Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.3.1999

УДК 517.98

Классификация булевых алгебр с достаточным числом (о)-непрерывных квазимер

Ю.Н.Ловягин, О.П. Матвеева

В заметке дается обзор некоторых вопросов теории булевых алгебр с достаточным числом (о)-непрерывных квазимер. Приведена классификационная теорема для таких алгебр.

1. Введение

В работе [1] исследовались булевы алгебры с достаточным числом (о)-непрерывных квазимер. Интерес к алгебраическим структурам, допускающим *достаточное* множество морфизмов, непрерывных в некоторой топологии, согласованной с алгебраической структурой, очевиден. Так, например, в функциональном анализе большое значение имеют сопряженные пространства, состоящие из непрерывных функционалов. При этом важный класс пространств образуют линейные топологические пространства, у которых сопряженное пространство разделяет точки; такие пространства, очевидно, имеют достаточное число непрерывных функционалов.

Аналогично в теории полуупорядоченных пространств [2, 3] большое внимание уделено К-пространствам с достаточным числом вполне непрерывных (=(о)-непрерывных) и регулярных функционалов. Поскольку теории К-пространств и булевых алгебр в некотором смысле параллельны, а, как легко видеть, база К-пространства с достаточным числом вполне непрерывных функционалов является (полной) булевой алгеброй с достаточным числом (о)-непрерывных квазимер, то оправдан интерес к исследованию таких алгебр.

Полные булевы алгебры с достаточным числом (о)-непрерывных квазимер исследовались Б. З. Вулихом [3] стр.341,[4] (по-видимому, впервые). Ряд результатов в этом направлении получил А. Г. Порошкин [5].

С другой стороны, как отмечено в [1], теория булевых алгебр с достаточным числом (о)-непрерывных квазимер и теория нормированных булевых алгебр эквивалентны с точностью до модели теории множеств в смысле [6]. В теории нормированных булевых алгебр известна теорема Д. Магарам, дающая систему инвариантов такой алгебры (см. [7, 8]). Аналогичная классификационная теорема для пространств с мерой получена А. А. Самородницким [9]. Им же [10] получено полное решение задачи существования метрически независимого дополнения правильной подалгебры полной нормированной алгебры.

В первой части настоящей работы мы докажем эквивалентность теорий булевых алгебр с достаточным числом (о)-непрерывных квазимер и нормированных булевых алгебр с точностью до модели теории множеств, а во второй приведем классификационную теорему для булевых алгебр с достаточным числом (о)-непрерывных квазимер, обобщающую теорему Д. Магарам.

2. Булевы алгебры, реализующиеся в подходящей булевозначной модели теории множеств как нормированные

В работах [11, 12] приведены условия, при которых пространство нормированное или метризованное посредством некоторого расширенного К-пространства, допускает *правильное* погружение в подходящую булевозначную модель теории множеств, превращаясь там в классическое нормированное или метрическое пространство (вещественное). При этом если исходное пространство было полным, то и соответствующее пространство внутри булевозначного универсума будет полным. Таким образом в указанных работах описан класс спусков пространств Фреше и полных метрических пространств. Такие пространства при "пропускании" через булевозначную модель путем операции *спуск-подъем* не изменяются. В этом смысле мы и понимаем правильность погружения. При этом модель, в которую погружается исходный объект, строится некоторым естественным образом. В данном конкретном случае – по базе метризующего (нормирующего) К-пространства. Условия правильности погружения, получающиеся при исследовании, равносильны замкнутости исходных объектов относительно операции *перемешивания*, порожденной естественной булевозначной метрикой. Подробности теории булевозначных моделей можно найти в [13, 14].

В этом параграфе мы, используя идеи и рассуждения работ [11, 12], приведем условия, при которых полная булева алгебра A представляется в подходящей модели теории множеств нормированной булевой алгеброй, что в силу общей теории булевозначных моделей [13, 14] и смысле (о)-сходимости в К-пространстве $\Re\downarrow$ – спуске множества вещественных чисел внутри $V^{\mathbf{B}}$ – [15, 16] означает, что на A существует (оо)-непрерывная существенно положительная аддитивная функция со значениями в расширенном К-пространстве. При этом булева алгебра $A^{\wedge}\downarrow$, получающаяся путем "протаскивания" алгебры A через булевозначный универсум (или циклическая оболочка алгебры A), изоморфна A. Иными словами булева алгебра A допускает правильное погружение в $V^{\mathbf{B}}$, где $\mathbf{B}$ – база нормирующего К-пространства.

