Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.3.1999

УДК 513.8

ГРУППЫ БОРДИЗМОВ СПИНОРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧЕ КЛАССИФИКАЦИИ ШЕСТИМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ [1]

А.В.Жубр

В данной работе дается изложение редукции задачи классификации (гладкой, топологической и гомотопической) односвязных замкнутых 6-мерных многообразий к некоторой гомотопической задаче — а именно, к задаче вычисления групп бордизмов спинорных отображений ориентированных (неспинорных) 6-мерных многообразий в пространства Эйленберга-Маклейна типа $(G,2)$ (отображение $f: M \to K(G,2)$ называется спинорным по отношению к заданному классу когомологий $w \in H^2(G,2;\, \mathbf{Z}_2)$, если оно удовлетворяет условию $f^*(w) = w_2(M)$). Эта редукция в спинорном случае (т.е. при $w = 0$) изложена в работе [3], а ее обобщение, приведенное здесь, дает основу для доказательства результатов, анонсированных в работах [4, 5] (сами эти доказательства будут даны в другом месте). Вышеупомянутая редукция излагается здесь в несколько более общем виде, чем это требуется для получения классификационных теорем из [4, 5]. Этот более общий подход позволяет, в частности, вернуться к вопросу о единственности разложения 6-мерного многообразия M в связную сумму вида $M_0 \# S^3{\times}S^3$ (это свойство многообразия M называется в работе [12] стабильностью), впервые рассмотренному в [1] для замкнутых односвязных 6-мерных многообразий (а позднее в работе [12] — для замкнутых односвязных многообразий других размерностей), и показать, что в неодносвязной ситуации упомянутая стабильность не имеет места.

---

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №95-01-00235

§1. Спинорные структуры на неспинорных многообразиях. Группы $\Omega_i^{\mathrm{Spin}}(X;\, f)$ и $\Omega\mathrm{T}_i^{\mathrm{Spin}}(X;\, f)$

1.1. Некоторые терминологические соглашения. Пусть

$$\xi = \{p_\xi : E_\xi \to B_\xi\}$$

и

$$\eta = \{p_\eta : E_\eta \to B_\eta\}$$

— векторные $SO(N)$-расслоения. Под морфизмом $f : \xi \to \eta$ мы буд понимать пару отображений $(f_E, f_B) : (E_\xi, B_\xi) \to (E_\eta, B_\eta)$, образующ коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
E_\xi \arrow[r, "f_E"] \arrow[d, "p_\xi"'] & E_\eta \arrow[d, "p_\eta"] \\
B_\xi \arrow[r, "f_B"] & B_\eta
\end{tikzcd}$$

и индуцирующую $SO(N)$-изоморфизм на каждом слое расслоения ξ

Пусть $\xi = \{p_\xi : E_\xi \to B_\xi\}$ — $SO(N)$-расслоение над CW-компле сом B_ξ. Как известно, классифицирующее отображение $B_\xi \to BSO($ можно считать, в определенном смысле, каноническим. В самом дел семейство всех морфизмов $\xi \to \gamma_{SO(N)}$, где

$$\gamma_{SO(N)} = \{p_{SO(N)} : ESO(N) \to BSO(N)\}$$

— универсальное $SO(N)$-расслоение, является гомотопически тр виальным (в этом, по существу, и состоит свойство универсальн сти). Значит, если каким-либо образом выделить один такой морфи $f^0 : \xi \to \gamma_{SO(N)}$, то для любого другого морфизма $f : \xi \to \gamma_{SO(}$ мы имеем гомотопию $f_B \sim f_B^0$, причем сама эта гомотопия являет "почти стандартной": она определена однозначно с точностью до г мотопии $\mathrm{rel}\, B_\xi \times \{0, 1\}$. Очевидно, что и, обратно, задание гомотоп между отображениями $g, f_B^0 : B_\xi \to BSO(N)$ определяет (при услови что фиксировано f_E^0) гомотопический класс морфизмов $f : \xi \to \gamma_{SO(}$ с $f_B = g$.

Имея это в виду, мы будем считать, что для каждого $SO(N$ расслоения ξ зафиксировано таким способом некоторое "стандар ное" классифицирующее отображение $f_B^0 : B_\xi \to BSO(N)$ (молча ливо предполагая, что указано также и накрывающее отображен

$\xi : E_\xi \to ESO(N))$. Это стандартное классифицирующее отображение f^0_B мы обозначаем (как это обычно и делается) тем же символом, что и само расслоение (т.е. в данном случае — через ξ).

Наконец, мы в дальнейшем исключим из обозначений размерность расслоения N, имея в виду стандартную стабилизацию и либо считая число N достаточно большим, либо произведя надлежащие предельные переходы.

1.2. Spin(f)-структуры. Через

$$\gamma_{\mathrm{Spin}} = \{p_{\mathrm{Spin}} : E\mathrm{Spin} \to B\mathrm{Spin}\}$$

мы обозначаем универсальное Spin-расслоение. Как известно, пространство BSpin можно считать слоем расслоения

$$\pi : BSO \to K(\mathbf{Z}_2, 2) ,$$

определенного (с точностью до гомотопической эквивалентности) условием $\pi^*(\varkappa) = w_2$, где $\varkappa \in H^2(\mathbf{Z}_2, 2; \mathbf{Z}_2)$ — универсальный $(\mathbf{Z}_2, 2)$-класс и $w_2 \in H^2(BSO; \mathbf{Z}_2)$ — универсальный двумерный класс Штифеля-Уитни. Мы зафиксируем раз и навсегда это расслоение. Пусть имеется SO-расслоение ξ и отображение $f : B_\xi \to K(\mathbf{Z}_2, 2)$. Мы называем *Spin($f$)-структурой на расслоении ξ* гомотопический класс морфизмов $\alpha : \xi \to \gamma_{SO}$, удовлетворяющих условию

$$\pi \circ \alpha_B = f . \qquad (1)$$

Если, в частности, f — постоянное отображение, то условие (1) означает, что α — это морфизм $\xi \to \gamma_{\mathrm{Spin}}$, так что мы получаем один из вариантов определения обычной Spin-структуры на ξ.

1.3. Эквивалентное определение Spin(f)-структуры. С учетом сказанного в 1.1 мы можем переформулировать определение 1.2 следующим образом:

Spin(f)-структура на ξ — это гомотопический класс таких отображений $F = \{F_t\} : B_\xi \times [0, 1] \to BSO$, что $F_0 = \xi$ и $\pi \circ F_1 = f$.

1.4. Условие существования Spin(f)-структур. Как немедленно следует из 1.3 (и из “аксиомы накрывающей гомотопии”), необходимое и достаточное условие существования Spin(f)-структуры для данных ξ, f — это гомотопическая коммутативность треугольника

$$\begin{tikzcd} & BSO \arrow[d, "\pi"] \\ B_\xi \arrow[ur, "\xi"] \arrow[r, "f"] & K(\mathbf{Z}_2,2) \end{tikzcd}$$

т.е., в другой терминологии, равенство $f^*(\varkappa) = w_2(\xi)$. Отображения удовлетворяющие этому условию, мы будем называть *спинорными* (дл данного ξ).

1.5. Перечисление $\mathrm{Spin}(f)$**-структур.** Вопрос об описании все $\mathrm{Spin}(f)$-структур на расслоении ξ решается точно так же, как и в сл чае $f = \mathrm{const}$ (т.е. когда речь идет об обычных Spin-структурах):

Для любых двух $\mathrm{Spin}(f)$*-структур* α, β *на* ξ *можно определит "различающий элемент"* $\delta(\alpha,\beta) \in H^1(B_\xi;\, \mathbf{Z}_2)$ *таким образом, чт для любого* α *отображение* $\beta \mapsto \delta(\alpha,\beta)$ *множества таких структу в группу* $H^1(B_\xi;\, \mathbf{Z}_2)$ *будет биекцией.*

Для доказательства достаточно просто заметить, что — как показывает элементарное применение "аксиомы накрывающей гомотопии" и элементарная теория препятствий — единственное препятствие к деформации друг в друга гомотопий $F_t, G_t : B_\xi \to BSO$ удовлетворяющих "краевым условиям" из п. 1.3, лежит в групп $H^2(B_\xi \times [0,1], B_\xi \times \{0,1\};\, \pi_2 K(\mathbf{Z}_2,2))$, совпадающей с $H^1(B_\xi;\, \mathbf{Z}_2)$.

