*Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.3.1999*

УДК 532.5

Групповой анализ уравнения Дюбрей-Жакотен

О. Г. Карманов

Рассматривается задача групповой классификации уравнения Дюбрей-Жакотен плоского течения несжимаемой жидкости. За счет выбора произвольных функций, входящих в уравнение, получены дополнительные операторы симметрии. Приводятся инвариантные решения, отвечающие полученным основным и дополнительным симметриям.

Рассмотрим уравнение Дюбрей-Жакотен вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}G(u)\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) = F(u). \tag{1}$$

Уравнение (1) описывает в гидродинамике установившееся плоское движение идеальной несжимаемой жидкости [1, 2]. Здесь x, y — пространственные координаты; $u(x,y)$ — функция тока; $G(u) = \rho'(u)/\rho(u)$; $F(u)$ и $\rho(u)$ — произвольные функции, где $\rho(u)$ — плотность жидкости.

Цель работы — исследуя уравнение (1) методами группового анализа, решить задачу групповой классификации [3] уравнения Дюбрей-Жакотен относительно произвольных функций $\rho(u)$ и $F(u)$; найти некоторые точные решения уравнения (1).

Получено, что базис алгебры Ли операторов, допускаемых уравнением (1) при произвольном выборе $\rho(u)$ и $F(u)$, составляют следующие операторы:

$$\mathrm{v}_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathrm{v}_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \mathrm{v}_3 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \tag{2}$$

Здесь операторы v_1, v_2 соответствуют сдвигам по осям x и y, а оператор v_3 — вращениям в плоскости (xy).

Наиболее общий вид преобразований, сохраняющих вид уравнения (1):

$$\bar{x} = a(x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon) + b,$$

$$\bar{y} = a(-x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon) + c,$$
$$\bar{u} = cu + d,$$
$$\bar{F} = \frac{e}{a^2}F(eu+d),$$
$$\bar{G} = \frac{1}{e}G(eu+d),$$

где a, b, c, d, e, ε — произвольные постоянные.

Задача групповой классификации заключается в определении вида произвольных функций, входящих в запись уравнения, для получения более широкой группы симметрий.

Здесь получено, что если функцию $\rho(u)$ взять произвольно, а функцию $F(u)$ в виде $F(u) = \exp(-\frac{1}{2}\int G(u)\,du)$, то базис алгебры операторов дополняется еще двумя

$$\mathbf{v}_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2F(u)\int\frac{du}{F(u)}\frac{\partial}{\partial u}, \quad \mathbf{v}_\gamma = \gamma(x,y)F(u)\frac{\partial}{\partial u},$$

где функция $\gamma(x,y)$ — произвольная гармоническая функция.

Учитывая, что $G(u) = \rho'(u)/\rho(u)$, получаем $F(u) = 1/\sqrt{\rho(u)}$, и уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\rho'(u)}{\rho(u)}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{\rho(u)}}. \tag{3}$$

В целях упрощения выражений введем в рассмотрение функцию $\Phi(u) = \int\sqrt{\rho(u)}\,du$. Таким образом,

$$\mathbf{v}_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2\frac{\Phi(u)}{\Phi'(u)}\frac{\partial}{\partial u}, \quad \mathbf{v}_\gamma = \frac{\gamma(x,y)}{\Phi'(u)}\frac{\partial}{\partial u},$$

и алгебра симметрий уравнения (3) оказывается бесконечномерной ввиду наличия оператора $\mathbf{v}_\gamma$.

Ограничимся конечномерной частью алгебры допускаемых операторов, исключив из рассмотрения оператор $\mathbf{v}_\gamma$, и найдем некоторые точные решения уравнения (3), известные как инвариантные решения [3, 5].

Функция $F(x,y,u)$ является инвариантом действия группы с оператором $\mathbf{v} = \xi(x,y,u)\partial_x + \eta(x,y,u)\partial_y + \varphi(x,y,u)\partial_u$, если и только если выполняется равенство $\mathbf{v}(F) = 0$.

1. Рассмотрим линейную комбинацию $\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_2$, c — постоянная, первых двух операторов из (2). Инвариантами оператора $\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_2$ являются

функции $t = cx - y$, $v = u$. Полагая v функцией от t и выражая производные в уравнении (3) в новых переменных, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$v'' + \frac{1}{2}\frac{\rho'(v)}{\rho(v)}v'^2 = \frac{a^2}{\sqrt{\rho(v)}},$$

где $a^2 = 1/(c^2+1)$. Полученное уравнение допускает понижение порядка заменой $v' = p(v)$ и сводится к уравнению

$$pp' + \frac{1}{2}\frac{\rho'(v)}{\rho(v)}p^2 = \frac{a^2}{\sqrt{\rho(v)}},$$

которое легко интегрируется и дает общее решение

$$v = \Phi^{-1}\left(\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\,t + c_1\right)^2 + c_2\right),$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Возвращаясь к исходным переменным, получаем решение уравнения (3), инвариантное относительно сдвигов в направлении вектора $(1, c)$

$$u = \Phi^{-1}\left(\left(\frac{a}{\sqrt{2}}(cx - y) + c_1\right)^2 + c_2\right).$$

