

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЕННЫХ АРОК ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ШАРНИРНОГО ОПИРАНИЯ

А. В. Михайлов, В. Н. Тарасов

В работе решается задача устойчивости упругой системы при наличии односторонних ограничений на перемещения. Проблемы устойчивости круговых арок, находящихся под действием равномерного давления ранее были рассмотрены в работах Е.Л. Николаи, А.Н. Динника и других авторов. В данной работе рассматриваются проблемы устойчивости круговых арок, подкреплённых нерастяжимыми нитями, которые не выдерживают сжимающих усилий, при граничных условиях шарнирного опирания. Оба конца нити прикреплены к оси арки, так, что расстояние между точками прикрепления в результате деформации не может увеличиться. Данная задача сводится к нахождению и исследованию точек бифуркации решений некоторой задачи нелинейного программирования.

Ключевые слова: арка, устойчивость, подкрепление нитями, шарнирное опирание, сплайн, вариационная задача, односторонние ограничения.

Постановка задачи

Пусть ось арки в недеформированном состоянии является дугой круга радиуса R , центр этого круга обозначим через O . Арка находится под действием равномерно распределённого давления P .

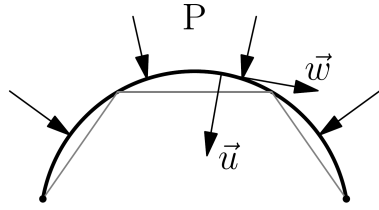


Рис. 1. Схема подкрепления арки

Центральный угол, соответствующий дуге арки, обозначим через ϑ , $0 \leq \vartheta \leq \alpha$. Центром арки O является центр окружности, дугой которой она является. Уравнения недеформированной оси арки имеют вид

$$\begin{cases} x = R \cos(\vartheta), \\ y = R \sin(\vartheta). \end{cases} \quad \vartheta \in [0, \alpha]$$

Обозначим через $\xi = (-\cos(\vartheta), -\sin(\vartheta))$ — нормаль, $\eta = (-\sin(\vartheta), \cos(\vartheta))$ — касательный вектор. Перемещение точек арки в результате плоской деформации описываются уравнением:

$$W = u(\vartheta)\xi + w(\vartheta)\eta. \quad (1)$$

Здесь под u принимается нормальное перемещение точек арки, а под w — тангенциальное перемещение точек арки (рис. 1).

Тогда декартовы координаты деформированной арки описываются уравнениями

$$\begin{cases} x = (R - u) \cos(\vartheta) - w \sin(\vartheta), \\ y = (R - u) \sin(\vartheta) + w \cos(\vartheta). \end{cases}$$

Обозначим после деформации нормальный и касательный векторы к упругой линии через ξ_* , η_* . Векторы ξ , η могут быть переведены в векторы ξ_* , η_* путем поворота на угол β .

Предполагая, что перемещения являются малыми, можно записать [1; 2]

$$\beta = \frac{1}{R} \left(\frac{du}{d\vartheta} + w \right), \quad (2)$$

а изменение кривизны дуги арки определяется формулой

$$\delta q = \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + \frac{dw}{d\vartheta} \right).$$

Кроме того, выполнено условие несжимаемости:

$$u = w'. \quad (3)$$

Энергия упругой деформации арки с учетом условия несжимаемости в квадратичном приближении определяется формулой:

$$U = \frac{B}{2R^3} \int_0^\alpha \delta q^2 d\vartheta = \frac{B}{2R^3} \int_0^\alpha \left(\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u \right)^2 d\vartheta, \quad (4)$$

а работа внешних сил может быть вычислена по формуле:

$$V = \frac{P}{2} \int_0^\alpha \left(u'^2 - k u^2 \right) d\vartheta, \quad (5)$$

где параметр k отвечает за направление действующей нагрузки: $k = 1$ — давление P всегда направлено по нормали к деформированной оси арки (силы нормального давления), $k = 2$ — давление P направлено к неподвижному центру окружности O (центральные силы).