Можно, с другой стороны, построить различающий класс $\delta(\alpha,\beta$ и более "геометрическим" образом, исходя из первого определени $\mathrm{Spin}(f)$-структуры. Для этого заметим, что если продеформироват отображение f так, чтобы 1-мерный остов B^1_ξ пространства B_ξ отображался в точку, и соответственно продеформировать (посредство накрывающей гомотопии) морфизмы $\alpha, \beta : \xi \to \gamma_{SO}$, то сужения $\alpha,$ на B^1_ξ окажутся морфизмами в γ_{Spin}. Следовательно, мы получим на B две обычных Spin-структуры или, иначе, две (рассматриваемые с точностью до гомотопии) тривиализации расслоения ξ. Эти две тривиализации зависят от выбора вышеупомянутой деформации отображения f однако, их "разность" зависит уже только от α, β и определяет 1-коцеп с коэффициентами в $\mathbf{Z}_2$. В случае обычной Spin-структуры (когда вс B_ξ отображается в точку и никаких деформаций не нужно) эта разностная коцепь оказывается коциклом ввиду продолжаемости обеих тривиализаций на 2-мерный остов пространства B_ξ (т.е. в силу того, что сам тривиализации являются, в некотором смысле, коциклами). В наше случае тривиализации, вообще говоря, непродолжаемы на B^2_ξ; однако, как легко убедиться, их “кограницы” — т.е. препятствия к продолжению на B^2_ξ — одинаковы, а именно, они совпадают с 2-коцепью, индуцированной отображением f (которое, напомним, переводит остов B^1_ξ в точку и, следовательно, каждую 2-мерную клетку пространства B_ξ — в 2-цикл пространства $K(\mathbf{Z}_2,2)$); отсюда, так же, как и для обычных Spin-структур, следует, что разностная коцепь является коциклом. Заметим, что вышеупомянутая 2-коцепь — препятствие к продолжению тривиализации на 2-остов — зависит опять-таки от выбора деформации отображения f, однако ее класс когомологий определен однозначно — это, разумеется, не что иное, как класс $w_2(\xi)$.

Множество всех Spin(f)-структур на расслоении ξ мы будем обозначать через $\mathfrak{Spin}(\xi,f)$.

1.6. Функториальные свойства Spin(f)-структур. Мы рассмотрим поведение Spin(f)-структур на данном расслоении ξ по отношению к двум классам морфизмов: морфизмам расслоений (действующим на ξ) и морфизмам отображений (действующим на f).

Пусть $\alpha \in \mathfrak{Spin}(\xi,f)$, и пусть задан некоторый морфизм расслоений $\varphi : \eta \to \xi$. Тогда $\alpha \circ \varphi : \eta \to \gamma_{SO}$ является Spin($\varphi_B \circ f$)-структурой на расслоении η, так что мы имеем индуцированное отображение $\varphi^* : \mathfrak{Spin}(\xi,f) \to \mathfrak{Spin}(\eta,\varphi_B \circ f)$. Очевидно, что отображение φ^* не меняется при деформации морфизма φ (над фиксированным φ_B).

Пусть, с другой стороны, f,g — два отображения $B_\xi \to K(\mathbf{Z}_2,2)$, и пусть $F : B_\xi \times [0,1] \to K(\mathbf{Z}_2,2)$ — гомотопия, соединяющая f с g, так что $F_0 = f$ и $F_1 = g$. Пусть опять $\alpha \in \mathfrak{Spin}(\xi,f)$. Выбрав некоторую гомотопию $\widetilde{F} : \xi \times [0,1] \to \gamma_{SO}$, накрывающую F_t (т.е. с $\pi \circ (\widetilde{F}_t)_B = F_t$) и начинающуюся с α, мы получим в конечный момент этой гомотопии морфизм $\widetilde{F}_1 : \xi \to \gamma_{SO}$, накрывающий g. Стандартное рассуждение с “аксиомой накрывающей гомотопии” показывает, что морфизм $\widetilde{F}_1$ определен однозначно с точностью до гомотопии в классе морфизмов, накрывающих g и, следовательно, определяет Spin(g)-структуру, которую мы обозначим через $F^*(\alpha)$. Мы снова, таким образом, имеем индуцированное отображение $F^* : \mathfrak{Spin}(\xi,f) \to \mathfrak{Spin}(\xi,g)$. Такое же стандартное рассуждение, как и выше, показывает, что если $F \sim G$ rel $B_\xi \times \{0,1\}$, то индуцированные отображения F^* и G^* совпадают.

Можно объединить рассмотренные два класса морфизмов. Рассмотрим категорию, объекты которой — это пары (ξ,f), составленные из SO-расслоений ξ и отображений $f : B_\xi \to K(\mathbf{Z}_2,2)$. Морфизмом Φ из (η, g) в (ξ, f) называется пара $\Phi = \big(\varphi, [F]\big)$, составленная из морфизма $\varphi : \eta \to \xi$ и гомотопического класса $[F]$ отображений $F : B_\eta \times [0,1] \to K(\mathbf{Z}_2, 2)$, удовлетворяющих условиям $F_0 = f \circ \varphi_B$ и $F_1 = g$ (т.е. гомотопий, соединяющих $f \circ \varphi_B$ с g). Если $\Psi = \big(\psi, [G]\big) : (\zeta, h) \to (\eta, g)$ — еще один морфизм указанного вида, то композицией $\Phi \circ \Psi$ мы называем морфизм $\big(\varphi \circ \psi, [(\psi_B \circ F) \vee G]\big)$, где отображение $(\psi_B \circ F) \vee G : B_\zeta \times [0,1] \to K(\mathbf{Z}_2, 2)$ задано формулой

$$\big((\psi_B \circ F) \vee G\big)_t = \begin{cases} \psi_B \circ F_{2t} & \text{при } t \leq \frac{1}{2} \\ G_{2t-1} & \text{при } t \geq \frac{1}{2} \end{cases} .$$

Для Spin-структуры $\alpha \in \mathfrak{Spin}(\xi, f)$ и морфизма

$$\Phi = \big(\varphi, [F]\big) : (\eta, g) \to (\xi, f)$$

положим $\Phi^*(\alpha) = F^*(\alpha \circ \varphi)$. Прямая проверка показывает, что Φ^* определено корректно (т.е. не зависит от F), и что $(\Phi \circ \Psi)^* = \Psi^* \circ \Phi^*$. Таким образом, $\mathfrak{Spin}$ — это контравариантный функтор из описанной выше категории в категорию множеств.

1.7. Spin(f)**-структуры на многообразиях.** Пусть M — ориентированное гладкое многообразие. Как известно, нормальное SO-расслоение $\nu_M = i^* \mathbf{R}^N / \tau_M$, где $i : M \to \mathbf{R}^N$ — произвольное вложение, является по существу каноническим: для любых двух вложений $i_1, i_2 : M \to \mathbf{R}^N$ (где N достаточно велико) имеется канонический гомотопический класс изоморфизмов $i_1^* \mathbf{R}^N / \tau_M \to i_2^* \mathbf{R}^N / \tau_M$ (см., например, [14, глава 2]). Если $\varphi : M' \to M$ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, то (как непосредственно вытекает из сказанного выше) мы имеем канонический послойный гомотопический класс морфизмов $\nu_{M'} \to \nu_M$ над φ. Таким образом, ввиду сказанного в п. 1.6, для любого спинорного отображения $f : M \to K(\mathbf{Z}_2, 2)$ (т.е. отображения, удовлетворяющего условию $f^*(\varkappa) = w_2(M)$) мы имеем корректно определенное множество $\mathfrak{Spin}(\nu_M, f)$, и для любого сохраняющего ориентацию диффеоморфизма $\varphi : M' \to M$ — биекцию

$$\varphi^* : \mathfrak{Spin}(\nu_M, f) \to \mathfrak{Spin}(\nu_{M'}, f \circ \varphi) .$$

Элементы множества $\mathfrak{Spin}(\nu_M, f)$ мы будем называть Spin(f)-структурами на многообразии M и писать $\mathfrak{Spin}(M, f)$ вместо $\mathfrak{Spin}(\nu_M, f)$.

