МАТЕМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 1 (30). 2019

УДК 511.0

РАЗМЕТКА ЛИНЕЙКИ КАК ПРИМЕР ТЕОРИИ ГРУПП

Р. Р. Пименов

В статье обсуждается связь между разметкой линейки, группой перестановок трех элементов, инволютивными преобразованиями и дробно-линейными функциями. Показывается тройственная симметрия, без которой разметка линейки была бы невозможна. Приводятся примеры и задачи, полезные для преподавания математики в школе и университете.

Ключевые слова: система координат, линейка, симметрия, теория групп, инволюция, образование.

1. Тройная симметрия линейки

В статье идет речь не о том, что для теории групп нужна какая-то специальная линейка, а о том, как обычная мерная линейка оказывается пособием для введения в теорию групп, точнее в теорию перестановок элементов. Также мерная линейка дает ясные и нетривиальные примеры композиций элементарных функций. Особенно неожиданно, что одномерная линейка демонстрирует тройственную симметрию (в [1] мы показывали, как это происходит в геометрии окружности, что менее странно).

Общеизвестно: чтобы превратить ровный брусок или гладкую дощечку в линейку, надо ее разметить, то есть уметь приписывать каждой точке на линейке какое-то вещественное число. Для этого мы отмечаем на бруске две точки: точку, называемую нулем, и точку, называемую единицей. Расстояние между отмеченными точками будет называться «единицей измерения» (сантиметр, аршин, локоть, миля), а точка, названная нулем, превращается в «начало отсчета». После этого произвольной точке X на бруске однозначно сопоставляется число, которое мы называем координатой X, и брусок можно использовать как линейку.

Прописной буквой X мы обозначаем саму точку, а строчной x – ее координату на линейке.

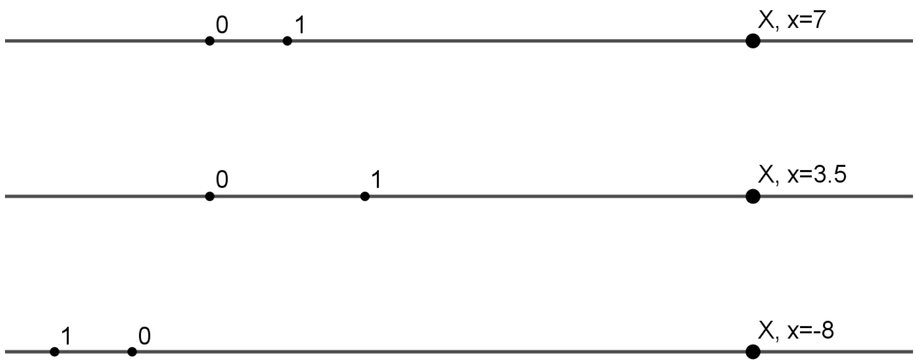

Рис. 1. x-координаты

Рисунки показывают разные единицы измерений и расстояние от 0 до точки в этих единицах. Нижний случай показывает, почему на линейке возникают отрицательные числа. На обычной мерной линейке нет отрицательных чисел, а есть правая и левая сторона (от точки 0). Мы же говорим, координата точки X отрицательна, если точки X и 1 лежат по разные стороны от точки 0, иначе говоря — если 0 разделяет 1 и X (о разделении точек и ориентации см. [2]). В противном случае координата X положительна.

Как изменится координата точки X, если мы поменяем местами точки 0 и 1? Обозначим новую координату $f(x)$, ясно, что f — инволютивная функция, то есть $f(f(x)) = x$, ведь если мы поменяем местами 0 и 1 на линейке два раза, то они вернутся на исходные места, а точка X и