Предположим, что арка подкреплена абсолютно жесткими растяжками (нитьями), число которых обозначим через M . Один конец каждой растяжки прикреплен к точке арки, соответствующей углу $\vartheta = \varepsilon_{1j}$, а второй — $\vartheta = \varepsilon_{2j}$, $j \in 1 : M$. Перемещения точек арки в точках прикрепления нитей обозначим через

$$u_{ij} = u(\varepsilon_{ij}), \quad w_{ij} = w(\varepsilon_{ij}), \quad i = 1, 2, \quad j \in 1 : M.$$

Предполагается, что нити не выдерживают сжимающих усилий и расстояние между точками прикрепления нити не может увеличиваться. Расстояние между точками прикрепления j -й нити определяется формулой

$$\rho(u_{1j}, u_{2j}, w_{1j}, w_{2j}) = \sqrt{(x_{1j} - x_{2j})^2 + (y_{1j} - y_{2j})^2}, \quad (6)$$

где

$$\begin{cases} x_{ij} = (R - u_{ij}) \cos(\varepsilon_{ij}) - w_{ij} \sin(\varepsilon_{ij}), \\ y_{ij} = (R - u_{ij}) \sin(\varepsilon_{ij}) + w_{ij} \cos(\varepsilon_{ij}), \quad i = 1, 2, j \in 1..M. \end{cases}$$

Изменение расстояния между точками прикрепления нити равно:

$$\rho_j^* = \rho(u_{1j}, u_{2j}, w_{1j}, w_{2j}) - \rho_0,$$

где $\alpha_j = \varepsilon_{2j} - \varepsilon_{1j}$, $\rho_0 = \rho(0, 0, 0, 0) = 2R \sin\left(\frac{\alpha_j}{2}\right)$.

Используя разложение в ряд Тейлора с точностью до членов второго порядка малости, получаем

$$\delta\rho = \frac{1}{\rho_0}(u_{1j}(\cos \alpha_j - 1) + u_{2j}(\cos \alpha_j - 1) - w_{1j} \sin \alpha_j + w_{2j} \sin \alpha_j). \quad (7)$$

Задача устойчивости арки при условии, что расстояние между точками прикрепления нити не может увеличиваться, формулируется следующим образом: найти минимальное значение нагрузки P , при которой вариационная задача

$$J = U - V = \frac{B}{2R^3} \int_0^\alpha \left(\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u \right)^2 d\vartheta - \frac{P}{2} \int_0^\alpha \left(u'^2 - ku^2 \right) d\vartheta \rightarrow \min_u \quad (8)$$

при ограничениях

$$(u_{1j}(\cos \alpha_j - 1) + u_{2j}(\cos \alpha_j - 1) - w_{1j} \sin \alpha_j + w_{2j} \sin \alpha_j) \leq 0, \quad j \in 1 : M \quad (9)$$

имеет нетривиальное решение.

Для определенности предположим, что выполнены граничные условия шарнирного опирания:

$$u = 0, \quad w = 0, \quad \beta' = \frac{d\beta}{d\vartheta} = 0 \quad \text{при} \quad \vartheta = 0, \alpha. \quad (10)$$

Численный метод

Для определения перемещений используем аппроксимацию интерполяционными кубическими сплайнами вида [3]:

$$S(z, \vartheta) = z_i(1-t)^2(1+2t) + z_{i+1}t^2(3-2t) + m_i ht(1-t)^2 - m_{i+1} ht^2(1-t), \quad (11)$$

