое определение группы можно сформулировать так:

(*) Группа — это алгебра с обратимым и ассоциативным действием.

Понятие алгебры — родовое по отношению к группе. Видовыми отличиями выступают условия ассоциативности и обратимости действия этой алгебры, связаны они конъюнктивно.

Возможно другое определение группы:

(**) Группа — это полугруппа с обратимым действием.

Теперь родовым понятием группы выступает полугруппа. В зависимости от изложения теории можно пользоваться тем и другим определением.

Генетические определения — это определения, определяемые объекты которых строятся путем описания способа их образования, возникновения, построения. Их еще называют конструктивными. Они показывают, как из базовых объектов (по каким правилам) можно получить другие объекты определяемого понятия. В вузовском курсе к этому типу относится определение формулы алгебры высказываний:

Под формулой алгебры высказываний будем понимать:

1) *элементарные формулы A, B, C, …;*

2) *если X и У — формулы, то , (X)∧(У), (X)∨(У), (X)⟶(У), (X)⟷(У) тоже являются формулами;*

3) *только те выражения являются формулами алгебры высказываний, для которых это следует из 1) и 2).*

3. Особое положение в вузовском курсе занимают определения через абстракцию. Это определения множеств через установление между элементами этих множеств свойств эквивалентности. К этому виду определений относятся определения фактор-группы, фактор-кольца, классов вычетов по идеалу и пр.

4. Условные определения. Это такие определения, который имеют вид импликации, причем в антецеденте импликации обеспечивается существование и единственность определяемого понятия, а в консеквенте формулируется обычное определение (чаще родо-видовое). Например,

Если n — нейтральный элемент относительно действия $\circ$, заданного на множестве A, то симметричным элементу относительно этого действия называется такой элемент a', что $a' \circ a = a \circ a' = n$.

В логико-математический анализ определений включим общие действия по выделению и раскрытию структуры определения, а также действия по конструированию определений. Наметим наиболее важные действия логико-математического анализа определений вузовского курса алгебры.

1. Выделение термина, вводимого определением, указание согласовательных связок (слов), сопутствующих термину.

«Термин — слово или словосочетание, являющийся точным названием строго определенного понятия науки» [4, с. 518], то есть термин — это языковый носитель понятия. Часто термину сопутствуют образования, которые конкретизируют объекты понятия. Например, определение:

> Бинарное отношение ρ (БО), заданное на множестве A, называется симметричным, если выполняется условие: $(\forall a, b \in A)(a\rho b \Rightarrow b\rho a)$.

Термин — «симметричное бинарное отношение». Однако нет смысла говорить о свойстве симметричности бинарного отношения, если не известно, на каком множестве оно задано. Слова «заданное на множестве A» являются сопутствующими данному термину. Правда, иногда в математическом тексте они все-таки опускаются, но только в том случае, когда ясно, о каком согласовании идет речь. При формулировке же определения их опускать нельзя, поскольку нарушается условие конкретности определения.

2. Раскрытие содержательного и логического смысла каждого слова определения. Логический смысл несут логические связки («и», «или», «для всех» и т. п.), содержательный смысл слов раскрывается построением цепочки интерпретации терминов, фигурирующих в определении (элиминируемость). Так, к нашему определению симметричного бинарного отношения цепочки интерпретаций следующие: а) БО на $A \equiv$ подмножество декартова произведения $A^2 \equiv$ подмножество вида $\{(a, b), a, b \in A\} \equiv$ некоторое множество пар, оба компонента которых взяты из множества ; б) $(a, b) \in \rho \equiv a$ и b находятся в отношении ρ или можно иначе записать: $a\rho b, b \in \rho(a)$.

Цепочка интерпретаций может быть оборвана на каком-либо шаге, то есть действие построения цепочки интерпретаций носит субъективный характер. Производить его следует до осознания смысла употребляемого термина.

3. Раскрытие структуры определения и его запись с помощью математической символики. Это действие носит конструктивный характер. Этапы его выполнения:

1) В символической записи первоначально появится знак: $\Leftrightarrow$.

