МАТЕМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 1 (30). 2019

УДК 512.55

БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И ГОМОМОРФИЗМЫ БУЛЕАНОВ[1]

Е. М. Вечтомов

Бинарные отношения между произвольными множествами A и B исследуются в терминах соответствующих полных $\vee$-гомоморфизмов булеана $\mathbf{B}(A)$ в булеан $\mathbf{B}(B)$. Получены две теоремы двойственности: для категории всех множеств и бинарных отношений между ними в качестве морфизмов и для категории всевозможных бинарных отношений и их 2-морфизмов.
Ключевые слова: бинарное отношение (соответствие), булеан, полный $\vee$-гомоморфизм, двойственность категорий.

1. Введение

В данной статье развивается фрагмент теории абстрактных бинарных отношений. При нашем подходе произвольное бинарное отношение ρ между множествами A и B моделируется как полный $\vee$-гомоморфизм $\boldsymbol{\rho}$ булеана $\mathbf{B}(A)$ в булеан $\mathbf{B}(B)$. Другой подход, приводящий к соответствию Галуа, представлен в книге П. Кона [1, с. 58].

Предложение 1 позволяет выражать свойства бинарных отношений ρ в терминах соответствующих полных $\vee$-гомоморфизмов $\boldsymbol{\rho}$ булеанов (предложение 2). Это предложение служит основой дуализма категории

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ «Полукольца и их связи», проект 1.5879.2017/8.9.

всех множеств с бинарными отношениями в качестве морфизмов и категории булеанов всевозможных множеств и их полных $\vee$-гомоморфизмов (теорема 1), а также используется при установлении двойственности между категорией бинарных отношений и 2-морфизмов между ними и категории полных $\vee$-гомоморфизмов булеанов и их 2-$\vee$-морфизмов (теорема 2).

Содержательная теория множеств, служащая фундаментом современной математики, изложена в книге А. В. Архангельского [2]. Информацию о бинарных отношениях можно найти в работах [1; 3–10], об алгебраических и порядковых структурах – в [1; 3; 6–8; 11–12], о понятии категории – в [1; 6; 9; 12].

2. Предварительные сведения

Пусть даны произвольные множества A и B. Через $\mathbf{B}(A)$ обозначим *булеан множества* A, то есть множество всех подмножеств множества A.

Пусть ρ — *бинарное отношение*, или *соответствие*, между множествами A и B (из множества A во множество B), определяемое как некоторое множество упорядоченных пар (a, b) элементов $a \in A$ и $b \in B$, то есть $\rho \subseteq A \times B$. Точнее говоря, бинарное отношение — это тройка $\langle A, \rho, B\rangle$, где $\rho \subseteq A \times B$ называют также *графиком* соответствия ρ.

Если элементы $a \in A$ и $b \in B$ находятся в отношении ρ, то есть $(a, b) \in \rho$, будем писать $a\rho b$; на «языке стрелок» соединяем «точку» a с «точкой» b стрелкой $a \to b$. Таким образом, бинарное отношение между множествами A и B представляет собой простой ориентированный граф с множеством вершин $A \cup B$, возможно, с петлями, дуги которого направлены из A в B.

Каждому подмножеству X множества A поставим в соответствие множество

$$\rho(X) = \{b \in B : \exists a \in X a\rho b\} \subseteq B.$$

При этом $\rho(X) = \cup\{\rho(\{x\}) : x \in X\}$. Вместо $\rho(\{x\})$ будем писать просто $\rho(x)$.

Бинарное отношение равенства на множестве A обозначается 1_A, называется *тождественным отображением* множества A, или *диагональю* на A.

Бинарное отношение ρ^{-1} между множествами B и A называется *обратным* к отношению ρ, если

$$\forall a \in A \forall b \in B (b\rho^{-1}a \Leftrightarrow a\rho b);$$

на языке стрелок: обращаем все стрелки $a \to b$. Ясно, что $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.