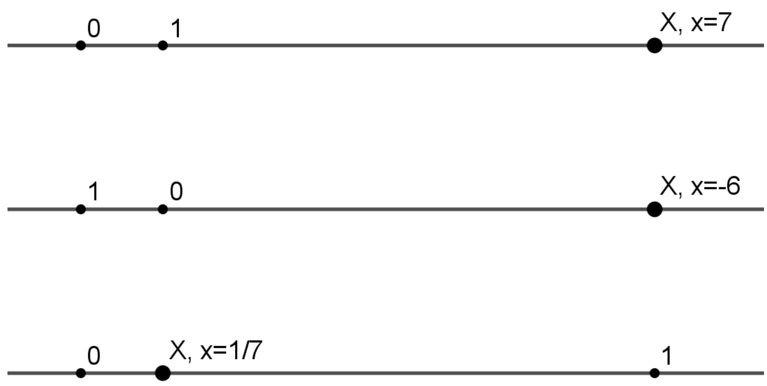

Рис. 2. Изменение положения точки X

не двигалась с места. Легко видеть, что $f(x) = 1 - x$.

Мы можем менять местами не только точки 0 и 1. Мы можем поменять местами X и 0 или X и 1 (не трогая в обоих случаях оставшуюся точку). Как меняется при этом координата точки X? Сначала заметим свойства этих функций, ясные без вычислений. Обозначим функцию перестановки 0 и X как h, функцию перестановки 1 и X как g. Поскольку при двойной перестановке точки возвращаются на свои места, эти функции инволютивны, как и функция f: $h(h(x) = g(g(x) = f(f(x)) = x$. А какой смысл у композиции двух таких функций? Первая функция определена перестановкой двух точек на линейке, вторая – перестановкой двух других.

Мы видим, что последовательное выполнение двух таких перестановок даст циклический сдвиг всех трех точек: первая перейдет во вторую, вторая — в третью, а третья — в первую. Если этот циклический сдвиг проделать трижды, то все три точки: 0, 1 и X вернутся на свои места. На рис. 3 мы вначале воспользовались функцией f, а затем — функцией g, и тем самым мы доказали, что их композиция $g \circ f$, примененная трижды, — тождественная функция: $(g \circ f)^3 = e$, или в более «школьном» виде: $g(f(g(f(g(f(x)))))) = x$ для всех x. Такое же рассуждение верно и для обратной функции $f \circ g$, и для любой композиции трех функций f, g, h. Интересно и важно, что мы доказали это, не прово-

Рис. 3. Циклическая перестановка

дя никаких арифметических операций и даже не зная еще точно самих функций. Найдем же их: из геометрических соображений очевидно, что $g(x) = 1/x$ (если в дюйме x сантиметров, то в сантиметре $1/x$ дюймов). Поэтому $g \circ f = 1/(1-x)$. Функцию $h(x)$ легко вычислить геометрически, но используем композицию перестановок: Переставим на нижней строке рис. 3 точки 0 и 1, что делается с помощью функции f. Результат будет такой же, как если в исходном положении (первая строка рис. 3) поменять местами 0 и X, при этом координата точки X теперь равна $h(x)$, по определению функции h. Поэтому мы имеем равенство $f \circ g \circ f = h$, а в школьном виде $f(g(f(x))) = h(x)$, композиция слева легко считается, получаем $h(x) = 1 - 1/(1-x) = x/(x-1)$. Замечательно, что эта функция нами выведена не привычными вычислениями, а с помощью композиции перестановок.

Три элемента (в нашем случае это точки 0, 1, X) можно переставить 6 способами. Каждой перестановке соответствует функция, полученная композицией двух исходных: $f(x) = 1 - x$ и $g(x) = 1/x$. Выпишем их: $1-x, 1/x, 1/(1-x), x/(x-1), (x-1)/x$, через композиции f и g они выражаются так: $f, g, f \circ g, f \circ g \circ f = h, g \circ f \circ g$, каждая из них осуществляет пересчет координаты после перестановки трех точек, выпишем, как меняются местами точки от исходного расположения $(0, 1, X) : (1, 0, X), (0, X, 1), (X, 0, 1), (X, 1, 0), (1, X, 0)$. К этим пяти функциям обычно добавляют шестую функцию $y = x$ соответствующей перестановке, которая ничего не меняет (перестановке, которая ничего не переставляет), $y = x$, чтобы можно было назвать множество этих функций группой.

