Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.3.1999

УДК 517.987

Некоторые вопросы теории пространств Лебега–Рохлина

А. А. Самородницкий

Приводятся различные свойства пространств Лебега–Рохлина. Основные результаты связаны с факторпространствами и независимыми системами образующих.

В работе рассматривается ряд вопросов теории пространств Лебега–Рохлина. Мы приводим еще один эквивалент определения пространства Лебега–Рохлина, рассматриваем множество значений меры на некоторых классах открытых и замкнутых множеств вполне несвязной топологии, порожденной системой образующих, доказываем наличие множества нулевой меры определенной мощности в некотором пространстве, тождественном по $mod\,0$ заданному пространству Лебега–Рохлина, рассматриваем факторпространства обобщенного канторова дисконтинуума, изучаем свойства независимых систем образующих. Особого внимания заслуживает теорема 7 о тривиальности радонового продолжения меры в случае, когда топология порождается независимой системой образующих пространства с мерой. Без комментариев используются терминология и результаты монографий [1] и [2], а также сведения о метрической структуре $(\mathfrak{X}, \mu)$ пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ из [3]. Пространства Лебега впервые введены и изучены в [4].

1. Об одном эквиваленте определения пространства Лебега–Рохлина. В монографии [1] пространство Лебега–Рохлина определяется следующим образом. В пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ с системой образующих Σ вводится вполне несвязная топология $\mathcal{T} = \mathcal{T}\{\Sigma\}$ (как наименьшая топология, в которой множества из Σ являются открыто–замкнутыми). Пусть $C\{\Sigma\}$ обозначает класс всех компактов в топологическом пространстве $(\Omega, \mathcal{T})$. Очевидно, что класс $C\{\Sigma\}$ является непустым. Пусть $(\mathcal{F})^\mu$ — это μ–пополнение σ–алгебры $\mathcal{F}$.

Определение 1. *Говорим, что μ является Σ–плотной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $K \in C\{\Sigma\} \cap (\mathcal{F})^{\mu}$ с $\mu(K) > 1 - \varepsilon$. Пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ называется пространством Лебега–Рохлина, если в нем существует система образующих Σ, для которой μ является Σ–плотной.*

Мы дадим "усиление" определения 1, а затем покажем, что эти два определения эквивалентны. Пусть $\mathcal{R} = \alpha\{\Sigma\}$ наименьшая алгебра, содержащая Σ (алгебра открыто–замкнутых множеств топологии $\mathcal{T}$). Через $\mathcal{R}_{\delta}$ обозначается класс пересечений всевозможных конечных или счетных наборов множеств из $\mathcal{R}$.

Определение 2. *Говорим, что μ сильно Σ–плотна, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество $K \subset \Omega$, обладающее свойствами: $K \in \mathcal{R}_{\delta}$, $K \in C\{\Sigma\}$, $\mu(K) > 1 - \varepsilon$.*

Теорема 1. *μ сильно Σ–плотна тогда и только тогда, когда μ является Σ–плотной.*

Доказательство. Необходимость теоремы очевидна. Доказываем достаточность. Пусть μ Σ–плотна. Берем произвольно $\varepsilon > 0$ и пусть $K \in (\mathcal{F})^{\mu} \cap C\{\Sigma\}$ с $\mu(K) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Известно, что для любого $A \in \mathcal{F}$ и любого $\delta > 0$ существует $F \in \mathcal{R}_{\delta}$ с $F \subset A$ и $\mu(A \setminus F) < \delta$. Пусть $F \subset K$, $F \in \mathcal{R}_{\delta}$ и $\mu(K \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда F является замкнутым подмножеством компакта, откуда $F \in C\{\Sigma\}$. Ясно, что $\mu(F) > 1 - \varepsilon$.

2. О множестве значений меры на некоторых классах множеств. Пусть пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ имеет систему образующих Σ, алгебру образующих $\mathcal{R} = \alpha\{\Sigma\}$ и удовлетворяет условию

(A_1) *В $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ нет подпространств нулевого метрического веса.*

Напомним, что в этом случае метрический вес каждого подпространства бесконечен (см. [1],[2],[3]). Пусть $\mathcal{R}_{\sigma}$ — класс всевозможных объединений конечных или счетных наборов множеств из $\mathcal{R}$. Смысл обозначений $\mathcal{R}_{\sigma\delta}$ и $\mathcal{R}_{\delta\sigma}$ аналогичен. Если $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$, то $\mu(\mathcal{F})$ обозначает множество значений меры μ на элементах класса $\mathcal{K}$, то есть $\mu(\mathcal{K}) = \{\mu A : A \in \mathcal{K}\} \subset [0, 1]$.

Теорема 2. *Если выполнено условие (A_1), то мера μ достигает любое из своих значений на каждом из классов $\mathcal{R}_{\delta}$ и $\mathcal{R}_{\sigma}$, то есть $\mu(\mathcal{R}_{\delta}) = \mu(\mathcal{R}_{\sigma}) = [0, 1]$.*

Вначале дадим некоторые пояснения в связи с условием (A_1).

Во–первых, если $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ было бы пространством конечного метрического веса, то его можно представить в виде соединения (дизъюнктной суммы) конечного числа $\mathcal{F}$–измеримых подпространств нулевого метрического веса: $\Omega = \bigoplus_{k=1}^{n} \Omega_k$. Тогда $\mu\left(\mathcal{F}_{\Omega_k}\right) = \{0; \mu(\Omega_k)\}$ и $\mu(\mathcal{F}) = \left\{\sum_{k\in N} \mu(\Omega_k) : \ N \subset \{1, 2, \ldots, n\}\right\}$. Видим, что множество $\mu(\mathcal{F})$ конечно.

Во–вторых, если бы $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ являлось соединением счетного семейства своих $\mathcal{F}$–измеримых подпространств нулевого метрического веса $\Omega = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \Omega_k$, то можно считать $\mu(\Omega_{n+1}) \leq \mu(\Omega_n)$ для $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\mu\left(\mathcal{F}_{\Omega_k}\right) = \{0; \mu(\Omega_k)\} \quad \text{и} \quad \mu(\mathcal{F}) = \left\{\sum_{k\in N} \mu(\Omega_k) : \ N \subset \mathbb{N}\right\}.$$

Характеристику множества $\mu(\mathcal{F})$ в этой ситуации дают следующие два примера.

Пример 1. Пусть $\mu(\Omega_1) = \frac{3}{4}$, тогда $\sum_{n=2}^{\infty} \mu(\Omega_n) = \frac{1}{4}$. Очевидно, что $\sum_{k\in K} \mu(\Omega_k) \geq \frac{3}{4}$, если $K \subset \mathbb{N}$ содержит 1, и что $\sum_{k\in K} \mu(\Omega_k) \leq \frac{1}{4}$, если $1 \notin K$. Получаем $\mu(\mathcal{F}) \subset \left[0; \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}; 1\right] \neq [0; 1]$.

Пример 2. Пусть $\mu(\Omega_n) = \frac{1}{2^n}$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда, как известно, для любого $\alpha \in [0; 1]$ существует последовательность $\{\alpha_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ с $\alpha_n \in \{0; 1\}$ и $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2^n}$. Видим, что в этом случае $\mu(\mathcal{F}) = [0; 1]$.