где

$$m_i = S'(z, \vartheta_i), \quad i = 0, \dots, N,$$

$$h = \vartheta_{i+1} - \vartheta_i, \quad t = (\vartheta - \vartheta_i)/h,$$

$$z_i^1 = u_i, \quad - \text{если аппроксимируется прогиб } u,$$

$$z_i^2 = w_i, \quad - \text{если интерполируется функция } w.$$

Условие непрерывности второй производной записывается в виде [3]:

$$2m_0 + \mu_0^* m_1 = c_0^*,$$

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = c_i \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (12)$$

$$\lambda_N^* m_{N-1} + 2m_N = c_N^*,$$

причем

$$c_i = 3 \left(\mu_i \frac{z_{i+1} - z_i}{h} + \lambda_i \frac{z_i - z_{i-1}}{h} \right),$$

$$\mu_i = \lambda_i = 0,5.$$

Здесь для граничных условий шарнирного опирания

$$\mu_0^* = \lambda_N^* = 1, \quad c_0^* = 3 \frac{z_1}{h}, \quad c_N^* = -3 \frac{z_{N-1}}{h}.$$

Выпишем матрицы коэффициентов для уравнений (12):

$$C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3.5 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 3.5 \end{pmatrix},$$

$$M = \frac{3}{2h} \begin{pmatrix} -0.5 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Вычислим вектор $m = (m_1, m_2, \dots, m_N)^T$:

$$m = C^{-1}Mz^1.$$

Стоит отметить, что для функции w матрицы вычисляются исходя из граничных условий жесткой заделки:

$$C_w = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$M_w = \frac{3}{2h} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

так как нетрудно показать, что из граничных условий (10) и условия несжимаемости (3) следует:

$$u = 0, \quad u'' = 0,$$

$$w = 0, \quad w' = 0$$

$$\text{при } \vartheta \in (0, \alpha).$$

Для того чтобы учесть условие несжимаемости (3), введем штрафную функцию:

$$F = \frac{D}{2} \int_0^\alpha (u - w')^2 d\vartheta,$$

где D – достаточно большое число, которое определяется опытным путем в численных экспериментах.

Принимая во внимание последнее, функционал (8) следует записать в виде:

$$J = \frac{B}{2R^3} \int_0^\alpha \left(\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u \right)^2 d\vartheta - \frac{P}{2} \int_0^\alpha \left(u'^2 - ku^2 \right) d\vartheta + \frac{D}{2} \int_0^\alpha \left(u - w' \right)^2 d\vartheta. \quad (13)$$

После подстановки (11) в (13), получаем две квадратичные формы:

$$g = \frac{B}{2R^3} \int_0^\alpha \left(\frac{d^2S}{d\vartheta^2} + S \right)^2 d\vartheta + \frac{D}{2} \int_0^\alpha \left(S - \tilde{S}' \right)^2 d\vartheta = \frac{1}{2}(Gz, z),$$

$$q = \frac{P}{2} \int_0^\alpha \left(S'^2 - kS^2 \right) d\vartheta = \frac{1}{2}(Qz, z).$$

Для вычисления коэффициентов квадратичных форм необходимо вычислить следующие интегралы:

1. Интеграл от квадрата сплайна:

$$\int_0^\alpha S^2(t) dt = h \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{11}{105} z_i m_i h - \frac{13}{210} z_i m_{i+1} h + \frac{13}{210} m_i h z_{i+1} - \frac{1}{70} m_i h^2 m_{i+1} - \right. \\ \left. - \frac{11}{105} z_{i+1} m_{i+1} h + \frac{13}{35} z_i^2 + \frac{1}{105} m_i^2 h^2 + \frac{9}{35} z_i z_{i+1} + \frac{13}{35} z_{i+1}^2 + \frac{1}{105} m_{i+1}^2 h^2 \right).$$

2. Интеграл от квадрата первой производной:

$$\int_0^\alpha S'^2(t) dt = \frac{1}{5h} \sum_{i=0}^{N-1} \left(z_i m_i h + z_i m_{i+1} h - m_i h z_{i+1} - \frac{1}{3} m_i h^2 m_{i+1} - \right. \\ \left. - z_{i+1} m_{i+1} h + 6z_i^2 + \frac{2}{3} m_i^2 h^2 - 12z_i z_{i+1} + 6 \cdot z_{i+1}^2 + \frac{2}{3} m_{i+1}^2 h^2 \right).$$