2. Дробно-линейные преобразования как композиция элементарных инволютивных функций

Мы рассмотрели композиции функций $1 - x$ и $1/x$, теперь изучим более общую ситуацию: рассмотрим все возможные композиции функций вида $y = a - x$ (назовем их переворотами) и $y = b/x$ (эти функции назовем перетягиваниями), где a и b — произвольные вещественные числа. Функциям такого вида легко придать геометрический смысл, и функций проще школьная математика не знает. Очевидно, рассматриваемые функции инволютивны: $(a-(a-x)) = x$. Композиция функций $a_1 - x$ и $a_2 - x$ есть $a_2 - (a_1 - x)) = a_2 - a_1 + x$, на числовой оси это означает перенос точки x на вектор $a_2 - a_1$, поскольку a_1 и a_2 произвольны, то и перенос может быть произвольным. Итак, композиция любых двух переворотов — функции вида $y = x + a$, совершенно аналогично, композиция любых двух перетягиваний — функции вида $y = b \cdot x$. Композиция любых трех переворотов инволютивна и является переворотом: $a_3 - (a_2 - (a_1 - x)) = (a_3 - a_2 + a_1) - x$. Отсюда сразу следует, что композиция четырех переворотов представляется в виде композиции двух переворотов, то есть есть функция вида y=a+x. Аналогично, композиция любых трех перетягиваний является перетягиванием, а композиция любых четырех перетягиваний представима в виде композиции двух перетягиваний и есть функция вида $y = a \cdot x$.

Мы рассматривали только композиции переворотов с переворотами и перетягиваний с перетягиваниями. Чему равна композиция переворота и перетягивания? Здесь уже важен порядок операций, пусть $f = a-x$, $g = b/x$, тогда: $f \circ g = a - b/x$, $g \circ f = b/(a-x)$. Не будем продолжать элементарные вычисления, доступные уже в 8-м классе обычной школы, и подведем итог: функции, которые можно получить композициями переворотов и перетягиваний имеют вид: y=$\frac{ax+b}{cx+d}$, и каждая функция такого вида представима в виде композиции некоторого числа переворотов и перетягиваний.

Функции вида $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ играют большую роль в математике, особенно в теории функций комплексного переменного и называются «дробно-линейными функциями». Здесь мы пришли к ним через инволютивные функции и поэтому выясним, в каком случае функция $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ сама является инволютивной? Для этого мы можем вычислить $f(f(x))$ через коэффициенты a, b, c, d и получить связь между ними, используя условие инволютивности: f(f(x)=x. Это несложные, но все-таки громоздкие вычисления, изящней получить ответ иначе. Пусть $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, тогда $y(cx + d) = ax + b, cxy + yd - ax = b$. Если $d = -a$, мы имеем сху-a(x+y)=b, в это выражение x и y входят одинаковым образом, при их перестановке (обратите внимание, здесь мы снова переставляем, но теперь уже не точки, как в первом разделе, а — переменные) выражение не изменится. Это означает, что x и y зависят друг от друга одинаковым образом: если мы выразим x через y или y через x, то получим одно и то же выражение. Поэтому если мы обозначим зависимость y от x через f, то $f(f(x)) = x$, что и означает инволютивность f. В нашем случае $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ и мы узнали, что эта функция инволютивна тогда и только тогда, когда $a = -d$. Отметим, что перевороты и перетягивания, композиции которых мы изучали, представимы в виде: $x + y = a$ и $xy = b$, симметричном относительно x и y.