В–третьих, если $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ метрически однородно и имеет ненулевой метрический вес, то $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ имеет μ–независимую систему $\mathcal{E} = \{E_n : N \in \mathbb{N}\}$ с $\mu(E_n) = \frac{1}{2}$. Обозначим $\Omega_1 = E_1$, $\Omega_2 = E_2 \setminus E_1, \ldots, \Omega_n = E_n \setminus (E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_{n-1}), \ldots$. Тогда $\mu(\Omega_n) = \frac{1}{2^n}$ при $n \in \mathbb{N}$. Если $\mathcal{F}_1$ наименьшая σ–алгебра, содержащая семейство $\{\Omega_n : n \in \mathbb{N}\}$, то $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ и в силу примера 2 $[0; 1] = \mu(\mathcal{F}_1) \subset \mu(\mathcal{F}) \subset [0; 1]$, то есть $\mu(\mathcal{F}) = [0; 1]$.

В–четвертых, пусть $\Omega = \Omega_0 \oplus \bigoplus_{n\in N} \Omega_n$, где Ω_0 метрически однородное подпространство ненулевого метрического веса, а Ω_n при $n \in N \subset \mathbb{N}$ являются подпространствами нулевого метрического веса. Возможны ситуации, описываемые следующими примерами.

Пример 3. Если $\mu(\Omega_0) = \frac{1}{4}$, $N = \mathbb{N}$, $\mu(\Omega_1) = \frac{5}{8}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \mu(\Omega_n) = \frac{1}{8}$, то простые вычисления приводят нас к выводу $\mu(\mathcal{F}) \subset \left[0; \frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{8}; 1\right] \neq$

$[0;1]$.

Пример 4. Если $\mu(\Omega_0) \geq \dfrac{1}{2}$, то несложная проверка дает нам $\mu(\mathcal{F}) = [0;1]$.

Наконец, в–пятых, если $\Omega = \bigoplus_{n \in N} \Omega_n$, где Ω_n метрически однородные подпространства бесконечного метрического веса, $N \subset \mathbb{N}$, то $\mu(\mathcal{F}_{\Omega_n}) = [0;\alpha_n]$ при $\alpha_n = \mu(\Omega_n), n \in N$. Тогда $\mu(\mathcal{F}) = \left\{ \sum\limits_{n \in N} x_n : \ x_n \in [0;\alpha_n] \right\} = [0;1]$.

Видим, что из условия (A_1) вытекает $\mu(\mathcal{F}) = [0;1]$. Пусть $\sigma\{\Sigma\}$ наименьшая σ–алгебра, содержащая Σ. Тогда легко получаем $\mu(\sigma\{\Sigma\}) = \mu\left((\mathcal{F})^{\mu}\right) = [0;1]$.

Хорошо известно, что $\mu(\mathcal{R}_{\sigma\delta}) = \mu(\mathcal{R}_{\delta\sigma}) = [0;1]$, так как $\mathcal{R}_{\sigma\delta}$ содержит все $\sigma\{\Sigma\}$–измеримые оболочки множеств из $\mathcal{F}$, а $\mathcal{R}_{\delta\sigma}$ все $\sigma\{\Sigma\}$–измеримые внутренности множеств из $\mathcal{F}$.

Известно также, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $A \in (\mathcal{F})^{\mu}$ существует $B \in \mathcal{R}$ с $\mu(A \,\Delta\, B) < \varepsilon$, где $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) + (B \setminus A)$.

Обозначим $X = \mu(\mathcal{R})$. Пусть на $\mathbb{R}$ подразумевается наименьшая топология, содержащая интервалы $(a;b)$ с $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ (естественная топология прямой), а на $[0;1]$ топология, индуцированная естественной топологией прямой. Условие (A_1) ниже считается всюду выполненным.

Лемма 1. *X всюду плотно в* $[0;1]$.

Действительно, достаточно проверить, что для любого $a \in [0;1]$ существует последовательность $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ с $a_n \longrightarrow a$ при $n \to \infty$. Пусть $a \in [0;1] \setminus X$. (Случай $a \in X$ тривиален: $a_n = a$ при $n \in \mathbb{N}$.) Тогда существует $A \in \mathcal{F}$ с $\mu(A) = a$ (аргументация этого приведена выше). Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выбираем $A_n \in \mathcal{R}$ с $\mu(A \,\Delta\, A_n) < \dfrac{1}{n}$. Обозначим $a_n = \mu(A_n)$. Тогда $|a - a_n| < \dfrac{1}{n}$, откуда $a_n \longrightarrow a$. Лемма доказана.

Доказывваем теорему 2. Пусть $a \in [0;1] \setminus X$. Достаточно убедиться в наличии $E \in \mathcal{R}_{\delta}$ с $\mu(E) = a$ (тогда для $1 - a \in [0;1]$ и $E' \in \mathcal{R}_{\delta}$ с $\mu(E') = 1 - a$ имеем $E = \Omega - E'$, $\mu(E) = a$, $E \in \mathcal{R}_{\sigma}$). Случай $a \in X$ тривиален, так как достаточно взять $E \in \mathcal{R} \subset \mathcal{R}_{\delta} \cap \mathcal{R}_{\sigma}$ с $\mu(E) = a$.

В силу доказанной выше леммы, для любого $\varepsilon > 0$ существует $G_1 \in \mathcal{R}$ с $a < \mu(G_1) \leq a + \dfrac{\varepsilon}{2}$, так как $X \cap \left(a; a + \dfrac{\varepsilon}{2}\right] \neq \emptyset$. Учитывая, что $\mu(G_1) > 0$ и что $\mathcal{R}_{G_1}$ является алгеброй образующих в подпространстве $(G_1, \mathcal{F}_{G_1}, \mu_{G_1})$, получаем (с учетом (A_1)) $\mu(\mathcal{R}_{G_1}) = [0; \mu(G_1)]$. Заметим справедливость включения $\mathcal{R}_{G_1} \subset \mathcal{R}$. Поэтому имеется $G_2 \in \mathcal{R}$ с $G_2 \subset$

G_1 и $a < \mu(G_2) \leq a + \frac{\varepsilon}{2^2} = a + \frac{\varepsilon}{4}$. Ясно, что $\mathcal{R}_{G_2} \subset \mathcal{R}$, $\mu(\mathcal{R}_{G_2}) = [0; \mu(G_2)]$; находим $G_3 \subset G_2$, $G_3 \in \mathcal{R}$ с $a < \mu(G_3) \leq a + \frac{\varepsilon}{2^3} = a + \frac{\varepsilon}{8}$. Продолжая построение по индукции, получим последовательность $\{G_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{R}$ с $G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \ldots$ и $a < \mu(G_n) \leq a + \frac{\varepsilon}{2^n}$ при $n \in \mathbb{N}$. Пусть $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. Тогда $a \leq \mu(E) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(G_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \left(a + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = a$, откуда $\mu(E) = a$. Ясно, что $E \in \mathcal{R}_\delta$. Теорема доказана.

3. О мощности пространства с компактной алгеброй образующих. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ вполне однородное пространство с системой образующих $\Sigma = \{A_t : t \in T\}$, компактной алгеброй образующих $\mathcal{R} = \alpha\{\Sigma\}$, где $\tau(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = \mathrm{v}(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = card\, T \geq \aleph_0$. Считаем $\mathcal{F} = (\mathcal{F})^\mu$.

Лемма 2. *При сделанных предположениях существует вполне однородное пространство* $(\Omega', \mathcal{F}', \mu')$ *с* $\mathcal{F}' = (\mathcal{F}')^{\mu'}$, $\tau(\Omega', \mathcal{F}', \mu') = \mathrm{v}(\Omega', \mathcal{F}', \mu') = card\, T$, *с системой образующих* Σ' *и компактной алгеброй образующих* $\mathcal{R}' = \alpha\{\Sigma'\}$, *в котором имеется множество* $Y \in \mathcal{R}'$ *с* $\mu' Y = 0$ *и* $card\, Y = card\, 2^T$, *причем* $(\Omega', \mathcal{F}', \mu')$ *тождественно* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *по* $mod\, 0$.