2) Затем появляется термин: (термин) $\Leftrightarrow$.

3) Результат выделения родового понятия найдет отражение в записи:

$$\underset{\text{род}}{(\forall x \in M)}\ \underset{\text{термин}}{A(x) \Leftrightarrow}.$$

4) Следующий этап записи:

$$\underset{\text{род}}{(\forall x \in M)}\ [\underset{\text{термин}}{A(x)} \Leftrightarrow \underset{\text{вид}}{B(x)]}.$$

4. Установление логической связи в видовом отличии. Когда определение записано с помощью математических символов, видовое отличие уже определено. Оно может иметь сложную структуру, могут быть логические связи различной природы. Например,

а) ($\forall\rho$ — БО на А) (ρ — рефлексивно) $\Leftrightarrow (\forall a \in A)((a,a) \in \rho)$

в видовом отличии одно условие с требованием всеобщности;

б) ($\forall\rho$ — БО на A) (ρ-эквивалентность) $\Leftrightarrow$ (ρ-рефлексивно) $\wedge$ (ρ-симметрично) $\wedge$ (ρ-транзитивно)

в видовом отличии три условия, связанные конъюнктивно;

в) $(\forall p \in K \setminus \{e\})$ (p-простой элемент) $\Leftrightarrow$ ($\forall d$-делитель)$(d \sim p) \vee (d \sim e)$

в видовом отличии два условия, связанные дизъюнктивно;

г) ($\forall\rho$ — БО на A)(ρ – симметрично) $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)((a,b) \Rightarrow (b,a) \in \rho)$

в видовом отличии два условия, связанные импликативно.

5. Вычленение «необходимой цепочки» и формулирование следствий. Имеется в виду запись и чтение определения в направлении «от термина». В примере симметричного бинарного отношения: [ρ – симметричное БО на A] $\Rightarrow$ [ρ – БО на A, то есть подмножество A^2] $\Rightarrow$ [$(\forall a, b \in A)((a,b) \in \rho \Rightarrow (b,a) \in \rho)$, то есть как только пара (a,b) лежит в отношении ρ, так сразу пара (b,a), полученная перестановкой элементов, лежит в этом отношении].

6. Вычленение «достаточной цепочки» (чтение определения «к термину») и формулирование общих действий подведения под определение. Деятельность, посредством которой доказывается, что определенный объект или отношение принадлежит соответственно множеству объектов или отношений, составляющих объем данного понятия, называется «подведением под понятие». Если объект требуется подвести под родо-видовое определение, то нужно установить: а) принадлежит ли он к роду, б) обладает ли он видовым отличием. И если только выполняется а) и б), то объект подведен под определение, принадлежит понятию.

7. При конструировании определения «противоположного понятию» имеется в виду отыскание необходимых и достаточных условий того, что объект не принадлежит понятию (по определению этого понятия). Если определение понятия записано так:

$$(\forall x \in M)[A(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} B(x)],$$

то определение «противоположного понятию» имеет структуру:

$$(\forall x \in M)[\overline{A(x)} \overset{def}{\Leftrightarrow} \overline{B(x)}].$$

Выполнение этого действия требует конструирования $\overline{B(x)}$ и формулировки утверждения в терминах «необходимо и достаточно». В нашем случае симметричного бинарного отношения:

$(\forall \rho$ – БО) (ρ – несимметричное на A) $\Leftrightarrow (\exists a)(\exists b)\overline{((a,b) \in \rho \Rightarrow (b,a) \in \rho)}$.

Заменим отрицание импликации. Формально это следующая процедура:

$$\overline{(P \to Q)} \Leftrightarrow \overline{(\overline{P} \vee Q)} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}.$$

Содержательно: неверно, что если P – истинно, то Q – истинно, то есть при P истинном возможно Q ложно (тот же вывод). Тогда:

$(\forall\rho$ – БО) (ρ – несимметричное на A) $\Leftrightarrow (\exists a)(\exists b)((a,b) \in \rho \wedge (b,a) \notin \rho)$.