Действуя подобно п. 1.6, можно ввести категорию, объектами которой являются непрерывные отображения $M \to K(\mathbf{Z}_2, 2)$, где M — ориентированное гладкое многообразие, а роль морфизмов объекта $(M', f$

ъект (M,f) играют пары $\Phi = (\varphi,[F])$, где $\varphi : M' \to M$ — сохра- щий ориентацию диффеоморфизм, а $[F]$ — гомотопический класс отопий, соединяющих $f\circ\varphi$ с f'. Очевидно, что так определенные физмы являются в действительности изоморфизмами; в силу ска- ого в предыдущем абзаце и в п. 1.6, каждый такой изоморфизм $M',f') \to (M,f)$ индуцирует биекцию

$$\Phi^* : \mathfrak{S}\mathrm{pin}(M,f) \to \mathfrak{S}\mathrm{pin}(M',f')\ .$$

етим еще, что отношение

$$\alpha' = \Phi^*(\alpha) \text{ для некоторого } \Phi$$

— е что иное, как конкордантность. В самом деле, если (поль- ь теми же обозначениями) продолжить $\mathrm{Spin}(f')$-структуру $\varphi^*(\alpha)$ $\mathrm{Spin}(F)$-структуры A на цилиндре $M'{\times}[0,1]$, то, согласно определе- будем иметь $i^*(A) = \alpha$ и $(i')^*(A) = \alpha'$, где i, i' — диффеоморфизмы ообразий M, M' соответственно на нижнее и верхнее "основа- цилиндра $M'{\times}[0,1]$, заданные формулами $i(x) = (\varphi^{-1}(x),0)$ $x) = (x,1)$.

Отмеченные выше свойства $\mathrm{Spin}(f)$-структур позволяют рассматри- ь кобордизмы. В самом деле, во-первых, согласно сказанному вы- $\mathrm{Spin}(f)$-структуры надлежащим образом ведут себя по отношению ффеоморфизмам. Во-вторых, для многообразия с краем мы име- анонический морфизм $\nu_{\partial M} \to \nu_M$ и, следовательно, отображение ения $\mathfrak{S}\mathrm{pin}(M,f) \to \mathfrak{S}\mathrm{pin}(\partial M, f|_{\partial M})$. Наконец, если многообразия и M_2 пересекаются по общей компоненте края V, и если сужения ражений $f_i : M_i \to K(\mathbf{Z}_2,2)$ и $\mathrm{Spin}(f_i)$-структур $\alpha_i \in \mathfrak{S}\mathrm{pin}(M_i,f_i)$ совпадают, то мы тогда можем "склеить" α_1 и α_2 вдоль V и по- ть $\mathrm{Spin}(f)$-структуру на многообразии $M = M_1 \cup M_2$ (результат склеивания, как и в случае обычных Spin-структур, определен означно — он зависит от выбора гомотопии между двумя мор- ами $\nu_V \to \gamma_{SO}$, представляющими $\alpha_1|_V$ и $\alpha_2|_V$). Сказанное по- ет обычным образом ввести для замкнутых многообразий, снаб- ых $\mathrm{Spin}(f)$-структурами (с всевозможными f), отношение кобор- а. и определить соответствующие группы кобордизмов. Правда, о интересного мы при этом не получим. В самом деле, отобра- е $f : M \to K(G,2)$, в соответствии с (1), однозначно определяется ажением $\alpha : \nu_M \to \gamma_{SO}$, а гомотопический класс последнего — тацией многообразия M. Таким образом, $\mathrm{Spin}(f)$-кобордизмы — ычные ориентированные кобордизмы Ω_i^{SO}. Чтобы получить более содержательное построение, мы введем Spin(f)-структуры на сингулярных многообразиях (т.е. на отображениях $M \to X$) и соответствующие группы бордизмов.

1.8. Обобщение: Spin(f)**-структуры на сингулярных многообразиях.** Пусть имеется топологическое пространство X и непрерывное отображение $f : X \to K(\mathbf{Z}_2, 2)$. Мы будем обозначать через гомотопический класс отображения f, или, в другой терминологии класс $f^*(\varkappa) \in H^2(X; \mathbf{Z}_2)$. Пусть (M, g) — ориентированное сингулярное многообразие в X (т.е., иначе говоря, g — это непрерывное отображение ориентированного гладкого многообразия M в пространство X). Если отображение g удовлетворяет "условию спинорности"

$$g^*(w) = w_2(M) ,$$

то элементы множества $\mathfrak{Spin}(M, f \circ g)$ мы будем называть Spin(f)-структурами на (M, g), а тройки (M, g, α) с $\alpha \in \mathfrak{Spin}(M, f \circ g)$ — сингулярными Spin(f)-многообразиями в X. Таким образом, согласно определениям пп. 1.2 и 1.7, Spin(f)-структура на сингулярном многообразии (M, g) — это гомотопический класс морфизмов $\alpha : \nu_M \to \gamma_{SO}$ образующих коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\alpha_B"] \arrow[d, "g"'] & BSO \arrow[d, "\pi"] \\
X \arrow[r, "f"] & K(\mathbf{Z}_2, 2)
\end{tikzcd} .$$

Эквивалентная формулировка получится, если мы рассмотрим расслоение $\pi_f = f^! \pi : B_f \to X$, индуцированное отображением f из расслоения π. Пространство B_f канонически отображается в BSO, и это отображение индуцирует линейное расслоение $\gamma_f = f^! \gamma_{SO} : E_f \to B_f$ Теперь мы можем определить Spin(f)-структуру на (M, g) как гомотопический класс морфизмов $\alpha : \nu_M \to \gamma_f$, накрывающих отображение g т.е. образующих коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & B_f \arrow[d, "\pi_f"] \\
M \arrow[ur, "\alpha_B"] \arrow[r, "g"] & X
\end{tikzcd} . \qquad (2)$$

Если, в частности, $f : X \to K(\mathbf{Z}_2, 2)$ — постоянное отображение, то Spin(f)-структура на (M, g) — это просто обычная Spin-структура на многообразии M.

Будем говорить, что сингулярные Spin(f)-многообразия (M, g, α) и (M', g', α') конкордантны (обозначение: $(M, g, \alpha) \approx (M', g', \alpha')$), если найдутся диффеоморфизм $\varphi : M' \to M$ степени $+1$ и гомотопия $G : M' \times [0,1] \to X$, соединяющая отображение $g \circ \varphi$ с отображением g', такие, что $(\varphi, f \circ G)^*(\alpha) = \alpha'$. Соответствующий диффеоморфизм $M' \to M$ мы будем иногда (допуская некоторую некорректность) называть конкордантностью между (M, g, α) и (M', g', α'). Заметим, что в частном случае $X = K(\mathbf{Z}_2, 2)$ и $f = \mathrm{id}$ сингулярные многообразия (M, g, α) и (M', g', α') тогда и только тогда конкордантны, когда многообразия M и M' ориентированно диффеоморфны. В самом деле, в этом случае пространство B_f (см. диаграмму (2)) совпадает с BSO, так что гомотопический класс отображения $\alpha_B : M \to B_f$ определяется ориентацией многообразия M.

1.9. Группы $\Omega_i^{\mathrm{Spin}}(X, A; f)$. Spin($f$)-структуры на сингулярных многообразиях, подобно Spin(f)-структурам на обычных многообразиях, правильно ведут себя по отношению к диффеоморфизмам, сужениям на край и склеиваниям по компоненте края. Применяя стандартное построение, мы получаем группы бордизмов, которые обозначаем через $\Omega_i^{\mathrm{Spin}}(X; f)$, а также — для любого подпространства $A \subset X$ — относительные группы бордизмов, которые обозначаем через $\Omega_i^{\mathrm{Spin}}(X, A; f)$. *Заметим, что в отмеченных выше частных случаях $f = \mathrm{const}$ и $f = \mathrm{id}$ мы имеем соответственно*

$$\Omega_i^{\mathrm{Spin}}(X; \mathrm{const}) = \Omega_i^{\mathrm{Spin}}(X)$$

т.е. обычные группы спинорных бордизмов пространства X) и

$$\Omega_i^{\mathrm{Spin}}(K(\mathbf{Z}_2, 2); \mathrm{id}) = \Omega_i^{SO}$$

группы ориентированных кобордизмов).

1.10. Функториальные свойства групп $\Omega_i^{\mathrm{Spin}}(X, A; f)$. Обозначим через $\mathfrak{X}$ категорию, объектами которой служат тройки (X, A, f), составленные из топологического пространства X, его подпространства A (которое, как всегда, может быть пустым) и отображения $f : X \to K(\mathbf{Z}_2, 2)$. Определение морфизма в $\mathfrak{X}$ близко к таковому в п. 1.6: морфизмом из (X, A, f) в (Y, B, g) называется пара $(p, [F])$, составленная из отображения $p : X \to Y$ с $p(A) \subset B$ и гомотопического класса $[F]$ отображений $F : X \times [0,1] \to K(\mathbf{Z}_2, 2)$ с $F_0 = f$ и $F_1 = g \circ p$ (отметим, что "направление" гомотопии F теперь противоположно по сравнению с 1.6). Аналогично п. 1.6 определяется и композиция таких морфизмов: если $(q, [G])$ — морфизм из (Y, g) в (Z, h), то композиция $(q,[G])\circ(p,[F])$ — это морфизм $\big(q\circ p, F\vee(G\circ p)\big)$ (где $\vee$ обозначает, как и в 1.6, “соединение” двух гомотопий, как путей в пространстве отображений).