Доказательство. Берем Y с $card\, Y = card\, 2^T$ и $\Omega' = \Omega + Y$. Пусть $\mathcal{G} = \{C_t : t \in T\} \subset 2^Y$ разделяющая точки множества Y компактная система (то есть для любых $B_t \in \{C_t; Y \setminus C_t\}$ при $t \in T$ будет $\bigcap\limits_{t\in T} B_t \neq \emptyset$; существование такой системы $\mathcal{G}$ вытекает из наличия биекции Y на $\{0;1\}^T$). Обозначим $A'_t = A_t + C_t$, $\Sigma'' = \{A'_t : t \in T\}$, $\Sigma' = \Sigma'' + \{Y\}$. Ясно, что Σ' система образующих в $(\Omega', \mathcal{F}', \mu')$, где $\mathcal{F}' = \{A = A_1 + A_2 : A_1 \in \mathcal{F},\ A_2 \subset Y\}$, $\mu'(A) = \mu(A_1)$. Поскольку $\mathcal{F} = \mathcal{F}'_\Omega$ и $\mathcal{R}' = \alpha\{\Sigma'\}$ в Ω' обладает свойством: $\mathcal{R} = \mathcal{R}'_\Omega$ компактная алгебра образующих в $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ и $\alpha\{\mathcal{G}\} = \mathcal{R}'_Y$ является разделяющей точки компактной алгеброй (компактным классом и алгеброй) в Y, то как известно (см., например, [1]) $\mathcal{R}'$ является компактным классом в Ω'. Видим, что $\mathcal{R}'$ — компактная алгебра образующих в $(\Omega', \mathcal{F}', \mu')$.

Учитывая, что $\mu' Y = 0$ и $\mathcal{F}'_\Omega = \mathcal{F}$, $\mu'_\Omega \equiv \mu$, получаем тождественность $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ и $(\Omega', \mathcal{F}', \mu')$ по $mod\, 0$. Лемма доказана.

4. О базе открыто–замкнутых множеств факторпространства вполне несвязного компакта. Пусть $\Omega \neq \emptyset$ и $\Sigma \subset 2^\Omega$ разделяет точки множества Ω. Рассмотрим наименьшую топологию $\mathcal{T}$ в Ω, в которой множества системы Σ являются открыто замкнутыми. Предположим, что $(\Omega, \mathcal{T})$ является компактом (или, то же самое, что $\mathcal{R} = \alpha\{\Sigma\}$

является компактным классом).

Если $\mathcal{K} \subset 2^{\Omega}$, то $\xi_{\mathcal{K}}$ обозначает разбиение, порожденное множествами класса $\mathcal{K}$ (то есть для $x, y \in \Omega$, $x \neq y$ точки x и y принадлежат одному элементу разбиения $\xi_{\mathcal{K}}$ тогда и только тога, когда для любого $A \in \mathcal{K}$ пересечение $A \cap \{x; y\}$ либо пусто, либо содержит обе точки x и y).

Пусть $\mathfrak{M}\{\mathcal{K}\}$ обозначим полную алгебру (всех $\xi_{\mathcal{K}}$–множеств), порожденную классом $\mathcal{K}$. Пусть $\alpha\{\mathcal{K}\}$ обозначает наименьшую алгебру, содержащую $\mathcal{K}$.

Теорема 3. *При сделанных предположениях для любого класса* $\Sigma_1 \subset \Sigma$ *будет* $\alpha\{\Sigma_1\} = \alpha\{\Sigma\} \cap \mathfrak{M}\{\Sigma_1\}$.

Доказательство. Так как $\alpha\{\Sigma\} \cap \mathfrak{M}\{\Sigma_1\}$ алгебра, содержащая Σ_1, а $\alpha\{\Sigma_1\}$ наименьшая из таких алгебр, то, очевидно, что $\alpha\{\Sigma_1\} \subset \alpha\{\Sigma\} \cap \mathfrak{M}\{\Sigma_1\}$.

Для доказательства обратного включения рассмотрим фактор–множество $X = \Omega_\xi$, где $\xi = \xi_{\Sigma_1}(\Omega)$, и индуцируем в нем топологию $\mathcal{T}_1$ (элементы класса Σ_1 являются ξ–множествами и открыто–замкнуты в $(\Omega, \mathcal{T})$; тогда $\mathcal{T}_1$ определяется как наименьшая топология в X, в которой множества класса $(\Sigma_1)_\xi$ являются открыто–замкнутыми). Пусть $E \in (\alpha\{\Sigma\} \cap \mathfrak{M}\{\Sigma_1\}) \setminus \{\emptyset; \Omega\}$. Тогда E является ξ–множеством. Пусть $\mathcal{T}_2$ — наименьшая топология в X, в которой множества класса $(\Sigma_1)_\xi \cup \{E_\xi\}$ являются открыто–замкнутыми.

Ясно, что $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ и что $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ являются хаусдорфовыми топологиями. Так как $\mathcal{R}$ компактный класс, то для любого $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$ будет компактным классом, поэтому $\alpha\{\Sigma_1\}$ и $\alpha\{\Sigma_1 \cup \{E\}\}$ компактные классы. Тогда легко проверить, что $(X, \mathcal{T}_1)$ и $(X, \mathcal{T}_2)$ компакты. Хорошо известно, что компактная топология на X является минимальной среди хаусдорфовых топологий, то есть $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$, поэтому $E_\xi \in \mathcal{T}_2$ является открыто–замкнутым множеством в $\mathcal{T}_1$. Ясно, что $E_\xi \in \alpha\{(\Sigma_1)_\xi\}$ в X, откуда $E \in \alpha\{\Sigma_1\}$. Мы доказали, что $\alpha\{\Sigma\} \cap \mathfrak{M}\{\Sigma_1\} \subset \alpha\{\Sigma_1\}$, поэтому теорема доказана.

Пусть $\mathcal{T}_1'$ обозначает наименьшую топологию, в которой множества из Σ_1 открыто–замкнуты. Тогда $\mathcal{T}_1 = (\mathcal{T}_1')_\xi$ в том смысле, что $\mathcal{T}_1'$ состоит из множеств $U \in \mathfrak{M}\{\Sigma_1\}$, для которых $U_\xi = \{C \in \xi : \ C \subset U\} \in \mathcal{T}_1$. Множества $A \in \mathfrak{M}\{\Sigma_1\}$ и $A_\xi = \{C \in \xi : \ C \subset A\}$ называем соответствующими (относительно ξ).

Теорема 4. *Если* $(\Omega, \mathcal{T})$ *компакт, то* $\mathcal{T}_1' = \mathcal{T} \cap \mathfrak{M}\{\Sigma_1\}$.

Доказательство. Включение $\mathcal{T}_1' \subset \mathcal{T} \cap \mathfrak{M}\{\Sigma_1\}$ очевидно. Докажем обратное включение. Пусть $U \in \mathcal{T} \cap \mathfrak{M}\{\Sigma_1\}$. Обозначим $F = \Omega \setminus U$. Тогда $F \in \mathfrak{M}\{\Sigma_1\}$. Для любого открытого покрытия F множествами из $\mathcal{P}_1$ имеется конечное подпокрытие, так как $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{T}$ и F компакт в $(\Omega, \mathcal{T})$. Если $X = \Omega_\xi$, $\mathcal{T}_1 = (\mathcal{T}'_1)_\xi$ и множество F_ξ соответствует F в X, то ясно, что F_ξ компактно в $(X, \mathcal{T}_1)$, поскольку достаточно рассматривать открытые в $(X, \mathcal{T}_1)$ покрытия множества F_ξ элементами класса $((\Sigma_1)_\xi \cup (\Sigma_1)^c_\xi)_d$, который соответствует (относительно ξ) классу $\mathcal{P}_1$.

