Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.3.1999

УДК 517.98

Об одном классе булевых алгебр

Ю.Н.Ловягин

В заметке вводится класс булевых алгебр, допускающих правильное погружение в подходящую булевозначную модель теории множеств, теория которого с точностью до модели теории множеств эквивалентна теории булевых алгебр с существенно положительной квазимерой.

1. Введение

В работах [1, 2] доказано, что теории нормированных булевых алгебр и булевых алгебр с достаточным числом (о)-непрерывных квазимер эквивалентны с точностью до модели теории множеств. Иными словами, всякая алгебра с достаточным множеством (о)-непрерывных квазимер в подходящем булевозначном универсуме теории множеств реализуется как нормированная булева алгебра или, как говорят, допускает правильное погружение в подходящую булевозначную модель (превращаясь там в нормированную алгебру). И наоборот, как отмечено в [2], спуск нормированной алгебры внутри булевозначного универсума представляет собой булеву алгебру с достаточным числом (оо)-непрерывных абстрактных (со значениями в K-пространстве) квазимер, а в случае, если универсум строится по дискретной булевой алгебре, – булеву алгебру с достаточным числом (о)-непрерывных квазимер вещественных).

В [1] также показано, что всякая (полная) булева алгебра в подходящей модели теории множеств изображается булевой алгеброй с существенно положительной квазимерой, а, с другой стороны, с точностью до изоморфизма, является подалгеброй соединения булевых алгебр с существенно положительными квазимерами.

В настоящей заметке мы, следуя идеям работы [2], выделим класс булевых алгебр, теория которого с точностью до модели теории множеств эквивалентна теории булевых алгебр с существенно положительной квазимерой.

2. Некоторые понятия и сокращения, используемые в дальнейшем

2.1. Сокращение ПБА означает *полная булева алгебра*, КМ – *квазимера*, то есть положительная аддитивная функция (на булевой алгебре), СП – *существенно положительная* (функция), то есть $\phi(x) = 0$ влечет $x = 0$.

2.2. Множество КМ Φ называется *достаточным* (для булевой алгебры $\mathbf{A}$), если для любого ненулевого элемента $a \in \mathbf{A}$ существует КМ $\phi \in \Phi$ такая, что $\phi(a) > 0$.

2.3. Множество E в булевой алгебре (или К-пространстве) будем называть *компонентой*, если $E^{dd} = E$, где E^{dd} – множество элементов дизъюнктных множеству E, то есть всем элементам этого множества.

Множество всех компонент К-пространства является полной булевой алгеброй и называется его *базой*.

2.3.1 В литературе (например [5]) понятие компоненты определяется по-другому, но там доказана равносильность вводимого определения нашему понятию компоненты.

2.4. К-пространство будем называть *дискретным*, если его база дисретна. Булева алгебра $\mathbf{A}$ называется *дискретной*, если в ней существует дизъюнктное множество *атомов* A, такое, что

2.4.1 для любого ненулевого элемента $x \in \mathbf{A}$ существует элемент $a \in A$ так, что $a \leq x$

2.4.2 для всякого элемента $a \in A$ не существует такого элемента $x \in \mathbf{A}$, что $0 < x < a$.

2.5. Пусть имеется множество булевых алгебр (К-пространств) $\{X_\xi\}_{\xi\in\Xi}$. *Соединением* или *прямой суммой* семейства $\{X_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ называется множество $\bigoplus\limits_{\xi\in\Xi}\{X_\xi\}_{\xi\in\Xi}$, которое представляет собой декартово произведение семейства булевых алгебр (К-пространств) $\{X_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ с покоординатными алгебраическими операциями и порядком.

Всякий элемент $x \in \bigoplus\limits_{\xi\in\Xi}\{X_\xi\}$ имеет вид $x = \oplus_{\xi\in\Xi}x_\xi$, где $x_\xi \in X_\xi$ – "координаты" элемента x.

2.6. *Тип* булевой алгебры (или К-пространства) – это наибольшая мощность дизъюнктных подмножеств.

2.7. Более подробно терминология с соответствующими ссылками приведена в [1].

2.8. Следуя [6] две теории T_1 и E_2 в языках L_1 и L_2 первого порядка будем называть *эквивалентными с точностью до модели теории множеств*, если всякая модель теории T_1, будучи погруженой в некоторую (подходящую) булевозначную модель теории множеств, превращается в модель теории T_2, и, наоборот, спуск всякой модели теории T_2 в булевозначном универсуме является моделью теории T_1.