Группы $\Omega_i^{\mathrm{Spin}}(X,A;\ f)$ образуют ковариантный функтор на категории $\mathfrak{X}$: для морфизма $\Phi=\big(p,[F]\big)$ указанного выше вида положим

$$\Phi_*(M,\varphi,\alpha)=(M,p\circ\varphi,F^*(\alpha)) \ ,$$

где $F^*(\alpha)$ определяется как в 1.6.

1.11. Гомологические свойства групп $\Omega_i^{\mathrm{Spin}}(X,A;\ f)$. Заметим, во-первых, что для морфизмов категории $\mathfrak{X}$ можно обычным образом определить понятие деформации, и что функтор $\Omega_i^{\mathrm{Spin}}(X,A;\ f)$ гомотопически инвариантен (т.е. удовлетворяет аксиоме 5 Стинрода-Эйленберга). Таким образом, для вычисления $\Omega_i^{\mathrm{Spin}}(X,A;\ f)$ достаточно знать пару (X,A) с точностью до гомотопического типа. Нетрудно видеть также, что выполнены и две другие аксиомы Стинрода-Эйленберга — точности (аксиома 4) и вырезания (аксиома 6). Проверка этих аксиом ничем не отличается от случая обычных бордизмов. В частности, аксиома вырезания сводится к следующей “лемме о поглощении”, очевидным образом выполненной в категории гладких многообразий:

Пусть M — компактное многообразие. Для любого замкнутого подмножества $C\subset M$ и для любой его окрестности U найдется компактное подмногообразие $M_0\subset M$ коразмерности 0, содержащее C и содержащееся в U.

Как обычно, из аксиом Стинрода-Эйленберга следует, что имеется канонический изоморфизм

$$\Omega_i^{\mathrm{Spin}}(CX,X;\ f)\approx\Omega_{i-1}^{\mathrm{Spin}}(X,\mathrm{pt};\ f|_X) \ , \tag{3}$$

где CX обозначает конус над X. Ясно, впрочем, что отображение f в этой ситуации канонически гомотопно постоянному отображению; из 1.10 следует поэтому, что изоморфизм (3) совпадает со обычным “надстроечным” изоморфизмом в теории спинорных бордизмов

$$\Omega_i^{\mathrm{Spin}}(CX,X)\approx\Omega_{i-1}^{\mathrm{Spin}}(X,\mathrm{pt}) \ .$$

Взяв здесь, в частности, $X=S^{n-1}$, и продолжив цепочку изоморфизмов стандартным образом “вниз по размерности”, мы получаем канонический изоморфизм

$$\Omega_i^{\mathrm{Spin}}(D^n,S^{n-1};\ f)\approx\Omega_{i-n}^{\mathrm{Spin}} \ . \tag{4}$$

зоморфизм (4) можно получить и более непосредственным образом.
сть (M, φ, α) представляет элемент группы $\Omega_i^{\mathrm{Spin}}(D^n, S^{n-1}; f)$. Счи-
что отображение $\varphi : M \to D^n$ является гладким и трансверсаль-
к $0 \in D^n$, положим $V = f^{-1}(0)$. Тогда ν_V канонически изоморф-
${}^*\nu_M$, где $i : V \to M$ — включение, и нетрудно видеть, что $(V, \alpha|_V)$ —
раз тот элемент группы $\Omega_{i-n}^{\mathrm{Spin}}$, который соответствует (M, φ, α) в си-
зоморфизма (4).

.12. О соотношении между понятием Spin(f)-структуры и
шим понятием “структуры на многообразии”. В [14, глава 2]
ывается (вводившееся различными авторами) настолько общее по-
ие “структуры на многообразии”, что оно покрывает, по-видимо-
все “мыслимые” способы построения теорий бордизмов (во всяком
ае, для многообразий без особенностей). В частности, определен-
е выше группы $\Omega_i^{\mathrm{Spin}}(X; f)$ можно рассматривать как специальный
чай бордизмов (B, f)-многообразий, описанных в [14]. Под (B, f)-
ктурой на многообразии M, где $f : B \to BO$ — некоторое за-
ное расслоение Серра, в [14] понимается гомотопический класс
бражений $M \to B$, накрывающих классифицирующее отображе-
$\nu_M : M \to BO$. При этом, если речь идет об ориентирован-
х многообразиях, то можно без потери общности заменить в этом
еделении пространство BO на BSO. Вернемся теперь к ситуации,
смотренной выше. В силу гомотопической инвариантности групп
$(X; f)$ мы всегда можем предполагать, что данное отображение
$: X \to K(\mathbf{Z}_2, 2)$ является расслоением. Обозначим, как и в п. 1.8,
рез π_f расслоение над пространством X, индуцированное из рассло-
ия $\pi : BSO \to K(\mathbf{Z}_2, 2)$ посредством отображения f. Мы имеем,
едовательно, коммутативную диаграмму расслоений

$$\begin{tikzcd}
B_f \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\pi_f"'] & BSO \arrow[d, "\pi"] \\
X \arrow[r, "f"] & K(\mathbf{Z}_2, 2)
\end{tikzcd} .$$

ара отображений $g : M \to X$, $\mu : M \to BSO$, удовлетворяющая усло-
ию $f \circ g = \pi \circ \mu$ — это отображение $M \to B_f$, накрывающее как g,
ак и μ. Если теперь мы рассмотрим гомотопию $F_t : M \to BSO$, со-
иняющую отображение μ с отображением ν_M (см. второе определе-
ие Spin(f)-структуры в п. 1.3), то эта гомотопия поднимается в B_f
дает отображениe $\widetilde{\nu} : M \to B_f$, накрывающее ν_M, и проектирующе-
ся в X в отображение, гомотопное отображению g. Мы, видим, что

сингулярное Spin(f)-многообразие в X — это, с точностью до гомот
пии (тем более, до бордизма), то же самое, что $(B_f, \widetilde{f})$-многообраз
в терминологии [14], так что группа $\Omega_i^{\mathrm{Spin}}(X;\, f)$ — то же, что $\Omega_i(B_f,$
в обозначениях Стонга.

1.13. Топологический случай. Группы $\Omega\mathrm{T}_i^{\mathrm{Spin}}(X, A;\, f)$. Ста
дартные теоремы о TOP-расслоениях и о нормальных расслоениях т
пологических многообразий [6, Essay IV] позволяют перенести все т
о чем говорилось выше, на топологический случай. Во-первых, из [
Essay IV, предложение 8.1] следует, что имеется универсальное ориен
тированное TOP-расслоение

$$\gamma_{STOP} = \{p_{STOP)} : ESTOP \to BSTOP\} ,$$

и что для всякого ориентированного TOP-расслоения имеется "почт
каноническое" (в том же смысле, как и в п. 1.1) классифицирующе
отображение в пространство $BSTOP$. Универсальный класс w_2 опр
деляет, как и в 1.2, расслоение Серра

$$\gamma_{\mathrm{Spin}TOP} = \{p_{\mathrm{Spin}TOP} : E\mathrm{Spin}TOP \to B\mathrm{Spin}TOP\} ,$$

что позволяет ввести понятие Spin(f)-структуры на ориентированно
TOP-расслоении дословно так же, как в 1.2–1.3, и проверить выполн
ние тех же свойств, что и в 1.6. Наконец, согласно теоремам о суще
ствовании и единственности нормального расслоения для топологич
ских многообразий [6, Essay IV, теоремы A1 и A2], для ориентирова
ного топологического многообразия M имеется "почти каноническое
нормальное отображение $\nu_M : M \to BSTOP$. Все это позволяет п
ренести конструкции пп. 1.7–1.9 на категорию топологических мног
образий и, в частности, определить группы топологических бордизмо
$\Omega\mathrm{T}_i^{\mathrm{Spin}}(X;\, f)$ и $\Omega\mathrm{T}_i^{\mathrm{Spin}}(X, A;\, f)$. Вопрос о выполнении аксиом Стинро
да-Эйленберга для функтора $\Omega\mathrm{T}_i^{\mathrm{Spin}}(X, A;\, f)$ является нетривиальны
лишь в связи с "аксиомой вырезания", которая тесно связана с теор
мой трансверсальности для топологических многообразий и легко вы
водится из этой теоремы (в варианте для отображений, как известн
имеющем место для всех размерностей [6, 15]). В самом деле, чтоб
получить топологический вариант "леммы о поглощении" из 1.11, д
статочно применить теорему трансверсальности (для отображений в **R**
к "функции Урысона", разделяющей множества C и $M \setminus U$. Итак, вс
свойства Spin(f)-структур и Spin(f)-бордизмов, о которых говорило
в пп. 1.2–1.11, переносятся на топологическую категорию.