Поскольку $(X, \mathcal{T}_1)$ является, в частности, хаусдорфовым пространством, то компактное F_ξ замкнуто в $(X, \mathcal{T}_1)$. Если обозначить $\mathcal{R}_1 = \alpha\{\Sigma_1\}$ в X, то $(\mathcal{R}_1)_\xi$ является базой открыто–замкнутых множеств в $(X, \mathcal{T}_1)$ и F_ξ является пересечением семейства $\{(G_s)_\xi : \ s \in S\}$ множеств из $(\mathcal{R}_1)_\xi$. Пусть при $s \in S$ множество G_s соответствует $(G_s)_\xi$. Тогда $G_s \in \mathcal{R}_1$ и $F = \bigcap\limits_{s\in S} G_s$, то есть F замкнуто в $(\Omega, \mathcal{T}'_1)$, откуда $U \in \mathcal{T}'_1$. Теорема доказана.

Непосредственно из теоремы 4 вытекают следующие два утверждения.

Следствие 1. $(\mathcal{T}'_1)^c = \mathcal{T}^c \cap \mathfrak{M}\{\Sigma_1\}$, *то есть всякое замкнутое в* $(\Omega, \mathcal{T})$ ξ*-множество принадлежит* $(\mathcal{T}'_1)^c$.

Следствие 2. *Если* $\mathcal{K}_\sigma$ *обозначает класс конечных или счетных объединений множеств класса* $\mathcal{K}$, *а* $\mathcal{K}_\delta$ *— класс конечных или счетных пересечений множеств класса* $\mathcal{K}$, *то*

$$(\mathcal{R}_1)_\sigma = \mathcal{R}_\sigma \cap \mathfrak{M}\{\Sigma_1\}, \quad (\mathcal{R}_1)_\delta = \mathcal{R}_\delta \cap \mathfrak{M}\{\Sigma_1\}.$$

Пусть φ_ξ обозначает естественное отображение Ω на X, сопоставляющее каждой $\omega \in \Omega$ тот элемент $C \in X$ разбиения ξ, для которого $\omega \in C$. Понятно, что $\varphi_\xi(\mathfrak{M}\{\Sigma_1\}) = 2^X$. Но класс $\mathfrak{M}\{\Sigma_1\}$ не исчерпывает 2^Ω. Продолжим φ_ξ до отображения $\varphi : 2^\Omega \longrightarrow 2^X$, полагая для $A \subset \Omega$ $\varphi(A) = \{C_\xi \in X : \ C \cap A \neq \emptyset\}$, где $C \in \mathfrak{M}\{\Sigma_1\}$ соответствует $C_\xi \in X$.

Рассмотрим еще одно отображение $\psi : 2^\Omega \longrightarrow \mathfrak{M}\{\Sigma_1\}$, определенное так: для $A \subset \Omega$ $\psi(A) = \varphi_\xi^{-1}(\varphi(A))$. Другими словами, $\psi(A)$ есть объединение всех элементов разбиения ξ, имеющих непустое пересечение с A, то есть $\psi(A)$ является наименьшим содержащим A ξ–множеством..

Введенные выше обозначения и условия (в частности, что Σ разделяет точки множества Ω и что $(\Omega, \mathcal{T})$ компакт) остаются в силе. Будем говорить, что $\Sigma = \{A_t : \ t \in T\}$ является компактной системой, если $\bigcap\limits_{t\in T} B_t \neq \emptyset$ при любом выборе $B_t \in \{A_t : \Omega \setminus A_t\}$ для $t \in T$.

Теорема 5. *Если* $\Sigma = \{A_t : \ t \in T\}$ *компактная система и если* $G \in \mathcal{P} = (\Sigma \cup \Sigma^c)_d$, *то* $\psi(G) \in \mathcal{P}_1 = (\Sigma_1 \cup \Sigma_1^c)_d$.

Доказательство. Пусть $G \in \mathcal{P} = (\Sigma \cup \Sigma^c)_d$. Если $\Sigma = \{A_t : \ t \in T\}$, то для некоторого $T_1 \subset T$ будет $\Sigma_1 = \{A_t : \ t \in T_1\}$. Учитывая, что при $B_t \in \{A_t; \Omega \setminus A_t\}$ и при некотором конечном $T' \subset T$ будет $G = \bigcap_{t \in T'} B_t = \bigcap_{t \in T' \cap T_1} B_t \cap \bigcap_{t \in T' \setminus T_1} B_t$, где пересечение пустого семейства множеств считается равным Ω. Ясно, что для $G \in \mathcal{P}$ найдутся $G_k \in \mathcal{P}_k$, $k = 1, 2$, с $G = G_1 \cap G_2$, где $\Sigma_2 = \Sigma \setminus \Sigma_1$ и $\mathcal{P}_k = (\Sigma_k \cup \Sigma_k^c)_d$ при $k = 1, 2$.

Если Σ является компактной системой, то представление $G = G_1 \cap G_2$ с $G_k \in \mathcal{P}_k$ при $k = 1, 2$ единственно для любого $G \neq \emptyset$. Действительно, в этом случае каждый элемент разбиения $\xi = \xi_{\Sigma_1}(\Omega)$ имеет непустое (одноточечное) пересечение с каждым элементом разбиения $\xi' = \xi_{\Sigma_2}(\Omega)$. При этом G_1 является ξ-множеством, а G_2 — ξ'-множеством. Если $C \in \xi$ и $C \subset G_1$, то $C \cap G_2 \neq \emptyset$ и $C \cap G_2 \subset G_1 \cap G_2 = G$, поэтому $C \cap G \neq \emptyset$. Видим, что G_1 является наименьшим ξ-множеством, содержащим G. Аналогично, можно проверить, что G_2 является наименьшим ξ'-множеством, содержащим G. Ясно, что в этом случае $\psi(G) = G_1 \in \mathcal{P}_1$. Теорема 5 доказана.

Следствие 3. *Если Σ компактная система и $K \in \mathcal{R}$, то $\psi(K) \in \mathcal{R}_1$.*

Действительно, для дизъюнктного семейства $\{K_1, K_2, \dots, K_n\} \subset \mathcal{P}$ с $K = \sum_{k=1}^{n} K_k \in \mathcal{R}$ легко проверяется соотношение $\psi(K) = \bigcup_{k=1}^{n} \psi(K_k) \in \mathcal{R}_1$ (правая и левая части этого равенства содержат одни и те же элементы разбиения ξ: если $C \in \xi$ и $C \cap K \neq \emptyset$, то существует $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ с $C \cap K_k \neq \emptyset$; если при некотором $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ будет $C \cap K_k \neq \emptyset$, то, тем более, $C \cap K \neq \emptyset$), что и требовалось.

Следствие 4. *Если Σ компактная система и $K \in \mathcal{R}_\sigma$, то $\psi(K) \in (\mathcal{R}_1)_\sigma$.*

Действительно, если $\{K_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{R}$ дизъюнктное семейство, для которого $K = \sum_{n \in \mathbb{N}} K_n \in \mathcal{R}_\sigma$, то $\psi(K) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \psi(K_n)$, ибо из $C \in \xi$ и $C \cap K \neq \emptyset$ $(C \subset \psi(K))$ вытекает наличие $k \in \mathbb{N}$ с $C \cap K_k \neq \emptyset$, то есть $C \subset \psi(K_k) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \psi(K_n)$, а при $C \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \psi(K_n)$ существует $k \in \mathbb{N}$ с $C \subset \psi(K_k)$, откуда $C \cap K_k \neq \emptyset$ и, тем более, $C \cap K \neq \emptyset$ $(C \subset \psi(K))$.