Область определения отношения ρ — это множество $D(\rho) = \rho^{-1}(B)$, а *множество значений*, или *образ* отношения ρ, есть множество $R(\rho) = \rho(A) = D(\rho^{-1})$.

Наряду с бинарным отношением ρ между множествами A и B возьмем бинарные отношения σ и τ между множествами B и C и C и D, соответственно. *Композицией* отношений ρ и σ называется бинарное отношение $\rho\sigma = \sigma \circ \rho$ между множествами A и C, определяемое формулой:

$$\forall a \in A \forall c \in C (a\rho\sigma c \Leftrightarrow \exists b \in B (a\rho b \;\&\; b\sigma c);$$

проводим стрелку $a \to c$, если существуют стрелки $a \to b$ и $b \to c$ для некоторой точки $b \in B$. Ясно, что $1_A\rho = \rho$, $\rho 1_B = \rho$, $(\rho\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}\rho^{-1}$ и $\rho \subseteq \rho\rho^{-1}\rho$. Легко проверить ассоциативность композиции: $(\rho\sigma)\tau = \rho(\sigma\tau)$.

Бинарное отношение ρ между множествами A и B называется:

всюду определенным, если $D(\rho) = A$, то есть $1_A \subseteq \rho\rho^{-1}$;

однозначным, если

$$\forall a \in A \forall b_1, b_2 \in B (a\rho b_1 \;\&\; ea\rho b_2 \Rightarrow b_1 = b_2), \text{ то есть } \rho^{-1}\rho \subseteq 1_B;$$

инъективным, когда

$$\forall a_1, a_2 \in A \forall b \in B (a_1\rho b \;\&\; a_2\rho b \Rightarrow a_1 = a_2), \text{ то есть } \rho\rho^{-1} \subseteq 1_A;$$

сюръективным, когда $R(\rho) = B$, то есть $1_B \subseteq \rho^{-1}\rho$;

функциональным, когда оно всюду определенное и однозначное, то есть $1_A \subseteq \rho\rho^{-1}$ и $\rho^{-1}\rho \subseteq 1_B$;

биективным, если оно инъективно, сюръективно и функционально, то есть $\rho\rho^{-1} = 1_A$ и $\rho^{-1}\rho \subseteq 1_B$;

дифункциональным [8, с. 34], если

$$\forall a_1, a_2 \in A \forall b_1, b_2 \in B (a_1\rho b_1 \ \& \ a_1\rho b_2 \ \& \ a_2\rho b_1 \Rightarrow a_2\rho b_2),$$

то есть $\rho\rho^{-1}\rho \subseteq \rho$ (равносильно, $\rho\rho^{-1}\rho = \rho$).

Всюду определенность бинарного отношения ρ между множествами A и B графически означает, что из каждой точки множества A выходит хотя бы одна стрелка, направленная в B. Однозначность отношения ρ означает, что из каждой точки множества A выходит не более одной стрелки. Инъективность ρ иллюстрируется тем, что из разных точек множества A не могут выходить стрелки с общим «концом» в B, а сюръективность — тем, что каждая точка множества B служит концом некоторой стрелки, выходящей из A. Функциональность отношения ρ говорит о том, что из каждой точки множества A выходит ровно одна стрелка. Функциональное отношение ρ из A в B называется *функцией* или *отображением* и обозначается $\rho : A \to B$.

Следующие равносильности очевидны:

ρ всюду определено $\Leftrightarrow$ ρ^{-1} сюръективно,

ρ однозначно $\Leftrightarrow$ ρ^{-1} инъективно,

ρ биективно $\Leftrightarrow$ ρ^{-1} биективно.

Бинарное отношение $\rho \subseteq A \times A$, называемое *отношением на множестве* A, называется:

рефлексивным, если $1_A \subseteq \rho$;

симметричным, если $\rho^{-1} \subseteq \rho$ (равносильно, $\rho^{-1} = \rho$);

транзитивным, если $\rho\rho \subseteq \rho$;

антисимметричным, если $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq 1_A$;

антирефлексивным, если $1_A \cap \rho = \varnothing$.