1.14. Односвязный случай: Spin(w)**-структуры и группы бордизмов** $\Omega_i^{\mathrm{Spin}}(X;\, w)$ **и** $\Omega\mathrm{T}_i^{\mathrm{Spin}}(X;\, w)$, $w \in H^2(X;\, \mathbf{Z}_2)$. Пусть (X, f) — объект категории $\mathfrak{X}$, и пусть пространство X односвязно. В этом случае любые два отображения $X \times [0,1] \to K(\mathbf{Z}_2, 2)$ гомотопны rel $X \times [0,1]$ (очевидно, вместо односвязности достаточно было бы условия $H^1(X;\, \mathbf{Z}_2) = 0$). Мы можем поэтому отождествить морфизмы $(X, f) \to (X', f')$ в категории $\mathfrak{X}$ просто со спинорными отображениями $X \to X'$, т.е. с отображениями, образующими гомотопически коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr] \arrow[dr, "f"'] & & X' \arrow[dl, "f'"] \\
& K(\mathbf{Z}_2, 2) &
\end{tikzcd}.$$

В соответствии с п. 1.10, группы $\Omega_i^{\mathrm{Spin}}(X;\, f)$ с гомотопными f оказываются (для односвязного X) канонически изоморфными, т.е. они зависят только от класса $w = f^*(\varkappa) \in H^2(X;\, \mathbf{Z}_2)$, и мы будем вместо $\Omega_i^{\mathrm{Spin}}(X;\, f)$ и $\Omega\mathrm{T}_i^{\mathrm{Spin}}(X;\, f)$ писать $\Omega_i^{\mathrm{Spin}}(X;\, w)$ и $\Omega\mathrm{T}_i^{\mathrm{Spin}}(X;\, w)$.

Группы $\Omega_i^{\mathrm{Spin}}(X;\, w)$ и $\Omega\mathrm{T}_i^{\mathrm{Spin}}(X;\, w)$ можно, таким образом, рассматривать как функторы на категории $\mathfrak{X}'$, объекты которой — это пары вида (X, w), где X односвязно и w — элемент группы $H^2(X;\, \mathbf{Z}_2)$, а морфизмы $(X, w) \to (X', w')$ — это спинорные отображения $f : X \to X'$ отображения, удовлетворяющие условию $f^*(w') = w$).

Пусть, далее, (M, g, α) — сингулярное Spin(w)-многообразие в X. Если многообразие M также односвязно, то, в соответствии с 1.5, указание Spin-структуры α становится излишним. Таким образом, односвязное сингулярное Spin(w)-многообразие в X — это просто спинорное отображение $g : M \to X$ (заметим, что всякое односвязное многообразие M определяет объект $(M, w_2(M))$ категории $\mathfrak{X}'$). Соответственно, в этом случае все построения п. 1.9 и следующих "тривиализуются": например, конкордантность сингулярных многообразий (M, g) и (M', g') — это просто сохраняющий ориентацию гомеоморфизм (диффеоморфизм) $\varphi : M' \to M$ с $g \circ \varphi \sim g'$.

Заметим, наконец, что в случае $i \geq 4$ мы можем (применяя элементарную хирургию) представить всякий элемент группы $\Omega_i^{\mathrm{Spin}}(X;\, w)$ или $\Omega\mathrm{T}_i^{\mathrm{Spin}}(X;\, w)$ односвязным многообразием. Итак, оказывается, что в (наиболее интересующем нас) случае односвязного X и не слишком малого i группы $\Omega_i^{\mathrm{Spin}}(X;\, w)$ и $\Omega\mathrm{T}_i^{\mathrm{Spin}}(X;\, w)$ можно определить совсем просто — как группы бордизмов спинорных отображений ориентированных многообразий в пространство X.

§2. Редукция классификационных теорем

2.1. Многообразия “с заданными гомологиями и заданн классом w_2”: множества $\mathcal{M}_r(G,w)$ и $\mathcal{MT}_r(G,w)$. Всюду в дальн шем мы будем понимать под $\mathbf{N}$ множество неотрицательных цел чисел. Через $b_i(X)$ обозначается, как обычно, i-мерное число Бе $\operatorname{rank} H_i(X)$ пространства X.

Через $\mathcal{M}$ (соответственно, $\mathcal{MT}$) мы обозначаем множество клас ориентированно диффеоморфных (соответственно, гомеоморфных) носвязных замкнутых 6-мерных гладких (соответственно, топологи ских) многообразий. Через $\mathcal{M}_r$ и $\mathcal{MT}_r$, где $r \in \mathbf{N}=\{0,1,\ldots\}$ мы обоз чаем подмножества множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{MT}$, заданные условием $b_3(M) =$ Допуская некоторую вольность, мы будем писать $M \in \mathcal{M}$ и т. д., и в виду, что M — это многообразие, удовлетворяющее соответствую условиям.

Рассмотрим категорию $\mathcal{G}$, объектами которой являются гомом физмы $G \xrightarrow{w} \mathbf{Z}_2$, где G — конечно порожденная абелева группа, а м физмами — коммутативные диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "w"'] & & G' \arrow[dl, "w'"] \\ & \mathbf{Z}_2 & \end{tikzcd} ;$$

мы будем говорить, что образующий такую диаграмму гомоморфизм является спинорным относительно w, w'. Мы будем использовать пись вида $(G,w) \in \mathcal{G}$ как сокращение для “G — конечно порожден абелева группа и w — гомоморфизм $G \to \mathbf{Z}_2$”.

Мы будем называть гладкими или же, соответственно, топологи скими (G,w)-многообразиями пары вида (M,φ), где $M \in \mathcal{M}$ (соотв ственно, $M \in \mathcal{MT}$) и $\varphi : H_2(M) \to G$ — изоморфизм, удовлетворяю условию

$$w \circ \varphi = w_2(M)$$

(иначе говоря, спинорный относительно $(w_2(M), w)$). Мы говор что гладкие (G,w)-многообразия (M,φ) и (M',φ') (ориентирован диффеоморфны, если существует (сохраняющий ориентацию) дифф морфизм $h : M \to M'$, согласованный с φ, φ', т.е. образующий комм тативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} H_2(M) \arrow[rr, "h_*"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & H_2(M') \arrow[dl, "\varphi'"] \\ & G & \end{tikzcd} ;$$

алогично определяется понятие гомеоморфизма для топологических $w)$-многообразий. Через $\mathcal{M}(G,w)$ (соответственно, $\mathcal{MT}(G,w)$) мы значаем множество классов ориентированно диффеоморфных (советственно, гомеоморфных) (G,w)-многообразий (гладких или, советственно, топологических); выражаясь неформально, можно скать, что эти множества состоят из многообразий с заданной груп 2-мерных гомологий и заданным 2-мерным классом Штифеляни. Через $\mathcal{M}_r(G,w)$ и $\mathcal{MT}_r(G,w)$, где $r \in \mathbf{N}$, мы обозначаем подмноства множеств $\mathcal{M}(G,w)$ и $\mathcal{MT}(G,w)$ соответственно, заданные услоем $b_3(M) = 2r$. Допуская опять такую же вольность, как и выше, будем употреблять обозначения вида $(M,\varphi) \in \mathcal{M}(G,w)$ и т. д.

Ясно, что определенные выше множества (G,w)-многообразий мот рассматриваться как функторы из категории $\mathcal{G}$ в категорию мноств.