8. Формулирование общих действий обоснования факта, что объект не принадлежит понятию (по определению). Выполняются действия подведения под определение «противоположного понятию». Для нашего примера для того, чтобы показать, что объект (БО) не является симметричным БО на A, нужно найти два таких элемента множества A, чтобы одна пара, составленная из них, принадлежала ρ, а другая – нет.

9. Переформулировка определения (если это возможно). Переформулировка определения возможна тогда, когда цепочка интерпретаций терминов и структура определения позволяет развернуть или свернуть определение. Чтобы проиллюстрировать сказанное, вернемся к определению группы (п. 2). При работе с определением (*), построив цепочку интерпретаций, нетрудно выделить алгебру с ассоциативной операцией, которая носит название полугруппы, тем самым выходим на другое определение, которое имеет вид (**). Переформулировка этого же определения может получиться раскрытием термина «обратимое действие», что развернет определение.

10. Раскрытие этимологии термина. Математические понятия отражают предметы и явления действительности, выделяют общие свойства предметов (явлений), то есть являются результатом абстракции. В то же время они отражают сущность реальных объектов. В этом предметная сторона понятий, она находит свое отражение в названии понятия — термине, его этимологии. Например, слово «симметрия» происходит от латинского symmetria и означает соразмерность, сходство, равномерность в расположении частей какого-либо целого.

11. Приведение иллюстративных примеров и контрпримеров. Этот шаг означает конкретизацию действий подведения под понятие и под определение противоположного понятия. Пример будем называть иллюстративным, если выбранный объект понятия не лежит в более узком понятии. На первых порах (когда более узкие понятия, возможно,

еще не изучались) к иллюстративным примерам можно относить примеры, подведение под определение которых неочевидно. Так, отношение равенства — симметричное отношение, но пример неиллюстративен, поскольку отношение равенства относится к более узкому понятию эквивалентности. Истинность импликации $a = b \Rightarrow b = a$ очевидна. Опять же понятие «очевидно» субъективно: один сразу видит справедливость условия, другой — нет. Возьмем бинарное отношение, заданное на некотором числовом множестве правилом: $(a, b) \in \rho \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0$. Тогда $(a, b) \in \rho \Rightarrow a^2+b^2 = 0 \Rightarrow a^2 = -b^2 \Rightarrow b^2 = -a^2 \Rightarrow b^2+a^2 = 0 \Rightarrow (b, a) \in \rho$. Значит, это симметричное БО. Цепочка этих рассуждений некоторыми студентами вполне может быть произведена «в уме», а потому справедливость видового отличия очевидна. Поэтому иллюстративный пример — это процесс подведения под понятие, содержащий более двух шагов. При этом под одним шагом будем понимать применение теоремы (определения). Под иллюстративным контрпримером будем понимать иллюстративный пример противоположного понятия. Это также означает, что если видовых отличий несколько, то пример иллюстративен, если он вскрывает специфику логической связи видовых отличий. Так, для нашего определения симметричного БО иллюстративен тот контрпример, который вскрывает специфику импликации. Подводим под определение противоположного понятия. Найдутся такие элементы, что посылка импликации истинна, а заключение ложно.

12. Иллюстрация понятий, вводимых определением, на чертежах, диаграммах, графиках и т. п. Так, симметричное отношение, как всякое бинарное отношение, заданное на конечном множестве, можно схематично изобразить с помощью графов. Например, граф симметричного бинарного отношения будет обладать следующей спецификой: все его ребра, соединяющие различные вершины, будут двусторонне ориентированы. Граф несимметричного бинарного отношения будет иметь хотя бы одно ребро, ориентированное только в одном направлении.

Следующий вид математических предложений курса алгебры — теоремы. Логико-математический анализ теоремы сводится к выделению структуры теоремы, установлению вида теоремы и выяснению специфики доказательства.