3. Примеры

1. Рассмотрим всевозможные бинарные отношения между множествами A и B. Они образуют булеву решетку — булеан $\mathbf{B}(A \times B)$, на котором определены обычные отношения включения $\subseteq$ и операции объединения $\cup$, пересечения $\cap$ и дополнения $'$. Именно для любых $\rho, \sigma \in \mathbf{B}(A \times B)$ имеем:

$$\rho \subseteq \sigma \Leftrightarrow \forall a \in A \forall b \in B (a\rho b \Rightarrow a\sigma b),$$

$$\rho \cup \sigma = \{(a; b) : a\rho b \vee a\sigma b\},$$

$$\rho \cap \sigma = \{(a; b) : a\rho b \ \& \ a\sigma b\},$$

$$\rho' = \{(a; b) \in A \times B : \neg a\rho b\} = (A \times B) \setminus \rho.$$

Если $A = B$, то на булеане $\mathbf{B}(A \times A)$ действует также операция композиции $\circ$ соответствий. В результате получаем так называемую *реляционную алгебру* (алгебру отношений) $\langle \mathbf{B}(A \times A); \cup, \cap, ', \cdot \rangle$ типа (2, 2, 2, 1) с наименьшим элементом $\varnothing$ и наибольшим элементом $A \times A$. Отметим, что реляционные алгебры играют важную роль в теории баз данных [9; 12]; в указанных книгах дано общее формальное определение реляционной алгебры.

2. Пусть ρ — *отношение эквивалентности* на непустом множестве A, то есть ρ рефлексивно, симметрично и транзитивно; равносильно: $1_A \subseteq \rho$, $\rho^{-1} = \rho$ и $\rho\rho = \rho$. Для любого элемента $a \in A$ образ $\rho(a) = [a]_\rho = \{x \in A : x\rho a\}$ есть класс эквивалентности элемента a по отношению ρ. Каждому подмножеству $X \subseteq A$ соответствует объединение $\rho(X)$ классов эквивалентности элементов $a \in X$.

3. Пусть дано упорядоченное множество $\langle A, \rho \rangle$, где $\rho = \leq$ есть отношение *порядка* на непустом множестве A, то есть ρ рефлексивно, транзитивно и антисимметрично; равносильно: $\rho\rho = \rho$ и $\rho \cap \rho^{-1} = 1_A$. Тогда для любых $a, b \in A$ имеем: $\rho(a) = [a) = \{x \in A : a \leq x\}$ — верхний конус элемента a, $\rho^{-1}(b) = (b] = \{x \in A : x \leq b\}$ — нижний конус элемента b.

4. Для мультипликативной полугруппы A с нулем 0 положим: $a\rho b$ означает $ab = 0$ при $a, b \in A$. Тогда имеем: $\rho(a) = \mathrm{Ann}_r a$ — правый аннулятор элемента a, $\rho^{-1}(b) = \mathrm{Ann}_l b$ — левый аннулятор элемента b.

5. Предположим, что A — множество всех точек евклидовой плоскости, B — множество всевозможных прямых на этой плоскости, и $a\rho b$

означает, что точка $a \in A$ принадлежит прямой $b \in B$. Получаем: $\rho(a)$ — связка прямых данной плоскости, проходящих через точку a, $\rho^{-1}(b)$ – множество всех точек прямой b, то есть сама прямая b (совпадающая — по определению — с множеством всех своих точек). Далее, $\rho(X)$ — это множество прямых, содержащих хотя бы одну точку из X, и $\rho^{-1}(Y)$ есть объединение прямых (как множеств точек) из Y при $X \subseteq A$ и $Y \subseteq B$.

6. Пусть A – множество букв русского алфавита, B — множество всевозможных слов русского языка, и $a\rho b$ означает, что буква $a \in A$ входит в слово $b \in B$. Тогда $\rho(a)$ — множество всех слов, содержащих букву a, и $\rho^{-1}(b)$ есть множество букв слова b.