Следствие 5. *Если Σ компактная система и $K \in \mathcal{R}_\delta$, то $\psi(K) \in (\mathcal{R}_1)_\delta$.*

Действительно, если $\{K_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{R}$ убывающее семейство, для которого $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \in \mathcal{R}_\delta$, то $\psi(K) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \psi(K_n)$, ибо из $C \in \xi$ и $C \cap K \neq \emptyset$ $(C \subset \psi(K))$ вытекает $C \cap K_k \neq \emptyset$, то есть $C \subset \psi(K_k)$ для любого $k \in \mathbb{N}$, а при $C \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \psi(K_n)$ будет $C \subset \psi(K_k)$ или $C \cap K_k \neq \emptyset$ при любом $k \in \mathbb{N}$, тогда семейство $\{C; K_k : k \in \mathbb{N}\}$ является центрированной системой замкнутых множеств в $(\Omega, \mathcal{T})$, откуда $C \cap \bigcap_{k\in\mathbb{N}} K_k = C \cap K \neq \emptyset$ или $C \subset \psi(K)$.

Теорема 6. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *пространство с системой образующих* Σ *и компактной алгеброй образующих* $\mathcal{R} = \alpha\{\Sigma\}$. *Пусть* $\Sigma_1 \subset \Sigma$, $\mathcal{F}'_1 = \mathcal{F} \cap \mathfrak{M}\{\Sigma_1\}$, $X = \Omega_\xi$, $\mathcal{F}_1 = (\mathcal{F}'_1)_\xi$, $\mathcal{R}'_1 = \alpha\{\Sigma_1\}$, $\mathcal{R}_1 = (\mathcal{R}'_1)_\xi$, $\mu_1 \equiv (\mu'_1)_\xi$, *где* μ'_1 *— часть меры* μ, *определенная на* $\mathcal{F}'_1$. *Пусть* $\mathcal{F} = (\mathcal{F})^\mu$. *Тогда* $\mathcal{R}_1$ *является компактной алгеброй образующих в* $(X, \mathcal{F}_1, \mu_1)$.

Доказательство. В обозначениях теорем 3 и 4 $(X, \mathcal{T}_1)$ является компактом с базой открыто–замкнутых множеств $\mathcal{R}_1$, которая в этом случае является компактным классом. Для доказательства теоремы 6 достаточно убедиться в том, что $\mathcal{R}_1$ является алгеброй образующих в $(X, \mathcal{F}_1, \mu_1)$.

Предположим вначале, что Σ является компактной системой образующих. Пусть $A \in \mathcal{F}'_1 \subset \mathcal{F}$. Тогда существует $K \in \mathcal{R}_\delta$ с $K \subset A$ и $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$ произвольное наперед заданное число). Пусть $K_1 = \psi(K)$. По следствию 5 будет $K_1 \in (\mathcal{R}'_1)_\delta$. Кроме того, в силу $A \in \mathfrak{M}\{\Sigma_1\}$ имеем $K \subset K_1 \subset A$ (ведь K_1 — наименьшее ξ–множество, содержащее K). Поэтому $\mu(A \setminus K_1) \leq \mu(A \setminus K) < \varepsilon$.

Мы доказали, что для любых $\varepsilon > 0$ и $A \in \mathcal{F}'_1$ существует $K_1 \subset A$ с $K_1 \in (\mathcal{R}'_1)_\delta$ и $\mu(A \setminus K_1) < \varepsilon$. Переходя к дополнениям, несложно по любым $\varepsilon > 0$ и $A \in \mathcal{F}'_1$ найти $U \in (\mathcal{R}'_1)_\sigma$ с $A \subset U$ и $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$. Значит, $(\mathcal{R}_1)\sigma\delta$ содержит $\sigma\{\mathcal{R}_1\}$–измеримые оболочки $\mathcal{F}_1$–измеримых множеств в $(X, \mathcal{F}_1, \mu_1)$, то есть $\mathcal{R}_1$ является алгеброй образующих в $(X, \mathcal{F}_1, \mu_1)$.

Пусть теперь Σ не является компактной системой образующих (но $\mathcal{R}$ является компактной алгеброй образующих) в $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Рассмотрим Σ–компактификацию $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mu})$ пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ соответствующие $\widetilde{\Sigma} = \{\widetilde{A}_t : \ t \in T\}$ и $\widetilde{\mathcal{R}}$, а также

$$\widetilde{\Sigma}_1, \ \widetilde{\xi} = \xi_{\widetilde{\Sigma}_1}\left(\widetilde{\Omega}\right), \ \widetilde{X} = \widetilde{\Omega}_{\widetilde{\xi}}, \ \widetilde{\mathcal{F}}'_1 = \widetilde{\mathcal{F}} \cap \mathfrak{M}\{\widetilde{\Sigma}_1\}, \ \widetilde{\mathcal{F}}_1 = \left(\widetilde{\mathcal{F}}'_1\right)_{\widetilde{\xi}}, \ \widetilde{\mu}_1 \equiv \left(\widetilde{\mu}'_1\right)_{\widetilde{\xi}},$$

где $\widetilde{\mu}'_1$ является частью $\widetilde{\mu}$, определенной на $\widetilde{\mathcal{F}}'_1$. По доказанному выше пространство $\left(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{F}}_1, \widetilde{\mu}_1\right)$ имеет компактную алгебру образующих $\widetilde{\mathcal{R}}_1 = \alpha\{\widetilde{\Sigma}_1\}$.

Покажем, что $\left(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{F}}_1, \widetilde{\mu}_1\right)$ с компактной системой образующих $\left(\widetilde{\Sigma}_1\right)_{\widetilde{\xi}}$ является $(\Sigma_1)_\xi$–компактификацией $(X, \mathcal{F}_1, \mu_1)$. Действительно,

X отождествляется с $\left(\widetilde{\psi}(\Omega)\right)_{\widetilde{\xi}}$: если $\widetilde{C} \in \widetilde{\xi}$ и $\widetilde{C} \cap \Omega \neq \emptyset$ то $\widetilde{C} \in \widetilde{X}$ и $C = \widetilde{C} \cap \Omega \in X$ отождествляются. Равенство $(\Sigma_1)_\xi = \left(\left(\widetilde{\Sigma}_1\right)_{\widetilde{\xi}}\right)_X$ очевидно. Значит, $\sigma\{(\Sigma_1)_\xi\} = \left(\sigma\left\{\left(\widetilde{\Sigma}_1\right)_{\widetilde{\xi}}\right\}\right)_X$ в X. Равенство $\left(\widetilde{\mathcal{F}}_1\right)_X = \mathcal{F}_1$ вытекает из того, что $\left(\widetilde{\mu}_1\right)_e(X) = \widetilde{\mu}_e(\Omega) = 1$.

Итак, $(X, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ является подпространством в $\left(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{F}}_1, \widetilde{\mu}_1\right)$ с $\left(\widetilde{\mu}_1\right)_e(X) = 1$ и X компактно в $\left(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{T}}_1\right)$, что означает: $\mathcal{R}_1$ является компактной алгеброй образующих в $(X, \mathcal{F}_1, \mu_1)$. Теорема 6 доказана.