3. Интеграл от квадрата второй производной:

$$\int_0^\alpha S''^2(t) dt = \frac{1}{h^3} \sum_{i=0}^{N-1} \left(12z_i^2 + 12z_i m_{i+1} h - 24z_i z_{i+1} + 12z_i m_i h - \right. \\ \left. - 12z_{i+1} m_{i+1} h + 4m_i h^2 m_{i+1} + 4m_{i+1}^2 h^2 + 12z_{i+1}^2 - 12m_i h z_{i+1} + \right. \\ \left. + 4m_i^2 h^2 \right).$$

4. Интеграл от произведения второй производной и сплайна:

$$\int_0^\alpha S''(t) \cdot \tilde{S}(t) dt = \frac{1}{10} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\tilde{f}_{i+1} m_i h - \tilde{m}_i h z_{i+1} - \tilde{f}_i m_i h + \tilde{m}_i h z_i - \right. \\ \left. - \tilde{m}_{i+1} h z_i - \tilde{f}_{i+1} m_{i+1} h + \tilde{f}_i m_{i+1} h + \frac{1}{6} \tilde{m}_i h^2 m_{i+1} + \tilde{m}_{i+1} h z_{i+1} - \right. \\ \left. - \frac{1}{6} \tilde{m}_{i+1} h^2 m_i + 5 \tilde{f}_{i+1} z_i + 5 \tilde{f}_{i+1} z_{i+1} - 5 \tilde{f}_i z_i - 5 \tilde{f}_i z_{i+1} \right).$$

Введем вектор $z = (z^1, z^2)$.

Приходим к конечномерной задаче оптимизации:

$$g(\varphi) = \frac{1}{2}(Gz, z) \rightarrow \min_{\varphi} \quad (14)$$

$$q(\varphi) = \frac{1}{2}(Qz, z) = 1, \quad (15)$$

$$(a_j, z) \leq 0, \quad j \in 1..M. \quad (16)$$

Квадратичные формы $g(z)$ и $q(z)$ положительно определены, если $\alpha < \pi$.

Обозначим через Γ конус, определяемый неравенствами (16).

Пусть z_* — решение задачи (14)–(16). Тогда по теореме Куна – Таккера найдутся множители Лагранжа λ_* и τ_j , $\tau_j \geq 0$, $j \in 1..M$, такие, что

$$\begin{cases} Gz_* - \lambda_* Qz_* + \sum_{j=1}^M \tau_j a_j = 0, \\ \tau_j (a_j, z) = 0, \quad j \in 1..M + 2. \end{cases} \quad (17)$$

У системы уравнений (17) есть необходимые условия экстремума, но так как задача (14)–(16) не является выпуклой, то эти условия не являются достаточными. Точки z_* , удовлетворяющие (17), будем называть стационарными.

Для решения задачи (17) необходимо применять методы глобальной оптимизации, например метод ветвей и границ [4; 5], число переменных может быть велико, а в данном случае трудоемкость метода ветвей и границ определяется размерностью задачи.

Сформулируем метод последовательных приближений для поиска стационарных точек.

Пусть $z_0 \in \Gamma$, $q(z_0) = 1$ – начальное приближение. Пусть уже получена точка $z_k \in \Gamma$, $q(z_k) = 1$, и число λ_k . Введем в рассмотрение множество

$$\Omega_k = \left\{ z \in \Gamma : \left(\frac{\partial q(z_k)}{\partial z}, z - z_k \right) = 0 \right\}.$$

Пусть ψ_{k+1} – есть решение задачи минимизации

$$g(\psi_{k+1}) = \min_{\varphi \in \Omega_k} g(z). \quad (18)$$

Тогда $z_{k+1} = \frac{1}{s_{k+1}} \psi_{k+1}$, где $s_{k+1} = \sqrt{g(\psi_{k+1})}$.