4. Отображение взятия образов

Булеан $\mathbf{B}(A)$ произвольного множества A относительно отношения включения $\subseteq$ (с операциями объединения $\cup$ и пересечения $\cap$) является булевой решеткой с наименьшим элементом $\varnothing$ и наибольшим элементом A. При этом пустое множество будем называть нулем и обозначать 0, а само множество A — единицей 1 булеана $\mathbf{B}(A)$. Булеан $\mathbf{B}(A)$ будет полной атомной решеткой, атомы которой суть в точности одноэлементные подмножества в A.

Снова возьмем произвольное бинарное отношение ρ между множествами A и B. Рассмотрим отображение взятия образов при действии ρ:

$$\boldsymbol{\rho} : \mathbf{B}(A) \to \mathbf{B}(B), \boldsymbol{\rho}(X) = \rho(X) \text{ для любого } X \subseteq A,$$

булеана $\mathbf{B}(A)$ множества A в булеан $\mathbf{B}(B)$ множества B. Очевидно, что $\boldsymbol{\rho}$ является *полным $\vee$-гомоморфизмом* булеанов, то есть $\boldsymbol{\rho}(\varnothing) = \varnothing$ и $\boldsymbol{\rho}(\cup X_i) = \cup\boldsymbol{\rho}(X_i)$ для любого непустого семейства $(X_i)_{i \in I}$ подмножеств X_i множества A.

Обратно, пусть α — полный $\vee$-гомоморфизм булеана $\mathbf{B}(A)$ в булеан $\mathbf{B}(B)$. Определим бинарное отношение $\rho = \rho(\alpha)$ между множествами A и B, положив:

$$a\rho b \Leftrightarrow b \in \alpha(\{a\}) \text{ для любых } a \in A \text{ и } b \in B.$$

Легко видеть, что $\alpha = \boldsymbol{\rho}$.

Тем самым имеет место

Предложение 1. *Для любых множеств A и B переходы $\rho \to \boldsymbol{\rho}$ и $\alpha \to \rho(\alpha)$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между бинарными отношениями ρ между множествами A и B и полными $\vee$-гомоморфизмами α булеана $\boldsymbol{B}(A)$ в булеан $\boldsymbol{B}(B)$.*

Замечание 1. Любое бинарное отношение ρ между множествами A и B можно рассматривать как отображение $A \to \mathbf{B}(B)$, $a \to \rho(a)$ для всех $a \in A$, множества A в булеан $\mathbf{B}(B)$ [9, предложение 1.1]. Тем самым мы заменяем произвольно взятое бинарное отношение на соответствующее произвольное отображение, которое множество (чистое множество, без структуры) переводит в булеву решетку. Поэтому естественнее и плодотворнее бинарному отношению ρ сопоставлять полный $\vee$-гомоморфизм $\boldsymbol{\rho}$ булевой решетки $\mathbf{B}(A)$ в булеву решетку $\mathbf{B}(B)$.

Замечание 2. При втором подходе бинарное отношение ρ между множествами A и B индуцирует соответствие Галуа между A и B и отвечающие ему системы замыканий на A и B [1, с. 55–61], [9, с. 56–58]. Именно, каждому подмножеству X в A ставится в соответствие подмножество $X^* = \cap\{\rho(x) : x \in X\}$ в B, а не $\rho(X) = \cup\{\rho(\{x\}) : x \in X\}$, как в нашем случае. Аналогично, каждому подмножеству Y в B соответствует множество $Y^* = \cap\{\rho^{-1}(y) : y \in Y\} \subseteq A$. В результате получаем пару отображений $X \to X^*$, $Y \to Y^*$ между булеанами $\mathbf{B}(A)$ и $\mathbf{B}(B)$, называемую *соответствие Галуа* между множествами A и B. При этом отображения $*$ обращают отношение включения ($\subseteq$ переводят в $\supseteq$, и обратно) и дают соотношения $X \subseteq X^{**}$ и $Y \subseteq Y^{**}$ для всех $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$.