Теоремы. Термин «теорема» происходит от греческого theorema, что означает «положение или утверждение, устанавливаемое при помощи доказательства, основывающегося или на аксиомах, или на доказанных положениях» [4, с. 516]. Теоремы могут быть различных видов. Наиболее распространены три вида [5].

1. Теоремы, сводимые к импликативной форме. Это теоремы, которые имеют разъяснительную часть, условие и заключение. Они, как правило, формулируются с помощью связки «если ..., то...». Схематично они могут быть представлены в виде

$$\begin{array}{ccccc} (\forall x \in M) & [A(x) & \Rightarrow & \mathrm{B(x)}] & \\ \text{разъяснительная} & \text{условие} & & \text{заключение} & . \\ \text{часть} & \text{(предикат)} & & \text{(предикат)} & \end{array} \qquad (1)$$

Например, теорему «Если две системы векторов линейного пространства эквивалентны, то их линейные оболочки равны» можно записать, используя математическую символику, следующим образом:

$$(\forall (a), (b) - \text{системы векторов})\ ((a) \sim (b) \Rightarrow L(a) = L(b)).$$

Условие таких теорем может начинаться словом «пусть», а переход к заключению осуществляется посредством слова «тогда». К этому же виду теорем отнесем теоремы, в которых явно не выделено условие и заключение (категорическая форма теоремы), то есть они имеют вид связного предложения. Так, приведенная теорема в категорической форме имеет вид: «Эквивалентные системы векторов линейного пространства имеют равные линейные оболочки».

С теоремами, сводимыми к импликативным, связаны понятия обратного, противоположного и обратного противоположному утверждений [3; 5; 6]. Построение утверждения, обратного данной теореме, вызывает трудности, особенно если теорема сформулирована в категорической форме (это будет смысловое содержание утверждения), но представляя его символически (в виде схемы (1)), необходимо рассматривать и схематичную запись прямой теоремы.

2. Теоремы существования — особый вид теорем [5, с. 67], они используют высказывания, в которых утверждается, что найдется некоторый объект («существует», «хотя бы один» и т. п.), обладающий определенным свойством. Общая их структура такова:

$$(\forall y)(\exists x)A(x,y). \tag{2}$$

Эти теоремы играют большую роль: в математике стремятся говорить об объекте, если известно его наличие. Поэтому формулировки определений должны всегда сопровождаться обоснованием корректности, которая требует показать, что объем понятия не пуст. Это можно делать, обратившись к теоремам существования. Правда, для конструктивных определений в этом нет необходимости. Их видовое отличие дает способ построения определяемого объекта. Благодаря теоремам существования математические теории выражают свой содержательный смысл.

Доказательства теорем существования иногда содержат в себе способ отыскания объектов, наличие которых утверждается данными теоремами, что дает возможность применения их на практике. Так, в теории евклидовых пространств имеется теорема:

В любом евклидовом n-мерном пространстве существует ортогональный базис.

Формулировка теоремы содержит только факт наличия в E_n ортогонального базиса. Доказательство же основано на конструировании этого базиса последовательным выполнением шагов:

1) Пусть $a_1, a_2, ..., a_n$ – базис E_n;

2) $e_1 = a_1$;

3) $e_2 = a_2 + \lambda e_1$, где $\lambda = -\dfrac{(e_1, a)}{(e_1, e_1)}$;

...

n) $e_n = a_n + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_{n-1} e_{n-1}, \lambda_i = -\dfrac{(e_i, a_n)}{(e_i, e_i)}$.

В доказательстве обосновывается, что полученная система векторов $e_1, e_2, ...e_n$ — ортогональная. На практике это доказательство используется для построения ортогональных систем векторов (соответствующий процесс называют процессом ортогонализации системы).

3. В алгебре, а также школьном курсе математики есть множество теорем, которые не относятся ни к теоремам существования, ни к теоремам, приводимым к импликативной форме (условие и заключение выделить затруднительно). Например, такие:

1) $(\forall a, b \in R)((a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2)$ (курс средней школы);

2) $(\forall a \in V)(0 \cdot a = \mathbf{0})$ (тема «Линейные пространства»).