3. Применение в педагогике

Есть два критерия для преподавания математики в школе: тема должна иметь научное и образовательное значение, тема должна быть интересна и доступна школьнику. Мы полагаем, что многое в статье удовлетворяет обоим критериям. При изучении композиций функций можно использовать приведенные примеры тождеств для задач, например, хорошую задачу с неожиданным ответом дает вопрос: чему равно трехкратное применение функции $1/(1 - x)$? Ученики решат ее вычислительно, и результат их может озадачить, приведенное учителем доказательство с помощью разметки линейки также удивит их. Вычисление функций типа $f \circ g \circ f$ и определение их свойств возможно двоякое: прямое вычисление их через определение или оперирование с композицией функций. Например, доказательство того, что $h = f \circ g \circ f$ инволютивна, может быть сделано прямым вычислением h, а может быть получено с помощью композиции функций с использованием ассоциативности композиции: $h \circ h = (f \circ g \circ f) \circ (f \circ g \circ f) = (f \circ g) \circ (f \circ f) \circ (g \circ f) = (f \circ g) \circ (g \circ f) = f \circ (g \circ g) \circ f = e$ (тождественная функция). Скобки переставляются, и выражение сокращается, поскольку f и g инволютивны, $f(f(x) = g(g(x)) = e$. При таком доказательстве нет нужды раскрывать и переворачивать числители и знаменатели дроби, мы видим абстрактные понятия композиции и ассоциативности за математической работой, понятной школьнику. Стоит обратить внимание и на неожиданную связь геометрической прогрессии и функции $y = 1/(1-x)$: при x<1 эта функция равна сумме всех членов геометрической прогрессии с первым членом 1 и знаменателем x.

В математических школах, на кружках и в вузах можно использовать разметку линейки как первый пример группы, создать таблицу умножения этой группы и вводить важные теоретические понятия: коммутируемость, сопряженные элементы, используя примеры обеих частей статьи. Например все три функции f, g, h сопряжены друг с другом, как мы видели $h = f \circ g \circ f$, что и означает сопряженность g и h (при помощи f, так как обратная к f функция совпадает с f). Вся первая часть статьи есть первый и простейший случай представления групп геометрическими преобразованиями[1] и таким образом может использоваться и как введение в теорию перестановок элементов и теорию представлений групп. Также, это первый и простейший пример преобразования координат, понятия фундаментального и для линей-

[1]Уважаемый рецензент считает, что группа самосовмещений правильного треугольника — более простой пример. С благодарностью ответим ему, что для построения правильного треугольника нужно предварительно разметить линейку (чтобы измерять его стороны). Также заметим, что треугольник — плоская фигура, а линейка — одномерна, что также подтверждает точку зрения, высказанную в статье. Но, разумеется, понятия «простого» и «сложного» субъективны, потому каждый имеет право на свою точку зрения.

ной алгебры, и для современной физики. В данном случае речь идет о преобразовании одномерной системы координат и тем неожиданней появление при этом тройственной симметрии.

Мы оставили неразобранным переход от разметки линейки к простому отношению (мы считаем, что это по сути одно и то же) и алгебраическую возможность перейти от простого отношения к двойному, указанную в работах Л. Коганова [3]. Мы же приходим к двойному отношению через геометрию окружности в [1] следующим образом: чтобы приписать каждой точке на окружности число (координату) можно произвольным образом приписать значения 0, 1, ∞ трем произвольным точкам. Далее мы, как и в этой статье, следим за изменением координаты точки X при перестановке трех выбранных точек (0, 1, ∞) и получаем тройственную симметрию аналогично найденной здесь. Далее мы меняем местами точку X с выбранными точками 0, 1, ∞ — опять-таки аналогично первой части этой статьи, что дает перестановки уже четырех, а не трех элементов — в чем отличие от разобранной здесь разметки линейки. Функция, отвечающая за изменение координаты на окружности, обладает свойствами двойного отношения. Геометрия прямой или разметка линейки оказывается частным случаем геометрии окружности, случаем, в котором фиксирована точка ∞ — как и следовало ожидать.

Вторая часть статьи не только дает много задач на композицию функций, но и позволяет по-новому взглянуть на дробно-линейные преобразования. Она имеет интересные связи с геометрией. Дело в том, что сходными приемами изучается композиция симметрий относительно точек и прямых на плоскости. Композиция симметрий относительно двух прямых — поворот или перенос, все переносы коммутируют между собой, также между собой коммутируют повороты относительно одного центра. Дробно-линейные функции имеют важное значение в геометрии окружности (здесь они являются формулами перехода между системами координат, [1]), а найденные нами инволютивные функции представляют особый вид симметрии в геометрии окружности: биплетную симметрию, у которой есть всего две неподвижные точки. О геометрической стороне дела см. [4] и Ф. Бахман в [5].