Наряду с отображением $\boldsymbol{\rho}$ взятия образов при соответствии ρ определяется отображение взятия прообразов:

$$B \supseteq Y \to \{a \in A : \exists b \in Y a\rho b\} = \rho^{-1}(Y) \subseteq A.$$

Получаем полный $\vee$-гомоморфизм $\boldsymbol{\rho}^{-1}$ булеана $\mathbf{B}(B)$ в булеан $\mathbf{B}(A)$, отвечающий бинарному отношению ρ^{-1} между множествами B и A.

Следующее предложение вытекает из соответствующих определений:

Предложение 2. *Для произвольного бинарного отношения ρ между множествами A и B справедливы следующие утверждения:*

1) *ρ всюду определено $\Leftrightarrow$ ($\boldsymbol{\rho}(X) = 0 \Rightarrow X = 0$ для любого (атома) $X \in \boldsymbol{B}(A)$), то есть $\boldsymbol{\rho}$ в нуль 0 переводит только нуль 0;*

2) *ρ однозначно $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\rho}(X)$ есть 0 или атом в $\boldsymbol{B}(B)$ для любого атома $X \in \boldsymbol{B}(A)$;*

3) *ρ инъективно $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\rho}$ сохраняет нулевые пересечения любых двух элементов булеана $\boldsymbol{B}(A)$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\rho}$, сохраняет пересечения любых двух элементов из $\boldsymbol{B}(A)$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\rho}$, сохраняет пересечение каждого непустого семейства элементов из $\boldsymbol{B}(A)$;*

4) *ρ сюръективно $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\rho}(1) = 1$, то есть ρ сохраняет единицу 1;*

5) *ρ функционально $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\rho}$ сохраняет атомы;*

6) *ρ дифункционально $\Leftrightarrow$ при отображении $\boldsymbol{\rho}$ образы любых двух атомов либо равны, либо имеют нулевое пересечение.*

Замечание 3. Утверждение 3) означает, что при инъективном соответствии ρ отображение $\boldsymbol{\rho}$ служит полным гомоморфизмом булеана $\mathbf{B}(A)$ в булеан $\mathbf{B}(B)$, необязательно сохраняющим 1. Утверждения 3) и 4) показывают, что для инъективного сюръективного соответствия ρ отображение $\boldsymbol{\rho}$: $\mathbf{B}(A) \to \mathbf{B}(B)$ будет полным гомоморфизмом, сохраняющим 1. Очевидно, что при этом $\boldsymbol{\rho}$ дополнения переводит в дополнения, то есть $\boldsymbol{\rho}(A \setminus X) = \boldsymbol{\rho}(A) \setminus \boldsymbol{\rho}(X)$ для всех $X \subseteq A$.

Следствие 1. *Для любого отображения $\rho : A \to B$ равносильны следующие условия:*

1) *ρ инъективно;*

2) *отображение $\boldsymbol{\rho}$ инъективно;*

3) *$\boldsymbol{\rho}^{-1}$ сюръективно;*

4) *$\boldsymbol{\rho}$ — изоморфное вложение булеана $\boldsymbol{B}(A)$ в булеан $\boldsymbol{B}(B)$.*

Следствие 2. *Для всякого отображения ρ: $A \to B$ равносильны следующие условия:*

1) *ρ сюръективно;*

2) *$\boldsymbol{\rho}(1) = 1$;*

3) *$\boldsymbol{\rho}^{-1}$ инъективно;*

4) $\boldsymbol{\rho}$ – *полный* $\vee$*-гомоморфизм булеанов, сохраняющий атомы и* 1.

Следствие 3. *Для произвольного отображения* $\rho\colon A \to B$ *эквивалентны следующие условия*:

1) ρ *биективно*;

2) ρ^{-1} *биективно*;

3) $\boldsymbol{\rho}$ — *изоморфизм булеана* $\boldsymbol{B}(A)$ *на булеан* $\boldsymbol{B}(B)$.