Следствие 6. *В условиях теоремы 4 система Σ_1 конечна или счетна, то $(X, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ является пространством Лебега.*

Действительно, $(X, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ является в этом случае измеримым подпространством в $(\Sigma_1)_\xi$–компактификации $\left(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{F}}_1, \widetilde{\mu}_1\right)$ (так как компактные подмножества пространства со счетной базой $\widetilde{\mathcal{R}}_1$ топологии $\widetilde{\mathcal{T}}_1$ являются элементами σ–алгебры $\sigma\left\{\widetilde{\mathcal{T}}_1\right\}$). Следовательно, алгебра $\mathcal{R}_1$ является компактной по $mod\,0$ системой образующих в $(X, \mathcal{F}_1, \mu_1)$.

5. Независимые системы образующих в пространствах Лебега–Рохлина. Под пространством Лебега–Рохлина будем понимать пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, обладающее компактной по $mod\,0$ алгеброй образующих. Имеет ли такое пространство компактную систему образующих? Мы дадим, в частности, положительный ответ на этот вопрос в случае наличия в $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ μ–независимой системы образующих, порождающей компактную по $mod\,0$ алгебру образующих.

Напомним, что в пространстве Лебега (в силу его сепарабельности) каждая алгебра образующих компактна по $mod\,0$ и является компактной по $mod\,0$ системой образующих. Кроме того, из наличия компактной системы образующих вытекает однородность пространства. Поэтому мы предполагаем, что в пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ имеется μ–независимая система образующих $\Sigma = \{A_t : t \in T\}$, что пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ однородно и имеет вес $\mathrm{v}(\Omega) = \tau > \aleph_0$. Если $\mathcal{K} \subset 2^\Omega$, то $\mathcal{T}\{\mathcal{K}\}$ обозначает наименьшую топологию, в которой множества совокупности $\mathcal{K}$ являются открыто–замкнутыми.

Теорема 7. *Пусть $\Sigma = \{A_t : t \in T\}$ является μ-независимой системой образующих пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, причем $0 < \mu(A_t) < 1$ при $t \in T$. Пусть $\mathcal{T} = \mathcal{T}\{\Sigma\}$. Тогда $\sigma\{\mathcal{T}\} \subset (\mathcal{F})^\mu$, где $\sigma\{\mathcal{T}\}$ обозначает* *наименьшую σ-алгебру, содержащую открытые множества топологии $\mathcal{T}$ (то есть борелевскую σ-алгебру), а $(\mathcal{F})^\mu$ — это μ-пополнение σ-алгебры $\mathcal{F}$.*

Доказательство. Если множество T конечно или счетно, то теорема очевидна, ибо в этих случаях $\sigma\{\mathcal{T}\} = \sigma\{\Sigma\} \subset \mathcal{F} \subset (\mathcal{F})^\mu$. Рассмотрим случай несчетного T. Достаточно доказать включение $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}$, полагая для удобства, что $\mathcal{F} = (\mathcal{F})^\mu$.

Предположим вначале, что система образующих Σ компактна, то есть при любом выборе $B_t \in \{A_t; \Omega - A_t\}$ при $t \in T$ будет $\bigcap\limits_{t\in T} B_t \neq \emptyset$.

Предполагая противное, обозначим через U множество, удовлетворяющее условиям $U \in \mathcal{T}$ и $\mu_{int}(U) < \mu_e(U)$. Заметим, что при этом $\mu_{int}(U) > 0$, ибо $U = \bigcup\limits_{s\in S} G_s$ при некотором семействе $\{G_s : \ s \in S\} \subset \mathcal{P} = (\Sigma\cup\Sigma^c)_d$ непустых открыто-замкнутых множеств, а для любого непустого $G \in \mathcal{P}$ существуют конечные подмножества T' и T'' множества T с $G = \bigcap\limits_{t\in T'} A_t \cap \bigcap\limits_{t\in T''} (\Omega - A_t)$, поэтому $\mu(G) = \prod\limits_{t\in T'} \mu(A_t) \times \prod\limits_{t\in T''} \mu(\Omega - A_t) > 0$ в силу условия $0 < \mu(A_t) < 1$ при $t \in T$.

Пусть $C \subset U$ является $\sigma\{\Sigma\}$-измеримой внутренностью множетва U, то есть $C \in \sigma\{\Sigma\}$ и $\mu(C) = \mu_{int}(U)$. Обозначим $E = \Omega - C$. Пусть $\Sigma_1 \subset \Sigma$ счетная система, для которой $E \in \sigma\{\Sigma_1\}$. Пусть $\Sigma_2 = \Sigma - \Sigma_1$. Заметим, что $\mu(E) > 0$ в силу $\mu(C) < \mu_e(U) \leq 1$. Рассмотрим подпространство $(E, \mathcal{F}_E, \mu_E)$ и меру ν на $\mathcal{F}$, определенную для $A \in \mathcal{F}$ равенством $\nu(A) = \mu_E(A \cap E) = \dfrac{\mu(A \cap E)}{\mu(E)}$. Тогда для $A \in \sigma\{\Sigma_2\}$ в силу μ-независимости Σ будет

$$\nu(A) = \frac{\mu(A \cap E)}{\mu(E)} = \frac{\mu(A)\mu(E)}{\mu(E)} = \mu(A), \tag{1}$$

а для $A = A_1 \cap A_2$ при $A_k \in \sigma\{\Sigma_k\}$, $k = 1, 2$ будет

$$\nu(A) = \frac{\mu(A_1 \cap A_2 \cap E)}{\mu(E)} = \frac{\mu(A_2)\mu(A_1 \cap E)}{\mu(E)} = \nu(A_1)\nu(A_2). \tag{2}$$

Очевидно, что $\nu \ll \mu$, поэтому $\mathcal{F} = (\sigma\{\Sigma\})^\mu \subset (\sigma\{\Sigma\})^\nu$, то есть Σ является компактной системой образующих пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$. При этом система Σ_2 является ν-независимой, а σ-алгебры $\sigma\{\Sigma_1\}$ и $\sigma\{\Sigma_2\}$ тоже ν-независимы. Далее, $\nu(E) = 1$. Несложно убедиться в том, что $\nu_{int}(U) = 0$ и $\nu_e(U) > 0$.

Пусть $\mathcal{P}_k = (\Sigma_k \cup \Sigma_k^c)_d$, $k = 1, 2$. В силу компактности системы Σ для любого $A \in \mathcal{P}$ существуют единственные $A_1 \in \mathcal{P}_1$ и $A_2 \in \mathcal{P}_2$ с

$A = A_1 \cap A_2$. Заметим, что для непустого $A \in \mathcal{P}$ равенство $\nu(A) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\nu(A_1) = 0$, так как $\nu(A_2) > 0$ в силу (1), (2) и условий теоремы. Класс $\mathcal{P}_1$ счетен, поэтому класс $\mathcal{K} = \{G \in \mathcal{P}_2 : \nu(G) = 0\}$ конечен или счетен. Обозначим $G_0 = \bigcup\limits_{G \in \mathcal{K}} G$. Ясно, что $G_0 \in \sigma\{\Sigma_1\}$ и $\nu(G_0) = 0$. Кроме того, возвращаясь к семейству $\{G_s : s \in S\} \subset \mathcal{P}$, удовлетворяющему условию $U = \bigcup\limits_{s \in S} G_s$, видим, что $\nu(G_s) = 0$ при любом $s \in S$. Но при каждом $s \in S$ существуют $G'_s \in \mathcal{P}_1$ и $G''_s \in \mathcal{P}_2$ с $G_s = G'_s \cap G''_s$. По доказанному выше $\nu(G'_s) = 0$, поэтому $G_s \subset G'_s \subset G_0$ при $s \in S$, откуда $U \subset G_0$ и $\nu_e(U) = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $U \in \mathcal{F}$.