В точке ψ_{k+1} выполнены условия теоремы Куна – Таккера:

$$\begin{cases} G\psi_{k+1} - \lambda_{k+1}Qz_k + \sum_{j=1}^M \tilde{\tau}_j a_j = 0, \\ \tilde{\tau}_j(a_j, \psi_{k+1}) = 0, \quad j \in 1..M + 2. \end{cases} \quad (19)$$

Задача (18) является задачей выпуклого квадратичного программирования и может быть решена за конечное число шагов (подобно задачам линейного программирования).

Можно показать, что любая предельная точка последовательности z_k является стационарной [6], то есть если $z_{k_i} \rightarrow z_*$, то и $\lambda_{k_i} \rightarrow \lambda_*$, и z_* удовлетворяет условиям теоремы Куна – Таккера и при этом последовательность λ_k монотонно убывает.

Введем функцию

$$f(z) = g(z) - \lambda_* q(z) = \frac{1}{2}(\tilde{Q}z, z),$$

где $\tilde{Q} = G - \lambda_* Q$. Если матрица \tilde{Q} окажется условно положительно определенной на конусе Γ , то z_* –решение задачи (14)–(16).

Результаты расчетов. В таблице представлены значения критического давления $\frac{PR^3}{B}$ в зависимости от числа растяжек для граничных условий шарнирного опирания при $\alpha = \pi$, $k = 1$ (нормальная нагрузка), $k = 2$ (центральные силы).

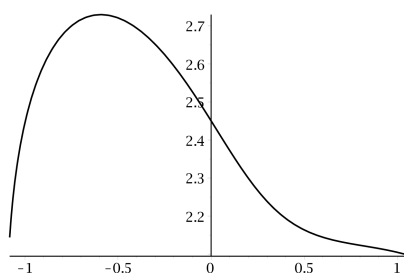


Рис. 2. Форма равновесия неподкрепленной арки, находящейся под действием нормальной нагрузки

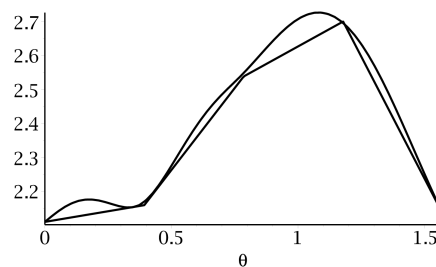


Рис. 3. Форма равновесия арки, находящейся под действием нормальной нагрузки, подкрепленной четырьмя нерастяжимыми нитями после потери устойчивости

Таблица

Значения критического давления

| M | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 0 |
|----------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\alpha = \pi, k = 1$ | 5.53 | 6.72 | 6.62 | 9.78 | 10.47 | 12.37 | 3.00 |
| $\alpha = \pi, k = 2$ | 7.75 | 9.64 | 9.53 | 10.34 | 15.31 | 18.01 | 4.50 |
| $\alpha = \frac{2\pi}{3}, k = 1$ | 14.43 | 17.94 | 17.66 | 24.20 | 25.38 | 28.00 | 8.00 |
| $\alpha = \frac{2\pi}{3}, k = 2$ | 16.14 | 19.92 | 27.43 | 28.80 | 30.47 | 32.46 | 9.20 |
| $\alpha = \pi/2, k = 1$ | 26.87 | 33.6 | 33.16 | 44.51 | 46.44 | 51.74 | 15.02 |
| $\alpha = \pi/2, k = 2$ | 28.47 | 35.74 | 35.26 | 47.48 | 49.57 | 55.23 | 16.16 |

Результаты вычислений для неподкрепленных арок ($M=0$) с точностью до 3 знаков совпадают с результатами, полученными в [2].