В частности, если нормирующее К-пространство дискретно, то есть является соединением одномерных К-пространств – изоморфных, очевидно, пространству $\mathbf{R}$ –, то это равносильно тому, что его база также является дискретной булевой алгеброй – соединением двоеточий. При этом мы увидим, что полученные условия равносильны тому, что исходная булева алгебра A допускает достаточное число (о)-непрерывных квазимер.

В силу вышеизложенного достаточно рассмотреть полную булеву алгебру A и (оо)-непрерывную существенно положительную аддитивную функцию $p\ :\ \longrightarrow\ \Re\downarrow$, где $\Re$ – множество вещественных чисел внутри $V^{\mathbf{B}}$ ($\mathbf{B}$ – полная булева алгебра, изоморфная базе К-пространства $\Re\downarrow$ [16]. Такие функции мы будем называть *абстрактными мерами* – сокращенно АМ. Если функция p обладает свойствами аддитивности и положительности, то ее будем называть *абстрактной квазимерой* – АКМ, а если АКМ (оо)-непрерывна, то будем использовать сокращение σ-АКМ. Если функция существенно положительна, то пишем СП.

2.1. Для каждого элемента $b \in \mathbf{B}$ положим $p_b = pr_b \circ p$, где pr_b – проекция $\Re\downarrow$ на соответствующую компоненту.

Таким образом, функция p_b (для каждого $b \in \mathbf{B}$) является σ-АКМ на булевой алгебре A.

Легко понять, что если $a > 0$, то $p(a) > 0$ и, следовательно, существует элемент $b \in \mathbf{B}$ такой, что$p_b(a) > 0$, то есть множество $\{p_b\ :\ b \in \mathbf{B}\}$ разделяет элементы A. Мы говорим, что булева алгебра A допускает *достаточное число* σ-АКМ.

2.2. Пусть A – полная булева алгебра с мерой μ внутри $V^{\mathbf{B}}$. Положим $A = \mathrm{A}\downarrow, p = \mu\downarrow$. Тогда пара $< A, p >$ является полной булевой алгеброй с АМ p.

Пусть $p(a) = \bigoplus\limits_{\xi\in\Xi} e_\xi$, где $\{e_\xi\ :\ \xi \in \Xi\}$ – дизъюнктное множество положительных элементов $\Re\downarrow$.

Как и в [11], положив $a_\xi = ae_\xi + 0e_\xi{}'$, получим, что $[|a_\xi = 0|] = e'_\xi$

и, следовательно, $\{p(a_\xi)\}^{dd} = [\|a_\xi = 0\|]' = e_\xi$, то есть $p(a_\xi) = e_\xi$. В силу дизъюнктности элементов e_ξ, элементы a_ξ также дизъюнктны, а так как $[\|a = a_\xi\|] = e_\xi$, то есть $p(a +_2 a_\xi) = e_\xi$ и $a = \sup\limits_{\xi\in\Xi} e_\xi = \bigoplus\limits_{\xi\in\Xi} a_\xi$.

Замечания.

1. Полученное условие и есть введенное в [11] S-условие.

2. Ясно, что множество Ξ не может иметь строго мощность больше, чем минимум из типов алгебр A и $\mathbf{B}$.

2.3. Определим теперь для элементов $b_1, b_2 \in \mathbf{B}$ операции

$$p_{b_1} \vee p_{b_2} = p_{b_1 \vee b_2} p_{b_1} \wedge p_{b_2} = p_{b_1 \wedge b_2} (p_{b_1})' = p - p_{b_1}$$

Покажем, что введенные операции определяют на множестве$\{p_b : b \in \mathbf{B}\}$ структуру булевой алгебры, которая посредством биекции $b \longrightarrow p_b$ изоморфна булевой алгебре $\mathbf{B}$.

Достаточно проверить, что АКМ $p - p_b$ является дополнением АКМ p в решетке всех АКМ, меньших p.

Действительно, имеем $p_b \wedge (p - p_b) = p_b \wedge p_b - p_b = 0$. Таким образом, $p - p_b$ дизъюнктно p. С другой стороны, если $p_c \wedge p_b = 0$, то $p_c \wedge p_b \leq p - p_b$. Следовательно, $p_c \leq p - p_b$. Таким образом, $p - p_b$ является доплнением p. То есть на булевой алгебре A имеется достаточная полная булева алгебра σ-АКМ.