2.2. Группы $\Omega_i^{\mathrm{Spin}}(G,2;\, w)$ и $\Omega\mathrm{T}_i^{\mathrm{Spin}}(G,2;\, w)$; инвариант θ. Пусть ть $(G,w) \in \mathcal{G}$. Через $K(G,2)$ мы обозначаем, как всегда, пространво Эйленберга-Маклейна типа $(G,2)$. При этом мы можем отождевить гомоморфизм w с элементом группы $H^2(K(G,2);\, \mathbf{Z}_2)$, которую означаем, как обычно, через $H^2(G,2;\, \mathbf{Z}_2)$. Согласно п. 1.14, мы име группы бордизмов $\Omega_i^{\mathrm{Spin}}(K(G,2);\, w)$ и $\Omega\mathrm{T}_i^{\mathrm{Spin}}(K(G,2);\, w)$, которые ем в этом же стиле обозначать через $\Omega_i^{\mathrm{Spin}}(G,2;\, w)$ и $\Omega\mathrm{T}_i^{\mathrm{Spin}}(G,2;\, w)$. и группы образуют функторы на категории $\mathcal{G}$; таким образом, каому морфизму $(G,w) \to (G',w')$, или, иначе говоря, спинорному гоорфизму $\varphi : G \to G'$, отвечают индуцированные гомоморфизмы

$$\varphi_* : \Omega_i^{\mathrm{Spin}}(G,2;\, w) \to \Omega_i^{\mathrm{Spin}}(G',2;\, w')$$

$$\varphi_* : \Omega\mathrm{T}_i^{\mathrm{Spin}}(G,2;\, w) \to \Omega\mathrm{T}_i^{\mathrm{Spin}}(G',2;\, w')\ .$$

Пусть M — замкнутое односвязное ориентированное n-мерное мнобразие. Всякий спинорный гомоморфизм $\varphi : H_2(M) \to G$ определя гомотопический класс спинорных отображений $M \to K(G,2)$ и, слевательно, некоторый элемент $\theta(M,\varphi)$ группы $\Omega_n^{\mathrm{Spin}}(G,2;\, w)$ (в гладм случае) или $\Omega\mathrm{T}_n^{\mathrm{Spin}}(G,2;\, w)$ (в топологическом). Мы имеем, таким разом, естественные отображения

$$\mathcal{M}(G,w) \xrightarrow{\theta} \Omega_6^{\mathrm{Spin}}(G,2;\, w) \tag{6}$$

$$\mathcal{MT}(G,w) \xrightarrow{\theta} \Omega\mathrm{T}_6^{\mathrm{Spin}}(G,2;\, w) \tag{7}$$

(в другом месте будет показано, что отображение (6) можно рассм
тривать как сужение отображения (7), что оправдает одинаковые об
значения). Пусть $M\in\mathcal{M}$; взяв $G = H_2(M)$, мы получаем (зависящи
только от M) инвариант

$$\theta(M)=\theta(M,\mathrm{id})\in\Omega_6^{\mathrm{Spin}}(H_2(M),2;\, w_2(M))\ ,$$

представленный, очевидно, отображением $f_{M,2}: M\to K(\pi_2(M),2)$
канонической (с точностью до гомотопии) проекцией пространства
на первый этаж его “башни Постникова”. Аналогично, для $M\in\mathcal{M}$
мы имеем инвариант $\theta(M)\in\Omega\mathrm{T}_6^{\mathrm{Spin}}(H_2(M),2;\, w_2(M))$ (для гладкого
этот “топологический” инвариант θ может быть отождествлен с преж
ним “гладким”). Как вытекает непосредственно из определений, знач
ния отображений (7) и (6) выражаются через инвариант $\theta(M)$ по фор
муле

$$\theta(M,\varphi)=\varphi_*\theta(M)\ .$$

Заметим еще, что для любых M_1, M_2 имеет место следующее соотнош
ние аддитивности:

$$\theta(M_1\mathbin{\#}M_2)=(i_1)_*\theta(M_1)+(i_2)_*\theta(M_2)\ , \qquad (8$$

где $i_s: H_2(M_s)\to H_2(M_1\mathbin{\#}M_2)=H_2(M_1)\oplus H_2(M_2)$ обозначают ест
ственные включения (являющиеся, очевидно, спинорными). Частны
случаем соотношения (8) является следующее “свойство стабильности

$$\theta(M\mathbin{\#}S^3{\times}S^3)=\theta(M) \qquad (9$$

для любого $M\in\mathcal{M}$ или $M\in\mathcal{MT}$.

2.3. Теорема классификации. *Сужения отображений* (6) *и* (7
на множества $\mathcal{M}_r(G,w)$ *и* $\mathcal{MT}_r(G,w)$ *являются биекциями для все*
G, w *и* r.

Эта теорема может рассматриваться как предварительная форм
гладкой (соответственно, топологической) классификации; она, в част
ности, показывает, что набор инвариантов

$$\left(\tfrac{1}{2}b_3(M), H_2(M), w_2(M), \theta(M)\right)$$

является полным, т.е. определяет многообразие M однозначно с точн
стью до гомеоморфизма (соответственно, диффеоморфизма). Точне
говоря, приведенная выше формулировка равносильна следующей:

(а) *Для любого целого числа* $r \geq 0$, *конечно-порожденной абелевой группы* G, *гомоморфизма* $w : G \to \mathbf{Z}_2$ *и класса бордизмов* $\theta \in \Omega_6^{\mathrm{Spin}}(G, 2;\, w)$ (*или, соответственно,* $\theta \in \Omega\mathrm{T}_6^{\mathrm{Spin}}(G, 2;\, w)$) *найдется многообразие* $M \in \mathcal{M}$ (*соответственно,* $M \in \mathcal{MT}$) *с* $b_3(M) = 2r$ *и спинорный изоморфизм* $\varphi : H_2(M) \to G$ *с* $\varphi_* \theta(M) = \theta$.

(б) *Пусть даны* $M, M' \in \mathcal{M}$ (*или* $M, M' \in \mathcal{MT}$), *удовлетворяющие условию* $b_3(M) = b_3(M')$. *Изоморфизм* $\varphi : H_2(M) \to H_2(M')$ *в том и только том случае индуцируется сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом* (*соответственно, гомеоморфизмом*) $M \to M'$, *если он спинорный и удовлетворяет условию* $\varphi_* \theta(M) = \theta(M')$.

Доказательство этой теоремы содержится в следующих далее пунктах 2.5–2.18. Вначале мы сформулируем одно ее немедленное следствие — теорему о разложении из [1].

2.4. Следствие: теорема о разложении. Мы будем использовать обозначение $r(S^3 \times S^3)$ для связной суммы вида

$$\underbrace{S^3 \times S^3 \,\#\, \ldots \,\#\, S^3 \times S^3}_{(r \text{ слагаемых})} \;.$$

Из теоремы 2.3 и из соотношения (9) непосредственно следует:

Теорема. *Для любого многообразия* $M \in \mathcal{M}_r$ (*или, соответственно,* $M \in \mathcal{MT}_r$) *существует единственное многообразие* $M_0 \in \mathcal{M}_0$ (*соответственно,* $M_0 \in \mathcal{MT}_0$), *для которого имеет место сохраняющий ориентацию диффеоморфизм* (*соответственно, гомеоморфизм*)

$$M \approx M_0 \,\#\, r(S^3 \times S^3) \;. \tag{10}$$

В действительности, как нетрудно видеть, из теоремы 2.3 следует несколько более точное утверждение о единственности многообразия M_0.

2.5. Усиленная теорема единственности разложения (10). *Пусть* $M_0, M_0' \in \mathcal{M}_0$ ($M_0, M_0' \in \mathcal{MT}_0$), *и пусть*

$$h : M_0 \,\#\, r(S^3 \times S^3) \to M_0' \,\#\, r(S^3 \times S^3)$$

— *сохраняющий ориентацию диффеоморфизм* (*соответственно, гомеоморфизм*). *Тогда найдется сохраняющий ориентацию диффеоморфизм* (*соответственно, гомеоморфизм*) $h_0 : M_0 \to M_0'$, *индуцирующий тот же самый изоморфизм* $H_2(M_0) \to H_2(M_0')$, *что и* h.

Как было отмечено выше, эта теорема единственности является н посредственным следствием классификационной теоремы 2.3. С друг стороны, мы приведем ниже ее независимое доказательство, котор одновременно будет и наиболее существенной частью доказательст теоремы 2.3. Это независимое доказательство будет существенно оп раться на некоторое усиление утверждения о существовании разлож ния (10). Чтобы сформулировать это усиление, заметим, что для люб го замкнутого ориентированного 6-мерного многообразия M на груп $H_3(M)/\mathrm{Tors}$ имеется целочисленная унимодулярная кососимметрич ская форма — форма пересечений. Такого рода форма, как хоро известно, всегда обладает симплектическим базисом — базисом ви $(a_1, b_1, \dots, a_r, b_r)$ с $a_i \cdot a_j = b_i \cdot b_j = 0$ и $a_i \cdot b_j = \delta_{ij}$. В частности, многообразии $r(S^3{\times}S^3)$ имеется стандартный симплектический бази в котором a_i и b_i — это классы гомологий сфер $S^3{\times}\mathrm{pt}$ и $\mathrm{pt}{\times}S^3$ в i “экземпляре” $S^3{\times}S^3$.

2.6. Усиленная теорема существования разложения (1

Для любого многообразия $M \in \mathcal{M}$ $(M \in \mathcal{MT})$ *и для любого симплект ческого базиса* $(a_1, b_1, \dots, a_r, b_r)$ *группы* $H_3(M)/\mathrm{Tors}$ *найдутся так многообразие* $M_0 \in \mathcal{M}_0$ *(соответственно,* $M_0 \in \mathcal{MT}_0$*) и такой диффе морфизм (соответственно, гомеоморфизм)*

$$h : M_0 \# r(S^3{\times}S^3) \to M \ ,$$

при котором базис $(a_1, b_1, \dots, a_r, b_r)$ *окажется образом стандартно симплектического базиса многообразия* $r(S^3{\times}S^3)$.

