Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.3.1999

УДК 512.772+515.165.4

ЖЕСТКАЯ ИЗОТОПИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ БИСТЕПЕНИ (4,3) НА ГИПЕРБОЛОИДЕ [1]

В.И.Звонилов

Жесткой изотопией неособых вещественных алгебраических кривых данной бистепени на гиперболоиде называется путь в пространстве таких кривых. В работе получена жесткая изотопическая классификация неособых вещественных алгебраических кривых бистепени (4,3) на гиперболоиде. Перечислены также компоненты связности пространства вещественных алгебраических кривых бистепени (4,3), имеющих единственную невырожденную двойную точку или точку возврата.

1. Введение. Понятие жесткой изотопии было введено Рохлиным [...]. На проективной плоскости для неособых вещественных алгебраических кривых степени m классификация с точностью до жестких изотопий известна для $m \leq 6$ (см. [1], [2], [3]). На квадриках жесткие изотопии вещественных алгебраических кривых бистепеней $(m, 1)$, ... $(3, 3)$ изучались Дегтяревым и автором [4], [6], [5]; при этом для неособых кривых они получили жесткую изотопическую классификацию. Для (неособых) кривых бистепени (4,3) на гиперболоиде классификация их вещественных схем (т.е. вещественная изотопическая классификация) была получена в работах [7], [19] (см. также [9]), а классификация их комплексных схем (вещественных схем, наделенных типом и комплексными ориентациями, см. ниже п.2) – в [9]. В настоящей работе мы доказываем, что *неособая кривая бистепени* (4,3) *на гиперболоиде определяется с точностью до жесткой изотопии своей комплексной схемой* (теорема 2). В доказательстве теоремы 1 мы указываем все компоненты связности пространства кривых бистепени (4,3), имеющих единственную невырожденную двойную точку или

[1] Работа поддержана грантом N 97-0-1.2-41 Конкусного центра фундаментального естествознания при СПбГУ.

точку возврата (см. рис. 1). Мы используем подход, предложенный в [10] для получения жесткой изотопической классификации плоских вещественных квартик.

2. Определения и обозначения. Пусть X – неособая квадрика. Комплексной частью $\mathbf{C}X$ поверхности X является $\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^1$. Пара стандартных инволюций комплексного сопряжения на сомножителях этого произведения задает на X антиголоморфную инволюцию conj с вещественной частью $\mathbf{R}X$, гомеоморфной тору; в результате получается вещественная алгебраическая поверхность, называемая *гиперболоидом*.

Зафиксируем пару P_1, P_2 образующих гиперболоида X. Фундаментальные классы $[\mathbf{C}P_1]$, $[\mathbf{C}P_2]$ образуют базис группы $H_2(\mathbf{C}X) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. Пусть A – алгебраическая кривая на X. Тогда $[\mathbf{C}A] = m_1[\mathbf{C}P_1] + m_2[\mathbf{C}P_2]$ для некоторых неотрицательных целых m_1, m_2. Пара (m_1, m_2) называется *бистепенью* кривой A. Если $[x_0 : x_1]$, $[y_0 : y_1]$ – однородные координаты на прямых P_1, P_2, то кривая A задается биоднородным многочленом

$$F(x_0, x_1; y_0, y_1) = \sum_{i,j=1}^{m_1, m_2} a_{i,j} x_1^i x_0^{m_1-i} y_1^j y_0^{m_2-j},$$

имеющим степени однородности m_1 по x_0, x_1 и m_2 по y_0, y_1. Антиголоморфная инволюция conj переводит каждую из четырех координат в комплексно сопряженную; поэтому кривая A вещественна тогда и только тогда, когда все $a_{i,j}$ вещественны.