Такие теоремы имеют форму

$$(\forall x, y \in M)A(x, y), \tag{3}$$

где A — некоторый предикат. Их называют «теоремы-формулы».

В логико-математический анализ теорем включаем следующие действия.

1. Запись теоремы с помощью математической символики в виде конкретной схемы. Запись может оказаться одной из трех видов, согласно схемам (1), (2), (3). Например:

$$(\forall a, b, c \in K)(a \equiv c(modI) \wedge b \equiv d(modI) \Rightarrow ab \equiv cd(modI)); \tag{А}$$

$$(\forall f, g \neq 0 \in P[x])(\exists q, r \in P[x])$$
$$(f = gq + r \wedge (\deg r < \deg g \vee r = 0)); \tag{Б}$$

$$(\forall a \in G)((ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}). \tag{В}$$

2. Выполнение действий, адекватных виду теоремы согласно ее структуре. По первому виду теорем это следующие:

1а) Переформулировка теоремы (из импликативной в категорическую и наоборот, если возможно). Так, теорема (А) словесно формулируется следующим образом:

Сравнения по идеалу I кольца K можно почленно перемножать.

1б) Анализ структуры условия и заключения, конструирование выводов из этого анализа. Например, условие теоремы (А) содержит конъюнктивную логическую связь, а значит, вывод будет таков: выполнение теоремы возможно тогда и только тогда, когда составные части конъюнкции справедливы, то есть имеет место два сравнения по одному идеалу кольца. Заключение имеет вид одного предложения о справедливости сравнения $ab \equiv cd(modI)$.

1в) Получение обратного утверждения, установление его истинности (если это возможно). Для теоремы (А) обратное:

$$(\forall a, b, c \in K)(ab \equiv cd(modI) \Rightarrow a \equiv c(modI) \wedge b \equiv d(modI)).$$

Это ложное утверждение. Действительно, в кольце целых чисел по идеалу (5) имеем: $5 \cdot 4 \equiv 2 \cdot 5(mod5)$, но $5 \not\equiv 2(mod(5))$ и $4 \not\equiv 5(mod(5))$. Так что теорема не является признаком.

1г) Получение «контрапозитивной» теоремы, то есть теоремы, обратной противоположному утверждению. Поскольку контрапозитивная теорема верна и равносильна прямой, то ее имеет смысл рассматривать как иную формулировку того же самого содержательного факта.

Действия, адекватные структуре теоремы существования, будут следующие:

2а) Вычленение из доказательства шагов конструирования объекта, о существовании которого идет речь в теореме (например, процесс ортогонализации).

2б) Приведение примера объекта, удовлетворяющего теореме (если это возможно).

2в) Выяснение значимости теоремы (определению какого понятия сопутствует, то есть корректность какого определения обосновывает, и т. п.).

3а) Теоремы-формулы вида (3) — специфические, эта особенность обусловлена тем отношением, которое связывает термы предиката теоремы. Например, равенство в теореме (В) можно «читать» как слева направо, так и справа налево, однако переставлять местами сомножители, вообще говоря, нельзя.

3. Формулирование общих действий подведения под теорему. Действия подведения под теорему отличаются в зависимости от вида теоремы.

1) Если теорема сводима к импликативной, то есть она имеет разъяснительную часть, условие и заключение, то выполняются последовательно следующие действия:

а) устанавливается, что объект, подводимый под теорему, лежит во множестве, описанном разъяснительной частью;

б) проверяется, что условие теоремы при замене переменной на данный объект обращается в истинное высказывание;

в) выполняется умозаключение, то есть формулируется конкретизация заключения теоремы для данного объекта.

2) Если теорема есть теорема существования, то процесс подведения объекта под нее может носить как обобщенный смысл, так и конкретный. В конкретном смысле подведение под теорему существования есть реализация алгоритма. В обобщенном смысле это умозаключение о факте существования определенного предмета, связанного с данным объектом.