2. Найдем решения уравнения (3), инвариантные относительно вращений в плоскости. Для этого перейдем к полярным координатам r, φ, в которых уравнение (3) имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{2}\frac{\rho'(u)}{\rho(u)}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{\rho(u)}}.$$

Так как решения, инвариантные относительно вращений, имеют вид $u = U(r)$, то получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$U'' + \frac{1}{r}U' + \frac{1}{2}\frac{\rho'(U)}{\rho(U)}U'^2 = \frac{1}{\sqrt{\rho(U)}} \tag{4}$$

с неизвестной функцией $U = U(r)$.

Уравнение (4) подходящей заменой переменных $\bar r = \varphi(r, U)$, $\bar U = \psi(r, U)$ линеаризуется [4], то есть сводится к уравнению $\bar U'' = 0$, общее решение которого имеет вид $\bar U = c_1 \bar r + c_2$. К сожалению, указать такую замену представляется сложным. Вместо этого, попробуем понизить порядок уравнения (4), используя тот факт, что оно допускает оператор $\mathbf{v}_4$, который в полярных координатах имеет вид

$$\tilde{\mathbf{v}}_4 = r\frac{\partial}{\partial r} + 2\frac{\Phi(U)}{\Phi'(U)}\frac{\partial}{\partial U}.$$

Инвариантами оператора $\tilde{\mathbf{v}}_4$ являются $t = \Phi(U)/r^2$ и $v = \ln r - \Phi(U)/r^2$. Полагая v функцией от t и подставляя вместо U', U'' в уравнение (4) их выражения через v и t, получаем редуцированное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$v'' - 4(v'+1)^2 - (4t-1)(v'+1)^3 = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) не содержит функцию v, и, следовательно, его порядок понижается на единицу заменой $p = v' + 1$. Получаем уравнение Абеля первого рода

$$p' - 4p^2 - (4t-1)p^3 = 0, \tag{6}$$

которое заменой $p = 4z(t)/(4t-1)$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными [6]

$$z' = \frac{4}{4t-1}(4z^3 + 4z^2 + z)$$

с общим решением

$$C(4t-1) = \frac{z}{2z+1}\cdot\exp\left(\frac{1}{2z+1}\right),$$

где C — произвольная постоянная.

Однако здесь возникают затруднения при переходе к исходным переменным. Подставленное в полученное общее решение выражение для z приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{v'+1}{(4t-1)v'+4t+1}\cdot\exp\left(\frac{2}{(4t-1)v'+4t+1}\right) - \tilde{C} = 0, \quad \tilde{C} = 2C,$$

которое не удается проинтегрировать в квадратурах. Его решение $v = v(t)$, будучи записанным в переменных, является искомым инвариантным решением уравнения (3).

3. Найдем, наконец, инвариантные относительно преобразований, порождаемых оператором $\mathbf{v}_4$, решения уравнения (3).

Инварианты преобразования группы с оператором $\mathbf{v}_4$ есть $t = y/x$ и $v = \Phi(u)/x^2$. Записанное в переменных t и v уравнение (3) редуцируется к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$(t^2+1)v'' - 2tv' + 2v - 1 = 0, \tag{7}$$

которое линейно.

Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$v = (t^2-1)\left(c_1\left(\operatorname{arctg} t + \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{t}{t^2-1}\right) + c_2\right) + \frac{1}{2},$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Возвращаясь к исходным переменным, получаем инвариантное относительно действия группы с оператором $\mathbf{v}_4$ решение уравнения (3)

$$u = \Phi^{-1}\left((y^2-x^2)\left(c_1\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \ln\left|\frac{y+x}{y-x}\right| - \frac{xy}{y^2-x^2}\right) + c_2\right) + \frac{1}{2}\right).$$

Литература

1. **Алешков Ю. З.** Течение и волны в океане. СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 1996. 228 с.

2. **Андреев В. К., Капцов О. В. и др.** Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994. 319 с.

3. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.

4. **Ибрагимов Н. Х.** Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике.// *Успехи матем. наук. 1992. Т. 47. Вып. 4(286). С. 83–144.*

5. **Олвер П.** Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1986. 637 с.

6. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1971. 576 с.

Summary

Karmanov O. G. Group analysis of Durbreil-Jacotin's equation

Group classification problem of Durbreil-Jacotin's equation of flat flow of incompressible fluid is considered. Invariant solutions in regard to point transformations admissible by the equation have been found.

Сыктывкарский университет *Поступила 10.09.98*