В гладком случае это теорема 1 работы [17] (в формулировке в [1 говорится лишь о существовании диффеоморфизма h, без уточнен относительно реализации заданного базиса, однако доказывается та именно то, что сформулировано выше). Доказательство очень пр сто. Ввиду односвязности M, используя теорему Гуревича и “лем Уитни”, мы можем реализовать классы гомологий a_i и b_i вложениям $\alpha_i : S^3 \to M$ и $\beta_i : S^3 \to M$ с “минимальным” числом трансверсал ных пересечений (т.е. так, что пересекаются — в одной точке — толь сферы $\alpha_i(S^3)$ и $\beta_i(S^3)$). Ввиду $\pi_3(SO_3) = 0$, регулярная окрестность каждого “букета” $\alpha_i(S^3) \cup \beta_i(S^3)$ устроена стандартно — так же к регулярная окрестность U множества $S^3{\times}\mathrm{pt} \cup \mathrm{pt}{\times}S^3$ в $S^3{\times}S^3$. Но, оч видно, $S^3{\times}S^3 \setminus U$ — это 6-мерный шар. Вырезав из многообразия все U_i и заклеив каждую сферу ∂U_i шаром, мы получим как многообр зие M_0, так и требуемый диффеоморфизм h.

для гладкого случая (в топологическом случае доказательство то ж самое.

Пусть V и W — ориентированные многообразия размерности $n+$ со связным непустым краем. Мы будем обозначать через $V \natural W$ и "связную сумму вдоль края" — результат отождествления в дизъюнкт ном объединении $V \sqcup W$ двух n-мерных шаров, вложенных в ∂V и ∂ соответственно с сохранением и с обращением ориентации. Это же об значение $V \natural W$ мы будем использовать и в ситуации, когда край одно из многообразий несвязен, уточняя в таком случае, какая компонент края имеется в виду.

Связная сумма вида

$$\underbrace{S^3{\times}D^4 \natural \ldots \natural S^3{\times}D^4}_{r\ \text{слагаемых}}$$

будет обозначаться через $r(S^3{\times}D^4)$; очевидно, что при этих обозн чениях мы имеем $\partial r(S^3{\times}D^4)) = r(S^3{\times}S^3)$. Как и в п. 2.6, ч рез $a_1, b_1, \ldots, a_r, b_r$ мы обозначаем стандартный базис в $H_3(r(S^3{\times}S^3)$ Образы классов $a_1, \ldots, a_r$ при гомоморфизме включения

$$H_3(r(S^3{\times}S^3)) \to H_3(r(S^3{\times}D^4)) \ ,$$

составляющие базис группы $H_3(r(S^3{\times}D^4))$, мы также будем обозн чать через $a_1, \ldots, a_r$. Через $\tilde{b}_i$, $i = 1, \ldots, r$, мы обозначаем эл мент группы $H_4(r(S^3{\times}D^4), r(S^3{\times}S^3))$, представленный шаром $\mathrm{pt}{\times}D$ в i-м экземпляре $S^3{\times}D^4$. Классы $\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_r$ образуют базис групп $H_4(r(S^3{\times}D^4), r(S^3{\times}S^3))$ и удовлетворяют соотношению

$$\partial\tilde{b}_i = b_i \ , \qquad (11$$

где ∂ — связывающий гомоморфизм пары $(r(S^3{\times}D^4), r(S^3{\times}S^3))$.

Положим

$$W = ([0,1]{\times}M_0) \natural r(S^3{\times}D^4) \ .$$

Ясно, что край многообразия W состоит из двух компонент: $\partial_0 W \approx M$ и $\partial_1 W \approx M_0 \# r(S^3{\times}S^3)$. Учитывая ориентации, мы можем написать

$$\partial W = \partial_1 W \cup (-\partial_0 W) \ ,$$

где знак "$-$" обозначает противоположную ориентацию. Мы имеем:

$$H_i(W, \partial_0 W) = H_i(r(S^3{\times}D^4), \mathrm{pt}) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq 3 \\ \mathbf{Z}^r & \text{при } i = 3 \end{cases} \ , \qquad (12$$

причем базисом группы $H_3(W,\partial_0 W)$ являются образы классов $a_1,\dots,a_r$ которые мы будем обозначать так же, как и сами эти классы). Аналогичным образом,

$$H_i(W,\partial_1 W) = H_i(r(S^3\times D^4), r(S^3\times S^3)\setminus \mathrm{pt}) = \begin{cases} 0 & \text{при } i\neq 4 \\ \mathbf{Z}^r & \text{при } i=4 \end{cases} , \qquad (13)$$

и базис группы $H_4(W,\partial_1 W)$ образован классами $\tilde{b}_1,\dots,\tilde{b}_r$.

Возьмем теперь многообразие W', образованное из многообразия M_0' таким же образом, каким W было получено из M_0:

$$W' = ([0,1]\times M_0') \natural r(S^3\times D^4) .$$

Пусть многообразия M_0 и M_0' удовлетворяют предположениям п. 2.5. В этом случае компоненты краев $\partial_1 W$ и $\partial_1 W'$ диффеоморфны. Пусть V — результат склеивания многообразий W и W':

$$V = W \cup_h -W'$$

знак "–" обозначает опять изменение ориентации на противоположную). Мы имеем, очевидно, $\partial V = M' \cup -M$. Вследствие 2.7(б) мы можем считать, что индуцированный диффеоморфизмом h изоморфизм

$$H_3(M_0 \# r(S^3\times S^3))/\,\mathrm{Tors} \to H_3(M_0' \# r(S^3\times S^3))/\,\mathrm{Tors}$$

совпадает с любым выбранным автоморфизмом группы $H_3(r(S^3\times S^3))$, сохраняющим форму пересечений; можно, в частности, считать, что

$$\begin{cases} h_*(a_i) = b_i \\ h_*(b_i) = -a_i \end{cases} , \; i = 1,\dots,r \qquad (14)$$

фактически, существенным будет только первое из этих соотношений). Вследствие (14) (и с учетом (12) и (13)), связывающие гомоморфизмы

$$\partial : H_i(V,W) = H_i(W',\partial_1 W') \to H_{i-1}(W,\partial_0 W)$$

точной последовательности тройки (V,W,M_0) являются для всех i изоморфизмами, следовательно, $H_*(V,M_0) = 0$ и V — h-кобордизм между многообразиями M_0 и M_0'. Соответствующий диффеоморфизм $: M_0 \to M_0'$, в силу построения, сохраняет ориентацию, а его действие на двумерные гомологии совпадает с действием "склеивающего" диффеоморфизма h. Теорема, таким образом, доказана.

2.9. Некоторые замечания к теореме 2.5. Теорема 2.5 б
впервые доказана (в гладком варианте) в работе [1] — совсем дру
способом (близким к методу доказательства соотношения bP_{2k+1}
для нечетных k в §6 работы [9]; метод доказательства работы [1] б
затем использован в [2, 3] для получения классификационных
рем для спинорных 6-мерных многообразий). Конечно, справед
вость этой теоремы для соответствующих классов многообразий вы
кает и из результатов работ [17, 8]. Гораздо более общее утверж
ние этого рода получено Нецветаевым: в работе [12] доказано,
аналог теоремы 2.5 имеет место для любых односвязных $(4k +$
мерных многообразий, в том числе и незамкнутых [12, теорема
(это свойство односвязных $(4k+2)$-мерных многообразий называ
ся в цитируемой работе *стабильностью*). Метод, использованн
в работе [12], близок к приведенному выше в том смысле, что тре
емый h-кобордизм строится там посредством “склеивания” многооб
зий $([0,1]\times M_0)\natural r(S^{2k+1}\times D^{2k+2})$ и $([0,1]\times M_0')\natural r(S^{2k+1}\times D^{2k+2})$ по п
ходящему диффеоморфизму

$$f : M_0 \# r(S^{2k+1}\times S^{2k+1}) \to M_0' \# r(S^{2k+1}\times S^{2k+1}) .$$

Построение требуемого диффеоморфизма f и составляет главную ча
доказательства в [12] (в нашей ситуации это обеспечивается тео
мой 2.7(б) и совсем просто). В работе [12] речь идет только о глад
многообразиях, но, используя соображения, изложенные в [6, Essay
приложение C], нетрудно перенести доказательство на топологичес
многообразия. Далее, в формулировке теоремы 1.1 работы [12] нич
не говорится о гомологических условиях на диффеоморфизм f_0 (мы
пользуем обозначения из п. 2.5), однако из ее доказательства там
трудно усмотреть, что соответствующий аналог гомологического ус
вия из п. 2.5 можно считать выполненным.