Например, для теоремы существования ортогонального базиса евклидова пространства обобщенное подведение под теорему следующее:

Если E_3 — евклидово трехмерное пространство, тогда в нем существует ортогональный базис e_1, e_2, e_3.

Конкретное подведение — реализация алгоритма процесса ортогонализации.

3) Если теорема третьего вида, то подведение под эту теорему означает запись предиката $A(a, b)$ конкретизацией термов, в него входящих. Например, подведем под теорему (В) решение матричного уравнения $AXB = E$. Получаем $X = A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1}$.

4. Структурирование доказательства теоремы. Имеется в виду выделение общего метода доказательства, идеи, связи идеи доказательства

со структурой теоремы. Например, структура теорем существования, как уже было сказано, позволяет использовать конструктивное доказательство или доказательство от противного. Структура доказательств теорем третьего вида зависит от свойств отношения, которым связаны термы в формуле. Как правило, структурирование их сводится к отысканию тех опорных предложений, «синтез» которых дает утверждение теоремы.

Алгоритмы. В курсе алгебры имеется большое количество алгоритмов (алгоритм Евклида нахождения НОД полиномов, схема Горнера, процесс ортогонализации и пр.), кроме того, при применении теории к решению задач на практике возможно выделение алгоритмических предписаний по решению какого-либо типа задач (исследование на линейную зависимость системы векторов, решение алгебраических уравнений и т. п.). В логико-математический анализ алгоритмов включим действия:

1) Вычленение шагов конкретного алгоритма, то есть такой последовательности операций и логических действий, которая обладала бы свойствами элементарности, дискретности и детерминированности шагов.

2) Проверка наличия у алгоритма свойства массовости, то есть очерчивание круга задач, которые могут быть решены с помощью данного алгоритма.

3) Исследование результативности алгоритма, то есть математическое обоснование того, что точное выполнение шагов алгоритма при решении задач данного круга всегда (через конечное число шагов) приведет к правильному результату.

Логико-математический анализ определений, теорем, алгоритмов, с одной стороны, есть процесс «извлечения» информации о конкретном знании, а с другой — средство получения методологических знаний об определениях, теоремах, алгоритмах. Процесс его выполнения, по сути, является «разбиением» знания на составляющие части с последующим осмысленным «соединением» этих частей.

Выполнение студентами логико-математического анализа курса алгебры способствует изучению теоретического материала, поскольку осуществляемые действия отвечают принципам научного познания.

1. Принципу соответствия, который заключается в том, что все новое возникает из ранее известного и развивается на его основе, что определяет путь от неполного знания к полному. Если исходить из ситуации обладания студентом методологическими знаниями при изучении предметных знаний, то новые фактологические знания будут познаваться в соответствии с методологическими. Обработка предметных знаний будет направлена на структурирование как отдельных их компонентов, так и теории в целом. При упорядочивании, например, знания определения понятия согласно методологическим знаниям вскрывается структура предложения, выявляются существенные признаки понятия и логические связи между ними, применяются известные знания специфики присутствующей логической связи и знания о математических понятиях, что приводит в действие математическое мышление. Таким образом, при введении попутно методологических знаний, математических знаний о конкретных понятиях, логических знаний посредством выполнения логико-математического анализа определения новое понятие познается более осознанно.

2. Принципу комплементарности, который заключается в том, что методологические знания, используемые при осуществлении логико-математического анализа, и предметные знания дополняют друг друга, а те, в свою очередь, наполняют первые содержательно. В процессе изучения предметных знаний студент овладевает методологическими, в этом их дополнительность.

3. Принципу неопределенности, означающему, что в каждый момент учебного процесса его состояние характеризуется неопределенностью, состояние постоянно изменяется. Управление этим процессом изменения в сторону достижения цели характеризуется использованием рациональных приемов познавательной деятельности по изучению предметных теоретических знаний. Например, при изучении теоремы ра-

циональными приемами по ее изучению будут: установление условия и заключения, выявление особенностей структуры условия и заключения, разбиение предложения на составные части (если это возможно) согласно имеющейся специфике структуры, получение правил по применению теоремы, конструирование обратного утверждения, структурирование доказательства (выявление метода, способов) и т. д. Выполнение этих приемов способствует пониманию теоремы.