Теории, эквивалентные с точностью до модели теории множеств, допускают "пареллельное" исследование. Например, многие результаты теории булевых алгебр с достаточным числом (о)-непрерывных квазимер получаются путем "расшифровки" истинностных оценок соответствующих высказываний.

3. Булевы алгебры с СПКМ в $\mathbf{V}^B$

3.1. Пусть B – ПБА, $\mathbf{V}^B$ – соответствующий отделимый булевозначный универсум теории множеств [4], $\Re$ – множество вещественных чисел внутри $\mathbf{V}^B$, ϕ – СПКМ на ПБА X внутри $\mathbf{V}^B$. Тогда

3.1.1 $\Re\downarrow$ (со спуск-операциями и порядком) – расширенное К-пространство с базой, изоморфной B (см. [4])

3.1.2 $X\downarrow$ – ПБА (см. [3])

3.1.3 $\phi\downarrow$ – СП $\Re\downarrow$-значная квазимера (абстрактная квазимера) на $X\downarrow$, то есть

(i) если $x \wedge y = 0$, то $\phi\downarrow(x \vee y) = \phi\downarrow(x) + \phi\downarrow(y)$

(ii) для всех ненулевых элементов $x \in X\downarrow \quad \phi\downarrow(x) > 0$

Это утверждение доказывается путем расшифровки оценки высказывания $[|\phi$ – СПКМ на ПБА $X|] = 1$.

3.1.4 если функция ϕ (о)-непрерывна внутри $\mathbf{V}^B$, то функция $\phi\downarrow$ является (оо)-непрерывной

3.2. Для каждого элемента $b \in B$ рассмотрим функцию $\phi_b : X\downarrow \to (\Re\downarrow)_b$, где $(\Re\downarrow)_b$ – компонента К-пространства $\Re\downarrow$, соответствующая $b \in B$ (по сути дела это и есть компонента b), определенную равенством $\phi_b(x) = b \wedge \phi\downarrow(x)$. Иными словами, эта функция есть композиция проекции на компоненту b и функции $\phi\downarrow$.

3.2.1 Легко видеть, что $\phi\downarrow$ $(\Re\downarrow)_b$-значная квазимера.

3.2.2 Так как, если $x \in X\downarrow$ и $x > 0$, то есть $[|x \in X \& x > 0|] = 1$, то $[|\phi)x) > 0|]$, то есть $\phi\downarrow(x) > 0$. Тогда существует $b \in B$ так, что $\phi_b(x) > 0$. Таким образом множество абстрактных квазимер $\Phi_B = \{\phi_b \ : \ b \in B\}$ является достаточным для булевой алгебры $X\downarrow$.

3.2.3 Определим для двух КМ ϕ_{b_1} и ϕ_{b_2} алгебраические операции соотношением

$$(\phi_{b_1} \wedge \phi_{b_2})(x) = \phi_{b_1 \wedge b_2}(x) \ , \ (\phi_{b_1})' = \phi\downarrow - \phi_{b_1}.$$

Точно так же, как и в [2], получаем, что Φ_B является полной булевой алгеброй, изоморфной B.

3.3. ПБА A назовем *B-алгеброй* (B – ПБА), если она имеет достаточную булеву алгебру КМ, изоморфную B.

3.3.1 Из вышесказанного (см. 3.2) следует, что для того, чтобы некоторая (полная) булева алгебра была B-алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы она допускала правильное погружение в $\mathbf{V}^B$.

3.4. Предположим теперь, что ПБА B – дискретна. Тогда ясно, что она изоморфна ПБА 2^κ, где κ – мощность множества атомов B, а соответствующее К-пространство $\Re\downarrow$ изоморфно К-пространству $\mathbb{R}^\kappa$.

3.4.1 В этом случае каждая КМ ϕ_b определена теми атомами, из которых "строится" компонента b. Точнее, ϕ_b определена некоторам множеством $\{\phi_s\}_{s \in T_b}$, где T_b – множество атомов такое, что $\sup T_b = b$.

Так как булева алгебра B – дискретна, s – атом, то ясно, что компонента $(\Re\downarrow)_s$ является одномерным К-пространством, то есть изоморфна полю вещественных чисел $\mathbb{R}$.