Для указания топологии вещественной кривой на гиперболоиде мы используем модификацию стандартной кодировки вещественных схем плоских проективных кривых (см., например, [11]). Пусть $A \subset X$ – неособая вещественная алгебраическая кривая. Вещественная часть $\mathbf{R}A$ может иметь компоненты двух типов: стягиваемые в $\mathbf{R}X$ и нестягиваемые; стягиваемые компоненты называются *овалами*. Число овалов обозначается через l, число нестягиваемых компонент – через h. Каждый овал ограничивает топологический диск в $\mathbf{R}X$, называемый *внутренностью* овала. Фундаментальные классы $[\mathbf{R}P_1]$, $[\mathbf{R}P_2]$, наделенные некоторыми (фиксированными) ориентациями, образуют базис группы $H_1(\mathbf{R}X) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. Все нестягиваемые компоненты $N_1, ..., N_h$ реализуют один и тот же ненулевой класс (c_1, c_2) в $H_1(\mathbf{R}X)$, где c_1, c_2 взаимно просты. Вещественная схема кривой $\mathbf{R}A \subset \mathbf{R}X$ кодируется следующим образом:

$$\langle (c_1, c_2), \mathrm{scheme}_1, (c_1, c_2), \mathrm{scheme}_2, ..., (c_1, c_2), \mathrm{scheme}_h \rangle,$$

где $\mathrm{scheme}_1, \ldots, \mathrm{scheme}_h$ – схемы расположения овалов, лежащих в связных компонентах поверхности $\mathbf{R}X \setminus (N_1 \cup \ldots \cup N_h)$ (ср. [11], [9]).

Согласно Ф.Клейну (см. [12] или [1]), вещественная кривая A принадлежит *типу* I или *типу* II в зависимости от того, разбивает $\mathbf{R}A$ комплексификацию $\mathbf{C}A$ или нет. Если A принадлежит типу I, естественные ориентации компонент U и V пространства $\mathbf{C}A \setminus \mathbf{R}A$ дают две противоположные ориентации кривой $\mathbf{R}A = \partial U = \partial V$; они называются *комплексными ориентациями*. Вещественная схема, наделенная типом и, в случае типа I, комплексными ориентациями, называется *комплексной схемой*. Если нужно указать тип кривой с вещественной схемой, $\langle B \rangle$ используются обозначения $\langle B \rangle_{\mathrm{I}}$ и $\langle B \rangle_{\mathrm{II}}$.

Все вещественные кривые бистепени (m, n) образуют пространство $C_{m,n} \cong \mathbf{RP}^N$ с $N = mn + m + n$. Множество $\Delta \subset C_{m,n}$ особых кривых имеет размерность $N - 1$. Обозначим через $S \subset \Delta$ подмножество кривых, имеющих особую точку, отличную от невырожденной двойной точки или точки возврата, или имеющих несколько особых точек. Множество $\Delta \setminus S$ является топологическим многообразием (хотя и не гладким подмногообразием в $C_{m,n}$). *Жестким изотопическим классом* кривой $A \in C_{m,n} \setminus \Delta$ (или $A \in \Delta \setminus S$) называется компонента пространства $C_{m,n} \setminus \Delta$ (соотв. $\Delta \setminus S$), содержащая A. Компоненты пространства $C_{m,n} \setminus \Delta$ (соотв. $\Delta \setminus S$) называются *камерами (стенками)*.

3. Кривые с невырожденной двойной точкой или точкой возврата. Сначала мы перечислим стенки в $C_{4,3}$.

Теорема 1. *Число стенок в* $C_{4,3}$ *равно* 48.

Доказательство. Возьмем кривую $A \in \Delta \setminus S$, раздуем ее особую точку и стянем две образующие, проходящие через эту точку. В результате получим квинтику $Q \subset \mathbf{P}^2$ с вещественной особой точкой q_1 – невырожденной двойной точкой (изолированной или крестом) или точкой возврата. Обратное преобразование задается парой (q_1, q_2) (образов образующих гиперболоида), где q_2 – вещественная неособая точка квинтики. При этом вещественная прямая, проходящая через q_1 и q_2, ориентирована. Если A имеет точку возврата, эта прямая является касательной к кривой Q. Определяя жесткий изотопический класс кривой так же, как он определен выше для особых кривых на гиперболоиде, рассматривая вещественную схему кривой Q с точностью до жесткой изотопии, будем считать, что q_1 является крестом.