Теорема. *Для того чтобы полная булева алгебра A допускала АМ или, что то же самое, реализовывалась в подходящей модели теории множеств как нормированная булева алгебра, необходимо и достаточно, чтобы булева алгебра A допускала достаточную полную булеву алгебру σ-АКМ.*

В условиях теоремы

1. Функция P, являющаяся наибольшим элементом достаточной булевой алгебры, есть АМ со значениями в расширенном К-пространстве, надстроенным над достаточной булевой алгеброй.

2. Если P – АМ из пункта 1, то для любого дизъюнктного множества $\{e_\xi : \xi \in \Xi\}$ положительных элементов нормирующего К-пространства и любого элемента $a \in A$ если $P(a) = \bigoplus\limits_{\xi\in\Xi} e_\xi$, то существует разложение a в соединение (дизъюнктных элементов) $a = \bigoplus\limits_{\xi\in\Xi} a_x i$ так, что $P(a_\xi) = e_\xi$ для всех элементов $\xi \in \Xi$.

2.4. Пусть в условиях 1.3.1 нормирующее К-пространство дискретно. Тогда в 1.1 можно добиться того, что все компоненты являются одномерными, и, следовательно, булева алгебра A допускает достаточное число (о)-непрерывных (вещественных) квазимер. Тем самым имеет место

Теорема. *Полная булева алгебра допускает достаточное число (о)-непрерывных квазимер в том и только том случае, если она нормируема в подходящей булевозначной модели теории множеств с дискретной булевой алгеброй.*

Ясно, что в этом случае булева алгебра нормируется посредством дискретного К-пространства, надстроенного над алгеброй истинностных оценок соответствующей модели.

Следствие. *Теория булевых алгебр с достаточным числом (о)-непрерывных квазимер и теория нормированных булевых алгебр эквивалентны с точностью до модели теории множеств.*

Этим и завершается первая часть работы.

3. Система инвариантов для булевой алгебры с достаточным числом (о)-непрерывных квазимер

Пусть $\mathbb{B}$ - произвольная полная булева алгебра (п.б.а.) с достаточным числом (о)-непрерывных квазимер.

Так как всякая п.б.а. с достаточным множеством (о)-непрерывных квазимер раскладывается в соединение нормированных компонент, то мы имеем следующее разложение $\mathbb{B} = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Lambda} B_\gamma$, где $B_\gamma =< B_\gamma, \mu_\gamma >$ - полная нормированная булева алгебра, а $\operatorname{card}\Lambda = \kappa$ - мощность наименьшего достаточного множества (о)-непрерывных квазимер.

Согласно рассуждениям, проводимым для полной нормированной алгебры при классификации последних [7], B_γ можно представить в виде следующего разложения: $B_\gamma = \bigoplus\limits_{k} \in \beta_\gamma {B_\gamma}^k$, где ${B_\gamma}^k$ - однородная б.а., ${\tau_\gamma}^k = \tau {B_\gamma}^k$, причем ${\tau_\gamma}^i \neq {\tau_\gamma}^j$, при $i \neq j$. Компоненты занумерованы в порядке возрастания весов, то есть ${\tau_\gamma}^1 < {\tau_\gamma}^2 < \ldots$. Δ_γ - счетное множество для каждого γ. Таким образом получаем паспорт пары $< B_\gamma, \mu_\gamma >$:

$$\Pi_\gamma = \begin{pmatrix} {\tau_\gamma}^1 & {\tau_\gamma}^2 & \ldots \\ \mu_1 & \mu_2 & \ldots \end{pmatrix}$$

Тем самым $\mathbb{B}$ есть соединение нормированных (однородных) компонент, то есть

$$\mathbb{B} = \bigoplus_{\gamma\in\Lambda} \bigoplus_{k\in\Delta_\gamma} {B_\gamma}^k \qquad (*)$$

Мы можем считать множество, по которому строим соединение компонент, ${B_\gamma}^k$ вполне упорядоченным.