4. Принципу причинности применительно к процессу обучения, который утверждает, что акты обучающего действия носят причинно-следственный характер. Согласно этому принципу познавательная деятельность студентов обосновывается возникающими потребностями и мотивами. Имеющиеся методологические знания о том, как должны быть упорядочены осознанные знания, формируют учебно-познавательные потребности.

5. Принцип простоты заключается в том, что переход от менее сложного к более сложному материалу должен достигаться более простыми, естественными способами. Упорядочение предметных знаний согласно методологическим представлениям о них соответствует разбиению сложного на простые, более понятные составляющие. Восхождение затем от них к целостному знанию — простой и естественный путь.

Выполнение действий логико-математического содержания вузовского курса алгебры способствует выделению структуры теоретических знаний, содержательно вскрывает методологию математики, а процессуально — методологию научения.

Список литературы

1. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учебное пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. институтов / Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др.; Под ред. Е.И. Лященко. М.: Просвещение, 1988. 223 с.

2. **Мордкович А. Г.** О профессионально-педагогической направленности математической подготовки будущих учителей // *Математика в школе. 1984. № 6. С. 42–45.*

3. **Горский Д. П.** Определение. М.: Мысль, 1974. 310 с.

4. **Кондаков Н. И.** Логический словарь. М.: Наука, 1971. 637 с.

5. **Болтянский В. Г.** Как устроена теорема? // Математика в школе. 1973. № 1. С. 41–50.

6. **Градштейн И. С.** Прямая и обратная теоремы. М.: Наука, 1973. 128 с.

Summary

Sotnikova O. A. Teaching logical and mathematical analysis based on higher algebra material to future math teachers

The ability to perform logical and mathematical analysis of math instruction material is considered to be one of the key methodological competences for a math teacher. Traditionally, the issue has been dealt with in the course of methods-of-teaching subjects. However, the author follows the principle of vocational and pedagogic focus of education and substantiates the reasonability and feasibility of dealing with the issue when studying higher algebra. The article provides the list of activities in order to perform logical and mathematical analysis of algebra instruction material.
Keywords: Math teacher training at university, logical and mathematical analysis, methodological skills.

References

1. **Lyachenko E. I., Zobkova K. V., Kirichenko T. F. I dr.** *Labaratornye i prakticheskie raboty po metodike prepodavania matematike: Uchebnoe posobie dla studentov fiz.-mat. spez. ped. Insnitutov*

(Laboratory and practical work on the methods of teaching mathematics: A manual for students of Phys.-Mat. specialist. ped. institutions), Pod ped. E.I. Lyachenko, M.: Prosvyachenie, 1988, 223 p.

2. **Mordkovich A. G.** O professionalno-pedagogicheskoy napravlennosti matematicheskoy podgotovki budushix uchiteley (On the professional and pedagogical orientation of the mathematical preparation of future teachers), *Matematika v shkole*, 1984, № 6, pp. 42–45.

3. **Gorskiy D. P.** *Opredelenie* (Definition), M.: Mysl, 1974, 310 p.

4. **Kondakov N. I.** Logicheskiy slovar (Logical dictionary), M.: Nauka, 1971, 637 p.

5. **Boltyanskiy V.G.** Kak ustroena teorema? (How does the theorem work?), *Matematika v shkole*, 1973, № 1, pp. 41–50.

6. **Gradshteyn I. S.** *Pryamaya i obratnaya teoremy* (Direct and inverse theorems), M.: Nauka, 1973, 128 p.

Для цитирования: Сотникова О. А. Обучение логико-математическому анализу на материале высшей алгебры будущих учителей математики // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 1 (30). С. 92–112.*

For citation: Sotnikova O. A. Teaching logical and mathematical analysis based on higher algebra material to future math teachers, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, 1 (30), pp. 92–112.

СГУ им. Питирима Сорокина
Поступила 18.06.2019