Ясно, что стенки нумеруются компонентами связности пространства Conf конфигураций (Q, q_1, q_2, ϵ), где ϵ – ориентация вещественной прямой, проходящей через q_1 и q_2. Согласно [2] и [10], жесткий изотопический тип квинтики Q определяется ее комплексной схемой, и число этих типов равно 9.[2] Поэтому вместе с жестким изотопическим типом квинтики Q мы должны учитывать различные расположения точки q_2 на кривой Q. Пусть сначала $\mathbf{R}Q$ состоит из двух компонент – односторонней и двусторонней, q_1 лежит на двусторонней компоненте и разбивает ее на две дуги, одна из которых лежит внутри другой. Обозначим конфигурацию (Q, q_1, q_2, ϵ) через $\tilde{\omega}$, ω_{out} или ω_{inn}, если q_2 лежит, соответственно, на односторонней компоненте, на внешней или на внутренней дуге двусторонней компоненты. Пусть теперь q_1 лежит на односторонней компоненте, а (единственный) овал лежит внутри ее петли. Обозначим конфигурацию через $\tilde{\gamma}$, γ_{out} или γ_{inn}, если q_2 лежит, соответственно, на односторонней, на двусторонней дуге односторонней компоненты или на овале. Наконец, пусть q_1 лежит на односторонней компоненте, вне петли которой расположены l овалов ($l = 0, ..., 5$). Пусть $B = \langle l \rangle$ –комплексная схема расположения овалов кривой Q. Обозначим конфигурацию через $\tilde{\alpha}B$, $\alpha_{\text{lp}}B$ или $\alpha_{\text{ov}}B$, если q_2 лежит, соответственно, на односторонней, на двусторонней дуге односторонней компоненты или на овале. При этом для схем типа I (при $l = 3$ или 5) добавим к B знак: $B^{\pm}$, указывающий на каком – положительном или отрицательном овале лежит q_2.

Кроме того, все конфигурации за исключением $\tilde{\omega}$, $\tilde{\alpha}B$ снабжаются знаком $+$ или $-$ следующим образом. Точки q_1, q_2 разделяют вещественную прямую, проходящую через них, на два отрезка, ориентированных в согласии с ϵ; пусть $\overline{q_1q_2}$ – тот из них, начало которого есть q_1. Обозначим конфигурацию (Q, q_1, q_2, ϵ) через ω^-_{inn}, ω^-_{out}, γ^-_{inn} или $\alpha^-_{\text{ov}}B$, (соответственно, ω^+_{inn}, ω^+_{out}, γ^+_{inn} или $\alpha^+_{\text{ov}}B$), если внутренность отрезка $\overline{q_1q_2}$ не пересекается (соответственно, пересекается) с односторонней компонентой. Обозначим конфигурацию (Q, q_1, q_2, ϵ) через γ^-_{out} или $\alpha^-_{\text{lp}}B$, (соответственно, γ^+_{out} или $\alpha^+_{\text{lp}}B$), если объединение отрезка $\overline{q_1q_2}$ с односторонней компонентой не разбивает (соответственно, разбивает) $\mathbf{R}P^2$. Наконец, обозначим конфигурацию через $\tilde{\gamma}^-$ или $\tilde{\gamma}^+$, если при обходе прямой q_1q_2 в направлении, указанном ориентацией ϵ, овал кривой Q остается справа или, соответственно, слева.