5. Двойственности

Установим двойственности для категории множеств и бинарных отношений между ними и для категории бинарных отношений и их 2-морфизмов.

Теорема 1. *Категория всех множеств с бинарными отношениями между множествами в качестве морфизмов эквивалентна категории булеанов всевозможных множеств и их полных* $\vee$*-гомоморфизмов.*

Доказательство. Тождественные отображения 1_A и $1_{\mathbf{B}(A)}$ служат единичными морфизмами указанных категорий. Возьмем два бинарных отношения ρ между множествами A и B и σ между множествами B и C. Их композиция $\rho\sigma$ является бинарным отношением между множествами A и C. При этом отображение $\boldsymbol{\rho\sigma} : \mathbf{B}(A) \to \mathbf{B}(C)$ совпадает с композицией отображений $\boldsymbol{\rho} : \mathbf{B}(A) \to \mathbf{B}(B)$ и $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{B}(B) \to \mathbf{B}(C)$. Остается применить предложение 1.

Замечание 4. Соответствия $A \to A$ и $\rho \to \rho^{-1}$ индуцирует антиэквивалентность категории всех множеств A с бинарными отношениями ρ между множествами на саму себя.

Рассмотрим категорию, объектами которой служат всевозможные бинарные отношения $\langle A, \rho, B\rangle$, а морфизм тройки $\langle A, \rho, B\rangle$ в тройку $\langle C, \sigma, D\rangle$ определяется как упорядоченная пара отображений (f, g), такая, что $f : A \to C, g : B \to D$ и $f\sigma = \rho g$. Такой морфизм назовем *2-морфизмом.* При 2-морфизме (f, g) бинарного отношения ρ в бинарное отношение σ соотношение $a\rho b$ преобразуется в соотношение $f(a)\sigma g(b)$. Действительно, если $a\rho b$, то $a(\rho g)g(b)$, откуда $a(f\sigma)g(b)$, то есть $f(a)\sigma g(b)$. Единичным морфизмом тройки $\langle A, \rho, B\rangle$ будет пара тождественных отображений $(1_A, 1_B)$.

Теперь возьмем категорию всех полных $\vee$-гомоморфизмов булеанов. Назовем *2-$\vee$-морфизмом* полного $\vee$-гомоморфизма $\boldsymbol{\rho}$: $\mathbf{B}(A) \to \mathbf{B}(B)$ в полный $\vee$-гомоморфизм $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{B}(C) \to \mathbf{B}(D)$ пару (α, β) сохраняющих атомы полных $\vee$-гомоморфизмов $\alpha : \mathbf{B}(A) \to \mathbf{B}(C)$ и $\beta : \mathbf{B}(B) \to \mathbf{B}(D)$, для которых $\alpha\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\rho}\beta$. Единичным морфизмом объекта $\boldsymbol{\rho} : \mathbf{B}(A) \to \mathbf{B}(B)$ этой категории служит пара тождественных отображений $(1_{\mathbf{B}(A)}, 1_{\mathbf{B}(B)})$.

Теорема 2. *Категория всех бинарных отношений и их 2-морфизмов эквивалентна категории полных $\vee$-гомоморфизмов булеанов и 2-$\vee$-морфизмов между ними.*

Эта теорема является следствием предложения 1 и утверждением 5) предложения 2.

Список литературы

1. **Кон П.** Универсальная алгебра : пер. с англ. М.: Мир, 1968. 352 с.

2. **Архангельский А. В.** Канторовская теория множеств. М.: Изд-во МГУ, 1988. 112 с.

3. **Биркгоф Г., Барти Т.** Современная прикладная алгебра : пер. с англ. М.: Мир, 1976. 400 с.