.2 Если x – ненулевой элемент $X\downarrow$, то для некоторого $b \in B$ $\phi_b(x) > 0$. Тогда ясно, что существует элемент $t \in T_b$ такой, что $\phi_t(x) > 0$. Действительно, в противном случае все проекции из T_b переведут $\phi\downarrow(x)$ в нуль и, следовательно, $\phi\downarrow(x) = 0$, то есть $x = 0$.

Так как $(\Re\downarrow)_t$ – одномерная компонента, ϕ_t – КМ. Таким образом множество КМ $\{\phi_t \ : \ t \in T\}$, где T – множество атомов B, является достаточным, то есть справедливо утверждение

3 Если ПБА B – дискретна, то всякая B-алгебра имеет достаточное множество КМ мощности, равной мощности B.

3.5. Из общей теории спусков следует, что множество $X downarrow$ …чно, а из результатов работы [2] следует, что цикличность алге… $X\downarrow$ равносильна выполнению условия,

если $\phi\downarrow(x) = \bigoplus\limits_{\xi \in \Xi} e_\xi$, где $e_\xi \in \Re\downarrow$, то существуют элементы $x_\xi \in X\downarrow$ такие, что для всех $\xi \in \Xi$ $\phi\downarrow(x_\xi) = e_\xi$ и $x = \oplus\{x_\xi \ : \ \xi \in \Xi\}$.

Если алгебра B – дискретна, то предыдущее условие имеет вид:

если $\phi\downarrow(x) = \bigoplus\limits_{t \in T} e_t$, то существуют элементы $x_t \in X\downarrow$ такие, что $x = \oplus\{x_t \ : \ t \in T\}$ и $\phi\downarrow(x_t) = e_t$.

Таким образом, имеет место

.2.1 Если X – ПБА внутри $\mathbf{V}^B$ и B – дискретная ПБА типа κ, то ПБА $X\downarrow$ представляется в виде соединения κ булевых алгебр с СПКМ.

4. Обращение результата 3.5.2.1

4.1. Пусть $A = \bigoplus\limits_{\alpha \leq \kappa} A_\alpha$, где A_α – ПБА с СПКМ ϕ_α.

…каждого $a \in A$ положим $\psi_\alpha(a) = \phi_\alpha \circ pr_\alpha(a)$. Тогда, если $a > 0$, $a = \oplus\{a_\alpha \ : \ \alpha \leq \kappa\}$, $a_\alpha \in A_\alpha$ и не все координаты равны нулю. …образом, существует элемент $\alpha_0 \leq \kappa$ такой, что $\psi_{\alpha_0}(a) > 0$. То …жество КМ $\{\psi_\alpha \ ; \ \alpha \leq \kappa\}$ является достаточным для ПБА A.

4.2. Пусть функция ψ определена правилом $(\psi(a))_\alpha = \psi_\alpha(a)$. Тогда ψ – $\mathbb{R}^\kappa$-значная СПКМ на A.

Пусть $\psi(a) = \bigoplus_{\alpha\leq\kappa} e_\alpha$. Положим $x\ :\ (x)_\alpha = a_\alpha$ и $9x)_\beta = 0$ при $\beta \neq \alpha$, где a_α – координаты a. Тогда ясно, что $\psi(x_\alpha) = e_\alpha, \quad x_\alpha \in A, \quad a = \oplus x_\alpha$.

Тем самым выполнены условия 3.5.2, и, следовательно, ПБА A допускает правильное погружение в $\mathbf{V}^{2^\kappa}$.

Как следствие 4.1 и 4.2, получаем

4.3. Пусть κ – кардинальное число. Для того чтобы ПБА A была 2^κ-алгеброй (или, что то же самое, допускала правильное погружение в $\mathbf{V}^{2^\kappa}$), необходимо и достаточно, чтобы A была соединением κ булевых алгебр с СПКМ.

Таким образом, имеет место утверждение

4.3.1 Теория соединений алгебр с СПКМ с точностью до модели теории множеств эквивалентна теории ПБА с СПКМ.

5. Погружение произвольной ПБА в ПБА с достаточным числом (о)-непрерывных квазимер

5.1. Как известно (см. напр. [5] стр. 155 – 156, 227) ПБА A с СПКМ ϕ допускает изоморфное вложение in в ПБА $\tilde{A}$ с мерой μ, являющуюся метрическим пополнением (метрического) пространства $< A,\ \phi(.\ +_2 .) >$, где $+_2$ – симметрическая разность в A. При этом имеет место равенство $\mathrm{in} \circ \mu = \phi$.