На графиках представлены формы равновесия арок, соответствующие минимальным критическим силам, полученные при следующих параметрах: $\alpha = \frac{\pi}{2}, b = 2, M = 0$ (для рис. 2) и $M = 4$ (для рис. 3).

Список литературы

1. **Николай Е. Л.** Труды по механике. М.: Изд-во технико-технической литературы, 1955. 584 с.
2. **Динник А. Н.** Устойчивость арок М.: Гостехиздат, 1946. 128 с.
3. **Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. С. 96–101.
4. **Тарасов В. Н.** Методы оптимизации в исследовании конструктивно-нелинейных задач механики упругих систем. Сыктывкар, 2013. 238 с.
5. **Сухарев А. Г.** Глобальный экстремум и методы его отыскания // *Математические методы в исследовании операций*. М.: Изд-во МГУ, 1983. 193 с.
6. **Тарасов В. Н.** Об устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения // *Труды института математики и механики. Российская академия наук. Уральское отделение. Том 11, № 1, 2005*. С. 177–188.
7. **Феодосьев В. И.** Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1967. 376 с.

Summary

Mikhailov A. V., Tarasov V. N. The stability of the reinforced arches under the boundary conditions of the hinged support

The paper solves problem of stability of elastic systems in the presence of one-sided constraints on displacement. The stability problems of circular arches under uniform pressure were previously discussed in the works of E. L. Nikolai, A. N. Dinnik and other authors. This paper discusses the stability problems of circular arches, supported by inextensible threads that

do not withstand the compressive forces under the boundary conditions of hinged support. Both ends of the thread are attached to the axis of the arch, so that the distance between the points of attachment as a result of the deformation cannot increase. This problem is reduced to finding and studying the bifurcation points of solutions of a certain nonlinear programming problem.

Keywords: arch, stability, support by threads, hinged edge, spline, variational problem, one-sided constraints.

References

1. **Nikolai E. L.** *Trudy po mekhanike* (Works on mechanics), M.: Izd. tekhniko-tekhnicheskoy literatury, 1955, 584 p.
2. **Dinnik A. N.** *Ustoychivost' arok* (The stability of the arches), M.: Gostekhizdat, 1946, 128 p.
3. **Zav'yalov Y. S., Kvasov B. I., Miroshnichenko V. L.** *Metody splayn-funktsiy* (Methods of spline functions), M.: Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1980, pp. 96–101.
4. **Tarasov V. N.** *Metody optimisatsii konstruktivno-nelineinnykh zadach mekhaniki uprugikh system* (Optimization methods in the study of structurally non-linear problems of the mechanics of elastic systems), Syktyvkar, 2013, 238 p.
5. **Sukharev A. G.** *Global'nyy ekstremum i metody ego otyskaniya* (Global extremum and methods for finding it), Matematicheskiye metody v issledovanii operatsiy, M.: Izd. MGU, 1983, 193 c.
6. **Tarasov V. N.** Ob ustoychivosti uprugikh sistem pri odnostoronnikh ogranicheniyakh na peremeshcheniya (On the stability of elastic systems with one-sided constraints on displacements), *Trudy instituta matematiki i mekhaniki. Rossiyskaya akademya nauk. Ural'skoye otdeleniye*, Tom 11, № 1, 2005, pp. 177–188.

7. Feodos'yev V. I. *Izbrannyye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov* (Selected problems and questions on the resistance of materials), М.: Nauka, 1967, 376 p.

Для цитирования: Михайлов А. В., Тарасов В. Н. Устойчивость подкрепленных арок при граничных условиях шарнирного опирания // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 1 (30). С. 40–52.*

For citation: Mikhailov A. V., Tarasov V. N. The stability of the reinforced arches under the boundary conditions of the hinged support, *Bulletin of Syktывkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, 1 (30), pp. 40–52.

Ф ИЦ «Коми НЦ УрО РАН»

Поступила 30.03.2019