Докажем теорему без предположения о компактности системы образующих Σ. Пусть $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mu})$ является Σ–компактификацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Тогда для компактной системы образующих $\widetilde{\Sigma} = \{\widetilde{A}_t : \ t \in T\}$ имеем $A_t = \widetilde{A}_t \cap \Omega$ при $t \in T$. Обозначим $\widetilde{\mathcal{T}}$ наименьшую топологию в $\widetilde{\Omega}$, в которой множества из $\widetilde{\Sigma}$ открыто–замкнуты. Система $\widetilde{\Sigma}$ является $\widetilde{\mu}$–независимой, причем при $t \in T$ имеем $0 < \widetilde{\mu}(\widetilde{A}_t) = \mu(A_t) < 1$. По доказанному выше $\widetilde{\mathcal{T}} \subset \widetilde{\mathcal{F}}$. Заметим, что $\mathcal{T} = \widetilde{\mathcal{T}}_\Omega$. В силу $\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}}_\Omega$ получаем $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}$, что и требовалось доказать.

Следствие 7. *Пусть система образующих Σ пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ удовлетворяет следующим условиям: $\Sigma = \Sigma' + \Sigma''$, причем*

1) *система $\Sigma'' = \{A_t : t \in T''\}$ является μ–независимой;*
2) *σ–алгебры $\sigma\{\Sigma'\}$ и $\sigma\{\Sigma''\}$ являются μ–независимыми;*
3) *для любого $t \in T''$ справедливы неравенства $0 < \mu(A_t) < 1$;*
4) *система Σ' конечна или счетна.*

Тогда $\mathcal{T} \subset (\mathcal{F})^\mu$.

Действительно, доказательство отличается лишь выбором счетной системы Σ_1. Достаточно, чтобы выполнялось включение $\Sigma' \subset \Sigma_1$. Остальные аргументы не меняются.

Следствие 8. *Пусть имеется пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ и системой образующих Σ. Пусть на $(\Omega, \sigma\{\Sigma\})$ задана мера ν, причем $\mu \ll \nu$, система $\Sigma = \{A_t : \ t \in T\}$ является ν–независимой, $0 < \nu(A_t) < 1$ при $t \in T$. Тогда $\mathcal{T} \subset (\mathcal{F})^\mu$.*

Действительно, по теореме 7 имеет место включение $\mathcal{T} \subset (\sigma\{\Sigma\})^\nu$. Остается заметить, что $(\sigma\{\Sigma\})^\nu \subset (\sigma\{\Sigma\})^\mu = (\mathcal{F})^\mu$.

Следствие 9. *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ является пространством с системой образующих Σ, удовлетворяющей условиям 1) — 4) следствия 7, причем дополнительно предполагается, что алгебра образующих $\mathcal{R} = \alpha\{\Sigma\}$ пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ компактна по $mod\, 0$. Тогда* *система образующих Σ компактна по $mod\,0$.*

Действительно, пусть $\mathcal{R} = \alpha\{\Sigma\}$ является алгеброй всех открыто–замкнутых множеств топологии $\mathcal{T}$ (наименьшей алгеброй, содержащей Σ). Для простоты обозначений считаем σ–алгебру $\mathcal{F}$ μ–полной: $(\mathcal{F})^\mu = \mathcal{F}$. Рассмотрим Σ–компактификацию $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma})$ и $\mathcal{R}$–компактификацию (Ω^*, Σ^*) пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Тогда можно считать, что $\Omega \subset \Omega^* \subset \widetilde{\Omega}$, причем $\Sigma^* = \widetilde{\Sigma}_{\Omega^*}$ и $\Sigma = \Sigma^*_\Omega$. Пусть $\widetilde{\mathcal{T}}$ обозначает наименьшую топологию в $\widetilde{\Omega}$, в которой все множества из $\widetilde{\Sigma}$ являются открыто–замкнутыми. Тогда Ω^* компактно в $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{T}})$. В силу следствия 7 имеем $\Omega^* \in \widetilde{\mathcal{F}}$. Поскольку по условию $\Omega \in \mathcal{F}^*$, видим, что $\Omega \in \widetilde{\mathcal{F}}$, что и требовалось.

Теперь предположим, что $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ является вполне однородным пространством, метрический вес которого $\tau(\Omega) = \tau$ (то есть равен весу). Напомним, что при $\tau > \aleph_0$ пространство с компактной по $mod\,0$ системой образующих обладает компактной системой образующих.

Лемма 3. *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ является вполне однородным пространством с системой образующих $\Sigma = \{A_t : t \in T\}$, причем $card\,T = \tau$. Пусть $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma})$ является Σ–компактификацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Обозначим $\mathcal{A} = \{(A \cap \Omega) + B : A \in \widetilde{\mathcal{F}},\ B \subset \widetilde{\Omega} - \Omega\}$, а также $\nu((A \cap \Omega) + B) = \widetilde{\mu}(A) = \mu(A \cap \Omega)$. Пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ обладает компактной системой образующих тогда и только тогда, когда компактная система образующих существует в пространстве $(\widetilde{\Omega}, \mathcal{A}, \nu)$.*

Доказательство. Ясно, что мера ν продолжает меру $\widetilde{\mu}$, причем имеет место равенство $\nu(\Omega) = 1$ и $\Sigma' = \Sigma + \{\Omega\}$ является системой образующих в $(\widetilde{\Omega}, \mathcal{A}, \nu)$. Кроме того, пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ и $(\widetilde{\Omega}, \mathcal{A}, \nu)$ тождественны по $mod\,0$. Пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ является подпространством в $(\Omega', \mathcal{F}', \mu')$и $\mathcal{A}$–измеримым подпространством в $(\widetilde{\Omega}, \mathcal{A}, \nu)$. Обозначим $N = \widetilde{\Omega} - \Omega$.

Если Γ является компактной системой образующих в $(\widetilde{\Omega}, \mathcal{A}, \nu)$, то, как известно, Γ_Ω будет компактной по $mod\,0$ системой образующих в $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Обратно, пусть Γ' является компактной системой образующих в $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Тогда в Ω существует множество M с $\mu(M) = 0$ и $card\,M = 2^\tau$. В силу $card\,(M + N) = 2^\tau$ существует биекция $f : \Omega \longrightarrow \widetilde{\Omega}$, которая отображает M на $M + N$ и которая является тождественным отображением на $\Omega - M$. Поскольку $\mu(M) = \nu(M + N) = 0$, отображение f является изоморфизмом $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ на $(\widetilde{\Omega}, \mathcal{A}, \nu)$. Совокупность $\Gamma = f(\Gamma')$ является компактной системой образующих в $(\widetilde{\Omega}, \mathcal{A}, \nu)$.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ является вполне однородным пространством с системой образующих $\Sigma = \{A_t : \ t \in T\}$, причем $card\, T = \tau$. Пусть $E \subset \Omega$ и $\mu_e(E) = 1$. Если $(E, \mathfrak{F}_E, \mu_E)$ имеет компактную систему образующих, то и $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ имеет компактную систему образующих.*

Доказательство почти дословно повторяет аргументы необходимости предыдущей леммы. Если Γ' является компактной системой образующих в $(E, \mathfrak{F}_E, \mu_E)$, то в E существует множество M с $\mu(M) = 0$ и $card\, M = 2^\tau$. Обозначим $N = \Omega - E$. Тогда $card(M + N) = 2^\tau$. Существует изоморфизм $f : E \longrightarrow \Omega$, построенный, как в лемме 3, который переводит компактный базис Γ' в компактный базис пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$.