Для завершения доказательства остается заметить, что *множество компонент связности пространства* Conf *находится в естественном взаимно однозначном соответствии с множеством* $\{\omega^{\pm}_{\text{inn}}, \omega^{\pm}_{\text{out}}, \tilde{\omega}, \gamma^{\pm}_{\text{inn}}, \gamma^{\pm}_{\text{out}}, \tilde{\gamma}^{\pm}, \alpha^{\pm}_{\text{ov}}B\ (B = \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle^{\pm}_{I}, \langle 3 \rangle_{II}, \langle 4 \rangle, \langle 5 \rangle^{\pm}), \alpha^{\pm}_{\text{lp}}B\ (B = \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle_{I}, \langle 3 \rangle_{II}, \langle 4 \rangle, \langle 5 \rangle), \tilde{\alpha}B\ (B = \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle_{I}, \langle 3 \rangle_{II}, \langle 4 \rangle, \langle 5 \rangle)\}$, *состоящим из 48 элементов.* Это утверждение вытекает, очевидно, из следующей леммы.

[2]В [2] ошибочно указано число 8.

Лемма о перестановке овалов. *Жесткий изотопический тип …фигураций $\alpha^{\pm}_{\mathrm{ov}}B$, $\alpha^{\pm}_{\mathrm{lp}}B$, $\tilde{\alpha}B$ ($B = \langle 2\rangle$, $\langle 3\rangle^{\pm}_{I}$, $\langle 3\rangle_{II}$, $\langle 4\rangle$, $\langle 5\rangle^{\pm}$) не …висит от выбора овала, на котором расположена точка q_2 (для … $= \langle 3\rangle^{\pm}_{I}$, $\langle 5\rangle^{\pm}$ зависит лишь от того, на положительном или от…цательном овале она расположена).*

Чтобы доказать лемму достаточно для каждой конфигурации по…роить квинтики с одной особой точкой, обладающие соответствую…ми симметриями, и связать их жесткой изотопией. Такие квинтики …ятся из прямых и коник, а жесткая изотопия получается сдви… … этих прямых. Подробные построения предполагается опублико… … позже.

4. Основной результат.

Теорема 2. *Жесткая изотопическая классификация неособых ве…ственных алгебраических кривых бистепени $(4,3)$ на гиперболоиде …дает с классификацией их комплексных схем. Граф примыка… камер в $C_{4,3}$ показан на Рис.1 (вершины графа – камеры, ребра – …ки).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

…ссмотрим точную последовательность тройки $(C_{4,3}, \Delta, S)$ (напо… … что $\dim C_{4,3} = 19$)

$$0 \to H_{19}(C_{4,3}, S) \to H_{19}(C_{4,3}, \Delta) \to H_{18}(\Delta, S) \xrightarrow{\mathrm{in}} H_{18}(C_{4,3}, S) \qquad (1)$$

… и ниже все гомологии – с $\mathbf{Z}/2$-коэффициентами). Ясно, что …ло камер, равно $\dim_{\mathbf{Z}/2} H_{19}(C_{4,3}, \Delta)$, а w, число стенок, равно … $H_{18}(\Delta, S)$. Поскольку $H_{19}(C_{4,3}, S) = H_{19}(C_{4,3}) = \mathbf{Z}/2$, из точ… последовательности (1) следует, что $c = 1 + w - \mathrm{codim}_{\mathbf{Z}/2} \ker \mathrm{in}$.

…ло комплексных схем кривых бистепени $(4,3)$ равно 34 (см. … 3.10). Следовательно, $c \geq 34$. Поскольку $w = 48$ (теорема … … получения противоположного неравенства достаточно дока… … $\mathrm{codim}_{\mathbf{Z}/2} \ker \mathrm{in} \geq 15$. Классы w_j, реализуемые стенками, оче… образуют базис пространства $H_{18}(\Delta, S)$. Пусть x_j – координаты … $x \in H_{18}(\Delta, S)$ в этом базисе; тогда $\mathrm{codim}_{\mathbf{Z}/2} \ker \mathrm{in}$ есть число ли… …езависимых уравнений, которые в координатах x_j задают $\ker \mathrm{in}$. … достаточно найти 15 таких уравнений. Согласно двойствен… Александера-Понтрягина,

$$H_{18}(C_{4,3}, S) \cong H^1(C_{4,3} \setminus S) = \mathrm{Hom}(H_1(C_{4,3} \setminus S), \mathbf{Z}/2). \qquad (2)$$