Боле того, (о)-топология на A является следом (о)-топологии $\tilde{A}$. Последняя как известно совпадает с метрической топологией, порожденной метрикой $\mu(.\ +_2 .)$.

5.2. Пусть теперь $A = \bigoplus_{\alpha\leq\kappa} A_\alpha$, где A_α – ПБА с СПКМ ϕ_α (для каждого $\alpha \leq \kappa$).

Пусть, далее $A^\wedge$ – стандартное имя A в универсуме $\mathbf{V}^{2^\kappa}$, $\phi^\wedge$ – СПКМ на булевой алгебре $A^\wedge$ внутри $\mathbf{V}^{2^\kappa}$ и $\tilde{A}$ – нормированная ПБА из 5.1 внутри $\mathbf{V}^{2^\kappa}$.

Положим $C = \tilde{A}\!\downarrow$ Тогда согласно [1, 2] C – ПБА с достаточным числом (о)-непрерывных квазимер или, что то же самое, соединение κ нормированных ПБА, а функция $(\wedge \circ \mathrm{in})\!\downarrow$ является изоморфным вложением A в C.

Таким образом, имеет место утверждение

5.2.1 Всякая булева алгебра является, с точностью до изоморфизма, подалгеброй некоторой полной булевой алгебры с достаточным числом (о)-непрерывных квазимер.

5.2.1.1 Тот же результат получается, если рассмотреть как в [1] изоморфизм A в соединение булевых алгебр с СПКМ, каждую из которых погрузив затем изоморфно в нормированную ПБА.

6. Регулярная 2^{κ}-алгебра нормируема

Пусть ПБА A – есть (полное) соединение ПБА A_α с СПКМ ϕ_α, $\alpha \leq \kappa$, κ – кардинальное число, $B = 2^{\kappa}$.

Доказательство разобьем на 2 этапа.

6.1. В условиях утверждения для каждого α булева алгебра A_α регулярна.

Если булева алгебра A счетного типа, то, очевидно, что $\kappa \leq \aleph_0$.

Если булева алгебра A удовлетворяет принципу диагонали, то, как показано в [1], каждая булева A_α также удовлетворяет принципу диагонали.

6.2. Каждая ПБА A_α нормируема. Действительно, A_α – регулярная ПБА с СПКМ. Тогда, согласно теореме А.Г.Пинскера – [7] стр.428 - 430, – она нормируема.

Таким образом, регулярная алгебра A является ПБА с четного типа с достаточным числом (о)-непрерывных квазимер и, следовательно, нормируема – см. [1].

Литература

1. **Ловягин Ю.Н.** Булевы алгебры с достаточным числом (о)-непрерывных квазимер. Деп в ВИНИТИ №3111-В97. 25 с.

2. **Ловягин Ю.Н., Матвеева О.П.** Классификация булевых алгебр с достаточным числом (о)-непрерывных квазимер //*Вестник Сыкт. ун-та. Сер. 1. 1998. Вып.3. С. 103–110.*

3. **Гордон Е.И.** Вещественные числа вбулевозначных моделях теории множеств в К-пространства // *Докл. АН СССР. Т.337. №4. С.773–775.*

4. **Solovay R., Tennenbaum S.** Itherated Cohen extension and Souslin's problem //*An. of Math. 1971. V.94. №2. P.301–375.*

5. **Владимиров Д.А.** Булевы алгебры. М.: Наука, 1969. 318 с.

6. **Ловягин Ю.Н.** Об эквивалентности некоторых теорий, рассматриваемых в функциональном анализе //*Теория функций. Тезисы докладов Всероссийского семинара. Сыкт.: Сыкт. ун-т. 1993. С.35–36.*

7. **Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г.** Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. 546 с.

Summary

Lovyagin Y.N. About one class of the Boolean algebras

In the paper, we introduce a class of the Boolean algebras, admitting the correct immersion in a suitable boolean-valued model of the set theory. This theory is equivalent, up to the model of the set theory, to the theory of Boolean algebras with an essentially positive quasimeasure.

Сыктывкарский университет *Поступила 20.09.98*