Пусть теперь U_μ обозначает объединение всех открыто–замкнутых множеств G в $(\Omega, \mathfrak{T})$, удовлетворяющих условию $\mu(G) = 0$. Тогда F_μ является пересечением всех замкнутых множеств, имеющих меру 1. Пусть $\mathfrak{R} = \alpha\{\Sigma\}$ наименьшая алгебра, содержащая Σ. Будем считать $\mathfrak{R}$ компактным классом. В этом случае, как известно, мера μ является радоновой относительно $\mathfrak{T}$, справедливо равенство $\mu_e(F_\mu) = 1$, а если $F_\mu \in (\mathfrak{F})^\mu$, то компакт F_μ является носителем меры μ. В силу леммы 4 достаточно искать компактные системы образующих в подпространстве $(F, \mathfrak{F}_F, \mu_F)$, где $F = F_\mu$. Отметим, что алгебра $\mathfrak{R}_F$ при этом является компактным классом, удовлетворяющим дополнительному условию: из $A \in \mathfrak{R}_F$ и $A \neq \emptyset$ вытекает $\mu_F(A) > 0$.

Следствие 10. *Пусть пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ с системой образующих $\Sigma = \{A_t : \ t \in T\}$ и компактной алгеброй образующих $\mathfrak{R} = \alpha\{\Sigma\}$ удовлетворяет условию: из $A \in \mathfrak{R}$ и $A \neq \emptyset$ вытекает $\mu(A) > 0$. Если Σ является μ–независимой, то система образующих Σ компактна.*

Действительно, в Σ нет множества, мера которого равнялась бы 0 или 1 (иначе бы в $\mathfrak{R}$ имелись непустые множества нулевой меры в силу μ–независимости). Заметим, что при любом выборе множеств $B_t \in \{A_t; \Omega - A_t\}$ при $t \in T$ семейство $\{B_t : \ t \in T\}$ является центрированным и состоит из открыто–замкнутых множеств. Из компактности $(\Omega, \mathfrak{T})$ и вытекает требуемое.

Теорема 8. *Пусть пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ с μ–независимой системой образующих $\Sigma = \{A_t : \ t \in T\}$ и компактной алгеброй образующих $\mathfrak{R} = \alpha\{\Sigma\}$ метрически однородно, $F = F_\mu$. Тогда подпространство $(F, \mathfrak{F}_F, \mu_F)$ вполне однородно и имеет компактную систему образующих, причем $\tau(F, \mathfrak{F}_F, \mu_F) = \mathrm{v}(F, \mathfrak{F}_F, \mu_F) = \tau(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ (вес $(F, \mathfrak{F}_F, \mu_F)$ равен его метрическому весу и равен метрическому* *весу пространства* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$).

Доказательство. Не ограничивая общности, можем считать, что при $t \in T$ справедливы неравенства $\mu(A_t) \leq \mu(\Omega - A_t)$ (от замены в Σ множеств A_t на $\Omega - A_t$ при $t \in T'$ и любом $T' \subset T$ система Σ не теряет ни одного из свойств, которыми она обладает в формулировке теоремы). Пусть $T_1 = \{t \in T : \mu(A_t) = 0\}$. Множество U_μ можно представить в виде объединения множеств класса $\mathfrak{P} = (\Sigma + \Sigma^c)_d$, имеющих нулевую меру. Как отмечалось выше, для любого непустого $G \in \mathfrak{P}$ существуют конечные подмножества T' и T'' множества T с $G = \bigcap\limits_{t \in T'} A_t \cap \bigcap\limits_{t \in T''} (\Omega - A_t)$, поэтому $\mu(G) = \prod\limits_{t \in T'} \mu(A_t) \times \prod\limits_{t \in T''} \mu(\Omega - A_t)$. Если $\mu(G) = 0$, то один из множителей обращается в нуль, то есть существует $t_0 \in T$ с $G \subset A_{t_0}$ и $\mu(A_{t_0}) = 0$. Но A_{t_0} тоже является открыто–замкнутым множеством, поэтому $A_{t_0} \subset U_\mu$. Видим, что $t_0 \in T_1$ и что $U_\mu = \bigcup\limits_{t \in T_1} A_t$. Тогда $F_\mu = \bigcap\limits_{t \in T_1} (\Omega - A_t)$. Если $\Sigma_1 = \{A_t : \ t \in T_1\}$, то множество F_μ является элементом разбиения $\xi_{\Sigma_1}(\Omega)$. Пусть $\Sigma_2 = \Sigma - \Sigma_1 = \{A_t : \ t \in T_2\}$, где $T_2 = T - T_1$. Известно, что в этом случае $(\Sigma_2)_F$ (при $F = F_\mu$) является системой образующих пространства $(F, \mathfrak{F}_F, \mu_F)$. В силу компактности F в $(\Omega, \mathfrak{T})$ имеем $\mu_e(F) = 1$. Следовательно $(\Sigma_2)_F$ является μ_F–независимой системой образующих в $(F, \mathfrak{F}_F, \mu_F)$, удовлетворяющей условиям следствия 10. Значит, эта система компактна. Отметим, что ситуация $T_2 = \emptyset$ эквивалентна одноточечности множества F. В этом случае теорема очевидна. Пусть $T_2 \neq \emptyset$.

Покажем полную однородность пространства $(F, \mathfrak{F}_F, \mu_F)$, оценим его метрический вес и вес. Очевидно, что метрические структуры пространств $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ и $(F, \mathfrak{F}_F, \mu_F)$ тождественны (ибо Ω служит $\mathfrak{F}$–измеримой оболочкой множества F в $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$). Поэтому метрическая однородность доказана. Пусть τ равно метрическому весу пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$. В силу известных соотношений $\tau = \tau(F, \mathfrak{F}_F, \mu_F) \leq \mathrm{v}(F, \mathfrak{F}_F, \mu_F) \leq card\, T_2$ достаточно показать, что $card\, T_2 = \tau$. Считая $(\mathfrak{X}, \mu)$ метрической структурой пространства $(F, \mathfrak{F}_F, \mu_F)$, обозначим $a_t = [A_t]_\mu$ и $\mathcal{E} = \{a_t : \ t \in T_2\}$. Тогда $\mathcal{E}$ является μ–независимой системой образующих булевой алгебры $\mathfrak{X}$. Если $\tau < card\, T_2$, то существует $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ с $card\, \mathcal{E}' = \tau$ и $\mathfrak{X} = \sigma\{\mathcal{E}'\}$. Пусть $\mathcal{E}'' = \mathcal{E} - \mathcal{E}'$. Тогда $\mathcal{E}''$ непустой класс и подалгебры $\sigma\{\mathcal{E}'\}$ и $\sigma\{\mathcal{E}''\}$ являются μ–независимыми, то есть $\mathfrak{X}$ и $\sigma\{\mathcal{E}''\} \subset \mathfrak{X}$ должны быть μ–независимыми, что возможно лишь при $\sigma\{\mathcal{E}''\} = \{\mathbb{O}, \mathbb{I}\}$, что противоречит предположению $\tau < card\, T_2$. Видим, что $\tau = card\, T_2$. Теорема 8 доказана.

Литература

1. **Самородницкий А. А.** Теория пространств Лебега–Рохлина. Сыктывкар: Сыкт. ун-т, 1997. 288 с.

2. **Самородницкий А. А.** Теория меры. Л.: Изд–во Ленингр. ун-та, 1990. 268 с.

3. **Владимиров Д. А.** Булевы алгебры. М.: Наука, 1969. 320с.

4. **Рохлин В. А.** Об основных понятиях теории меры//*Матем. сборник. 1949. Т.25. №1. С.107–150.*

Summary

Samorodnitski A. A. Some questions of Lebesgue–Rohlin spaces theory

Various properties of Lebesgue–Rochlin's spaces are given. The main results are connected with factor–spaces and independent families of generators.

Сыктывкарский университет *Поступила 14.09.98*