…тельно, $x \in \ker \mathrm{in}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{in} x \circ H_1(C_{4,3} \setminus S) =$ … …жные уравнения получаются умножением равенства $\mathrm{in} x =$

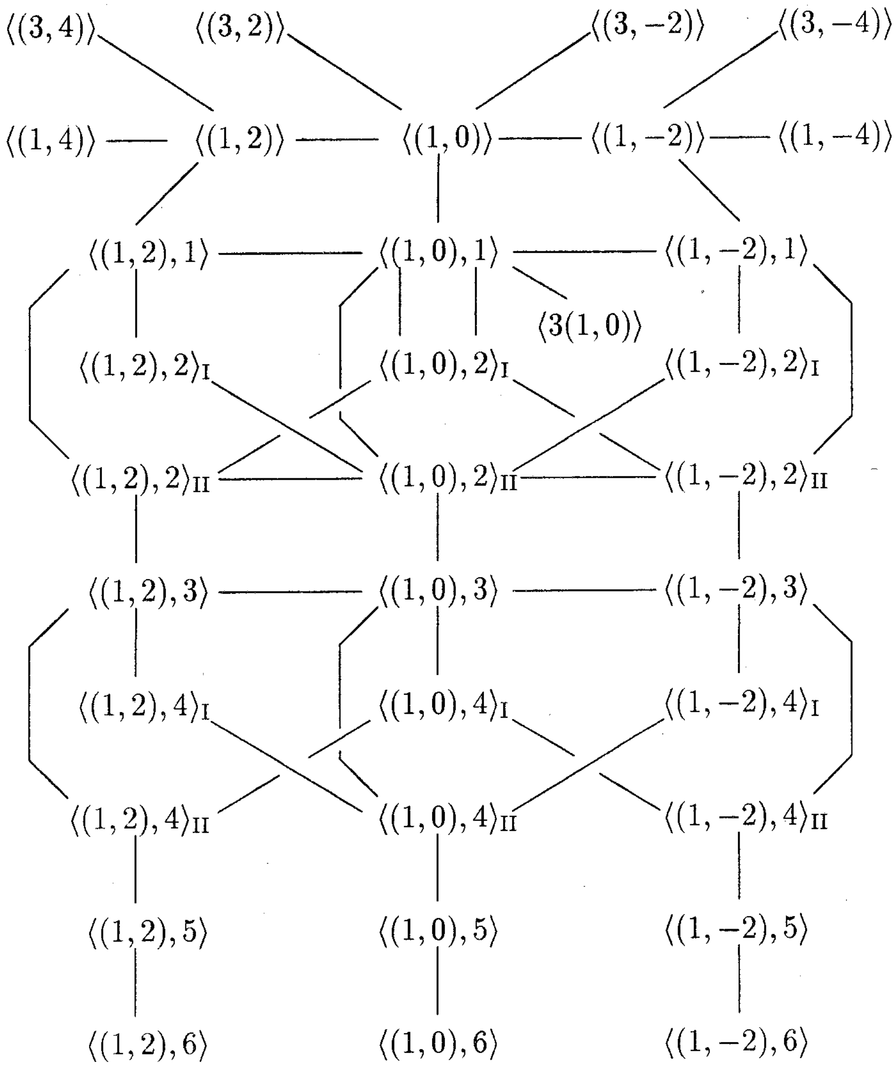

Рис. 1: Камеры и стенки пространства кривых бистепени $(4,3)$ н
гиперболоиде

$\Sigma x_j \mathrm{in} w_j$ на некоторые линейно независимые классы из $H_1(C_{4,3} \setminus S)$. Эти классы, отвечающие независимым циклам графа на рис. 1, задаются маленькими окружностями в $C_{4,3} \setminus S$, центры которых лежат в S и соответствуют 15-ти кривым с двумя особыми точками. Вещественная часть четырнадцати кривых состоит из изолированной особой точки, l овалов ($l = 0, ..., 3$) и двух пересекающихся в другой особой точке ветвей типов $(1, \pm 1)$ и $(0, \pm 1)$, причем ориентация ветви типа $(0, \pm 1)$ существенна лишь для кривых с $l = 1$ и 3 (они имеют тип I). Эти кривые строятся тем же методом, что и неособые кривые в работе [7]. Вещественная часть 15-й кривой, имеющей тип I, состоит из двух изолированных особых точек и ветви типа $(1, 0)$. Чтобы построить эту кривую, возьмем кривые, задаваемые уравнениями $y_0(x_1^2 - x_0^2) = y_1(2x_0^2 - x_1^2)$ и $x_1^2 y_0^2 + x_0^2 y_1^2 = 0$. Вещественная часть первой из них состоит из ветви типа $(1, 0)$, а вещественная часть второй кривой состоит, очевидно, из двух изолированных особых точек. Если возмутить объединение этих кривых, сохранив его вещественные особенности и устранив мнимые, то получится требуемая кривая. Каждая из первых 14-ти окружностей пересекает только четыре стенки, причем каждую трансверсально в одной точке, а последняя окружность - три стенки: дважды стенку $\tilde{\alpha}\langle 0 \rangle$ и по одному разу стенки $\tilde{\gamma}^+$, $\tilde{\gamma}^-$ (также трансверсально). Поэтому в силу (2) реализуемые этими окружностями классы линейно независимы, а получаемые с их помощью уравнения - ненулевые.

Литература

1. **Рохлин В.А.** Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых // *УМН. 1978. Т.33. Вып.5. С. 77–89.*