Укрупним компоненты в разложении $(*)$. Возможна ситуация такая, что ${B_{(\gamma)'}}^{k'} \simeq {B_{(\gamma)''}}^{k''}$. Следовательно, между этими алгебрами существует сохраняющий меру изоморфизм ξ, то есть, если $(\mu)'$, $(\mu)''$ - меры соответственно на ${B_{(\gamma)'}}^{k'}$ и ${B_{(\gamma)''}}^{k''}$, то справедливо равенство $(\mu)'' = \xi \circ (\mu)'$. Причем $\tau^{k'}_{(\gamma)'} = \tau^{k''}_{(\gamma)''}$.

Для каждого веса ${\tau_\gamma}^k$ выберем все попарно изоморфные компоненты ${B_\gamma}^k$ и имеющие наименьший вес τ_1, затем $\tau_2 > \tau_1$. Таким образом, упорядочим веса $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_\xi \ldots$ $(\xi < \gamma)$ по возрастанию. Пусть μ_ξ - мера алгебры с весом τ_ξ. Тогда мы можем сопоставить б.а. $\mathbb{B}$ паспорт вида:

$$\Pi_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \ldots \\ \tau_1, \tau_1, \ldots & \tau_2, \tau_2, \ldots & \ldots \\ \mu_1, \mu_1, \ldots & \mu_2, \mu_2, \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

При этом каждой группе изоморфных компонент соответствует кардинальное число κ_ξ - мощность этой группы. Ясно, что $\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_\xi \ldots = \Lambda$ (кардинальная сумма).

По построению ясно, что если у двух п.б.а. $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ паспорта совпадают, то они изоморфны. Таким образом, мы получили инвариант п.б.а. с достаточным числм (о)-непрерывных квазимер.

Литература

1. **Ловягин Ю.Н.** Булевы алгебры с достаточным числом (о)-непрерывных квазимер. М.,1997. Деп в ВИНИТИ №3111-В97. 24с.

2. **Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г.** Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М. - Л.: Гостехиздат, 1950. 546 с.

3. **Вулих Б.З.** Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961. 407 с.

4. **Вулих Б.З.** О булевой мере //*Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та. 1956. №125. С.95–114.*

5. **Порошкин А.Г.** Булевы меры, комплексные полуупорядоченные пространства и их применение в теории нормальных операторов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат.наук. Л.: ЛГПИ им. А.И.Герцена, 1970. 82 с.

6. **Ловягин Ю.Н.** Об эквивалентности некоторых теорий, расматриваемых в функциональном анализе//*Теория функций. Тезисы докладов Всероссийского семинара. Сыктывкар: Сыкт. ун-т. 1993. С.36–36.*

7. **Maharam D.** An algebraic characterization of measure algebras // *Am. Math. 1947. V.48. №1. P.154–167.*

8. **Владимиров Д.А.** Булевы алгебры. М.: Наука, 1969. 318 с.

9. **Самородницкий А.А.** Теория меры. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990. 268 с.

10. **Самородницкий А.А.** Критерий существования метрически независимого дополнения. Л. Редколлегия ж. "Вестник Ленинградского университета; сер. математика, механика, астрономия". 1986. Деп. в ВИНИТИ №386-В86.

11. **Ловягин Ю.Н.** Пространства с абстрактной метрикой // *Упорядоченные пространства и операторные уравнения. Межвуз. сб. Сыктывкар: Сыкт. ун-т. 1989. С. 24–32.*

12. **Ловягин Ю.Н.** К-метризуемость равномерных структур // *Вопросы функционального анализа(теория меры, упорядоченные пространства, функциональные уравнения). Межвуз. сб. Сыктывкар: Сыкт. ун-т. 1991. С. 39–43.*

13. **Ловягин Ю.Н.** Элементы теории моделей. Учебное пособие. Сыктывкар: Сыкт. ун-т, 1992. 99 с.

14. **Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С.** Нестандартные методы в анализе. Новосибирск: Наука, 1990. 412 с.

15. **Гордон Е.И.** Измеримые функции и интеграл Лебега в булевозначных моделях теории множеств с нормированными булевыми алгебрами. М.: 1979, Деп. в ВИНИТИ №291-80. 60с.

16. **Гордон Е.И.** Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и К-пространства//*ДАН СССР. 1977. Т.237. №4. С. 773-775.*

Summary

Lovyagin Y.N., Matveeva O.P. Classification of the Boolean algebras with sufficient number (o)-continuous kwasimeasures

In this note, we give a review of some problems in the theory of the Boolean algebras with sufficient number (o)-continuous quasimeasures. In particular, we prove a classification theorem for such algebras.

Сыктывкарский университет *Поступила 20.09.98*