4. **Вечтомов Е. М.** Бинарные отношения // *Математика в образовании. 2007. Вып. 3. С. 41–51.*

5. **Вечтомов Е. М.** О бинарных отношениях для математиков и информатиков // *Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2012. 1(3). С. 51–58.*

6. **Вечтомов Е. М.** Математика: основные математические структуры : учебное пособие для академического бакалавриата. 2-е изд. М.: Юрайт, 2018. 296 с.

7. **Кук Д., Бейз Г.** Компьютерная математика : пер. с англ. М.: Наука, 1990. 384 с.

8. **Мальцев А. И.** Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 392 с.

9. **Цаленко М. Ш.** Моделирование семантики в базах данных. М.: Наука, 1989. 288 с.

10. **Шрейдер Ю. А.** Равенство. Сходство. Порядок. М.: Наука, 1971. 256 с.

11. **Гретцер Г.** Общая теория решеток : пер. с англ. М.: Мир, 1982. 456 с.

12. **Плоткин Б. И.** Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных. М.: Наука, 1991. 448 с.

Summary

Vechtomov E. M. Binary relations and homomorphisms of Booleans

The works deals with Binary relations between arbitrary sets A and B investigated in terms of corresponding complete $\vee$-homomorphisms from the Boolean $\mathbf{B}(A)$ to the Boolean $\mathbf{B}(B)$. The author proposes two duality theorems: for the category of all sets and binary relations between them considered as morphisms, and also for the category of all binary relations and their 2-morphisms.
Keywords: binary relation, Boolean, complete $\vee$-homomorphism, duality of categories.

References

1. **Kon P.** *Universalnaya algebra* (Universal algebra), M.: Mir, 1968, 352 p.

2. **Arkhangelskiy A. V.** *Kantorovskaya teoriya mnozhestv* (Cantor theory of sets), M.: Izd-vo MGU, 1988, 112 p.

3. **Birkgoff G., Barti T.** *Sovremennaya prikladnaya algebra* (Modern applied algebra), M.: Mir, 1976, 400 p.

4. **Vechtomov Ye. M.** Binarnyye otnosheniya (Binary relations), *Matematika v obrazovanii*, 2007, v. 3, pp. 41–51.

5. **Vechtomov Ye. M.** O binarnykh otnosheniyakh dlya matematikov i informatikov (On binary relations for mathematicians and computer scientists), *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta*, 2012, 1 (3), pp. 51–58.

6. **Vechtomov Ye. M.** *Matematika: osnovnyye matematicheskiye struktury: uchebnoye posobiye dlya akademicheskogo bakalavriata* (Mathematics: Basic Mathematical Structures: A Manual for Academic Baccalaureate), 2-ye izd, M.: Yurayt, 2018, 296 p.

7. **Kuk D., Beyz G.** *Kompyuternaya matematika* (Computer Mathematics), M.: Nauka, 1990, 384 p.

8. **Maltsev A. I.** Algebraicheskiye sistemy (Algebraic Systems), M.: Nauka, 1970, 392 p.

9. **Tsalenko M. SH.** *Modelirovaniye semantiki v bazakh dannykh* (Simulation of semantics in databases), M.: Nauka, 1989, 288 p.

10. **Shreyder YU. A.** *Ravenstvo. Skhodstvo. Poryadok* (Equality. Similarity. Order), M.: Nauka, 1971, 256 p.

11. **Grettser G.** *Obshchaya teoriya reshetok* (The general theory of lattices), M.: Mir, 1982, 456 p.

12. **Plotkin B. I**. *Universalnaya algebra, algebraicheskaya logika i bazy dannykh* (Universal algebra, algebraic logic and databases), M.: Nauka, 1991, 448 p.

Для цитирования: Вечтомов Е. М. Бинарные отношения и гомоморфизмы булеанов // *Вестник Сыктывкарского университета.*

Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 1 (30). С. 3–15.

For citation: Vechtomov E. M. Binary relations and homomorphisms of Booleans, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, 1 (30), pp. 3–15.

ВятГУ *Поступила 04.06.2019*