Укажем еще несколько несложных, но поучительных задач на композицию произвольных инволютивных функций или симметрий, полезных при изучении геометрии и теории групп и которые использованы в статье в частном случае. Пусть f, g, h, q означают инволютивные элементы. Если f и g коммутируют, то $f \circ g$ — инволютивно, если $f \circ g$ — инволютивно, то f и g коммутируют, если композиция любых трех инволютивных элементов — инволютивна, то элементы, представимые в виде композиций двух инволютивных элементов — коммутируют между собой. Решения основаны на том, что если композиция какого-то числа инволютивных элементов сама инволютивна, то ее можно прочитать в обратном порядке, и результат не изменится.

Список литературы

1. **Пименов Р.** Тройственная симметрия Фрактального калейдоскопа // *Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 20. М.: МЦНМО. 2016. С. 57–110.*

2. **Пименов Р.** К логическим и наглядно-геометрическим свойствам ориентации // *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона : периодический межвузовский сборник научно-методических работ. 2016. Вып. 18. С. 99–114.*

3. **Коганов Л.** Двойное отношение как простое // *Проблемы теоретической кибернетики : тезисы докладов 14 межд. конференции. Пенза 23–28 мая 2005. М.: Изд-во МГУ. 2005. С. 1–4.*

4. **Пименов Р.** Эстетическая геометрия или теория симметрий. СПб.: Школьная лига, 2014. 288 с.

5. **Бахман Ф.** Построение геометрии на основе понятия симметрии / пер. с нем. Р.И. Пименова; под ред. И.М. Яглома. М.: Наука, 1969. 380 с.

Summary

Pimenov R. R. Lineup markup as an introduction to group theory

The article reveals the relationship between the ruler markup, the group of permutations of the three elements, involutive transformations and linear fractional functions. Threefold symmetry is shown, without which the ruler marking would be impossible. Examples and tasks useful for teaching mathematics at school and university are given.

Keywords: lineup markup, symmetry, group theory, involution, education.

References

1. **Pimenov R. R.** Troystvennaya simmetriya Fraktal'nogo kaleydoskopa (Triple symmetry of a fractal kaleidoscope), *Mat. Pros.*, Ser. 3, 20, MCCME, Moscow, 2016, pp. 57–110.

2. **Pimenov R. R.** K logicheskim i naglyadno-geometricheskim svojstvam orientacii 1 (About logic and visual-geometric properties of orientation 1), *Matematichesky vestnik pedvuzov i yniversitetov Volgo- Viatskogo regiona: periodichesky mejvuzovsky sbornik nauchno-metodicheskyh rabot*, Kirov: Naucn. izd-vo ViatGU, 2016, v. 18, pp. 99–114.

3. **Koganov L.** Dvoynoye otnosheniye kak prostoye (Cross-ratio as affine ratio), *Problems of theoretical cybernetics, abstracts of 14 inter. conferences*, Penza May 23–28, M, ed. MSU, 2005, pp. 1–4.

4. **Pimenov R. R.** *Esteticheskaya geometriya ili teoriya simmetriy* (Aesthetic geometry or theory of symmetries), SPb, School league, 2014, 288 p.

5. **Bachmann F.** *Postroyeniye geometrii na osnove ponyatiya simmetrii* (Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff), Moscow, Nauka, 1969, 380 p.

Для цитирования: Пименов Р. Р. Разметка линейки как пример теории групп // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 1 (30). С. 16–26.*

For citation: Pimenov R. R. Lineup markup as an introduction to group theory, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, 1 (30), pp. 16–26.

Санкт-Петербургский национальный исследовательский академический университет

Поступила 05.04.2019