2. **Харламов В.М.** Жесткая изотопическая классификация вещественных плоских кривых степени 5 // *Функцион. анализ и его прил. 1981. Т.15. Вып.1. С.88–89.*

3. **Никулин В.В.** Целочисленные квадратичные формы и некоторые их геометрические приложения // *Изв. АН СССР. Сер. мат. 1979. Т.43. №.1. С.111–177.*

4. **Degtyarev A.I.** Appendix in: Kharlamov V.M., Rokhlin V.A., Viro O.Ya. Topological properties of real plane projective algebraic curves // *to appear.*

на

5. **Дегтярев А.И., Звонилов В.И.** Жесткая изотопическая классификация вещественных алгебраических кривых бистепени (3,3) на квадриках//*Матем. заметки. В печати.*

6. **Zvonilov V.I.** Stratified spaces of real algebraic curves of bidegree (m,1) and (m,2) on a hyperboloid// *Amer. Math. Soc. Transl. (2). 1996. V.173. P.253–264.*

7. **Гудков Д.А., Усачев А.К.** Неособые кривые младших порядков на гиперболоиде// *Методы качеств. теории дифференц. уравнений. Горький. 1980. С.96–103.*

8. **Hilbert D.** Ueber die reelen Zuge algebraischen Curven// *Math. Ann. 1891. B.38. P.115–138.*

9. **Звонилов В.И.** Комплексные топологические инварианты вещественных алгебраических кривых на гиперболоиде и эллипсоиде// *Алгебра и анализ. 1991. Т.3. Вып.5. С.88–108.*

10. **Kharlamov V.M., Rokhlin V.A., Viro O.Ya.** Topological properties of real plane projective algebraic curves // *to appear.*

11. **Виро О.Я.** Успехи в топологии вещественных алгебраических многообразий за последние шесть лет //*УМН. 1986. Т.41. Вып.3. С.45–67.*

12. **Klein F.** Gesammelte mathematische Abhandlungen. B.2. Berlin, 1922.

Summary

Zvonilov V.I. Rigid Isotopy Classification of Real Algebraic Curves of Bidegree (4,3) on a Hyperboloid

A rigid isotopy of nonsingular real algebraic curves on a quadric is a path in the space of such curves of a given bidegree. For real algebraic curves of bidegree (4,3) on a hyperboloid, we obtain the rigid isotopy classification of nonsingular curves and enumerate the connected components of the space of curves with a single node or cusp.

Сыктывкарский университет *Поступила 15.09.1998*