Заметим, наконец, что в неодносвязном случае наше доказательст
теоремы 2.5 не проходит по ряду причин. Одна из причин — возможн
наличие кручений, т.е. нетривиальность соответствующей группы Уа
тхеда. Однако “более основной” причиной является отсутствие не
носвязного аналога теоремы 2.7. Как известно, в неодносвязном случ
роль обычных целочисленных групп гомологий должны играть груп
гомологий с коэффициентами в кольце $\mathbf{Z}[\pi]$ — групповом кольце фу
даментальной группы. Повторяя рассуждение из п. 2.5, мы получ
опять тройку (V, W, M_0) с

$$H_3(W, M_0;\ \mathbf{Z}[\pi]) \approx H_4(V, W;\ \mathbf{Z}[\pi]) \approx \mathbf{Z}[\pi]^r$$

все остальные группы $H_i(W, M_0;\ \mathbf{Z}[\pi])$ и $H_i(V, W;\ \mathbf{Z}[\pi])$ будут, как и в односвязном случае, тривиальны). Теперь, однако, мы уже не можем утверждать, что — за счет выбора гомеоморфизма или диффеоморфизма f — связывающий гомоморфизм

$$\partial : H_4(V, W;\ \mathbf{Z}[\pi]) \to H_3(W, M_0;\ \mathbf{Z}[\pi])$$

может быть сделан изоморфизмом. Оказывается, что это препятствие не является только техническим, а вызвано существом дела: в п. 2.30 будет доказано существование гладкого многообразия M с $\pi_1(M) \approx \mathbf{Z}^3$ и с неединственным разложением вида (10).

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 2.3, мы произведем некоторое обобщение всего вышеизложенного (ради определенной "логической завершенности", отчасти ради более кратких обозначений, а также имея в виду построение контрпримера, о котором только что говорилось).

2.10. Множества $\mathcal{M}(X, f)$ и $\mathcal{MT}(X, f)$. Мы обозначаем через $\mathfrak{X}_0$ подкатегорию категории $\mathfrak{X}$ (см. п. 1.10), образованную связными конечными CW-комплексами и их отображениями в пространство $K(\mathbf{Z}_2, 2)$. Мы будем использовать запись вида $(X, f) \in \mathfrak{X}_0$ как сокращение для "X — связный конечный CW-комплекс и f — непрерывное отображение пространства X в пространство $K(\mathbf{Z}_2, 2)$".

Пусть $(X, f) \in \mathfrak{X}_0$. Замкнутое 6-мерное сингулярное $\mathrm{Spin}(f)$-многообразие (M, g, α) в X (см. п. 1.8) будет называться (X, f)-*многообразием*, если отображение g является 3-эквивалентностью, т.е. если выполнено условие

$$\pi_i(g) = 0 \text{ при } i \leq 3\ ,$$

или, иначе говоря, если многообразие M связно и индуцированный гомоморфизм

$$g_* : \pi_i(M) \to \pi_i(X)$$

является изоморфизмом при $i = 1, 2$ и эпиморфизмом при $i = 3$. В том случае, когда пространство X односвязно, это сводится к тому, что многообразие M также односвязно и гомоморфизм

$$g_* : H_i(M) \to H_i(X)$$

является изоморфизмом при $i = 2$ и эпиморфизмом при $i = 3$; кроме того, указание $\mathrm{Spin}(f)$-структуры α в этом случае становится излишним (см. п. 1.14), и мы пишем (M, g) вместо (M, g, α). В частности,

при $X = K(G,2)$ мы возвращаемся к понятию (G,w)-многообрази
из п. 2.1.

Через $\mathcal{M}(X,f)$ (или, соответственно, $\mathcal{MT}(X,f)$) мы обозначае
множество классов конкордантных гладких (соответственно, топ
логических) (X,f)-многообразий и через $\mathcal{M}_r(X,f)$ (соответственн
$\mathcal{MT}_r(X,f)$) — подмножество, заданное условием $b_3(M) = 2r$. Мы буде
иногда отождествлять в обозначениях (X,f)-многообразие $(M,g,$
(или (M,g) в односвязном случае) с его классом в соответствующе
множестве $\mathcal{M}(X,f)$ или $\mathcal{MT}(X,f)$ и писать $(M,g,\alpha) = (M',g',$
вместо $(M,g,\alpha) \approx (M',g',\alpha')$, $(M,g,\alpha)\in\mathcal{M}(X,f)$ и т. д. Замети
что в односвязном случае, согласно п. 1.14, можно считать множ
ства $\mathcal{M}(X,f)$ и $\mathcal{MT}(X,f)$ зависящими только от гомотопического кла
са $w\in H^2(X;\mathbf{Z}_2)$ отображения f; поэтому мы будем в этом случае п
сать $\mathcal{M}(X,w)$ и $\mathcal{MT}(X,w)$. Заметим еще, что в односвязном случ
равенство $(M,g)=(M',g')$ означает в точности следующее: существу
диффеоморфизм (гомеоморфизм) $h : M \to M'$ степени 1, образующи
вместе с отображениями g, g' гомотопически коммутативную диагра
му

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "g"'] & & M' \arrow[dl, "g'"] \\
& X &
\end{tikzcd} .$$

(1

Ясно, в частности, что при $X = K(G,2)$ мы опять получаем множест
$\mathcal{M}(G,w)$ и т. д. из п. 2.1.

Ввиду очевидной импликации “конкордантность ⇒ бордантност
мы имеем естественные отображения

$$\mathcal{M}(X,f) \xrightarrow{\theta} \Omega_6^{\mathrm{Spin}}(X;\, f)$$

(1

и

$$\mathcal{MT}(X,f) \xrightarrow{\theta} \Omega\mathrm{T}_6^{\mathrm{Spin}}(X;\, f)\ ,$$

(1

обобщающие отображения (6) и (7).

Примем, наконец, что если отображение $f : X \to K(G,2)$ постоя
но, то вместо $\mathcal{M}(X,f)$ мы пишем короче $\mathcal{M}(X)$ и т. д. Таким образо
в этом случае отображение (16) действует из $\mathcal{M}(X)$ в $\Omega_6^{\mathrm{Spin}}(X)$, а от
бражение (17) — из $\mathcal{MT}(X)$ в $\Omega\mathrm{T}_6^{\mathrm{Spin}}(X)$.

2.11. Обобщение теоремы классификации. *Пусть* $(X,f)\in$
Если пространство X *односвязно и* $\pi_3(X) = 0$, *то сужения отоб*
жений (16) *и* (17) *соответственно на* $\mathcal{M}_0(X,w)$ *и* $\mathcal{MT}_0(X,w)$ *явл*
ются биекциями.

Другими словами, здесь утверждается, что, при указанных предположениях относительно пространства X, для произвольных (X, w)-многообразий (M, g) и (M', g') с $b_3(M) = b_3(M') = 0$ тогда и только тогда существует диффеоморфизм (соответственно, гомеоморфизм) $f : M \to M'$ степени 1, образующий вместе с отображениями g, g' гомотопически коммутативную диаграмму (15), когда $\theta(M, g) = \theta(M', g')$.

Это и есть то обобщение теоремы 2.3, о котором говорилось в конце п. 2.9. Теорема 2.3 действительно является его немедленным следствием: ввиду п. 2.6, эту теорему достаточно доказать в частном случае $r = 0$, который мы и получим, взяв здесь $X = K(G, 2)$.

2.12. Доказательство теоремы 2.11: сюрьективность. Мы приведем доказательство для гладкого случая. Оно переносится на топологический случай с помощью тех же соображений, что и в п. 2.6.

Итак, нам требуется доказать, что произвольный элемент x группы $\Omega_6^{\mathrm{Spin}}(X; w)$ может быть представлен спинорным отображением $g : M \to X$, индуцирующим изоморфизм $H_2(M) \to G$, с $M \in \mathcal{M}_0$. Пусть сначала класс бордизмов x представлен произвольным отображением $g : M \to X$. Стандартная хирургия (в ее "легком" варианте, не связанном с препятствиями, возникающими в средних размерностях) позволяет "убить" множества $\pi_i(g)$, $i \leq 3$, посредством перестроек над вложенными в M сферами размерностей 0, 1 и 2, одновременно продолжая Spin(w)-отображение g на соответствующие ручки индексов 1, 2 и 3, приклеиваемые к цилиндру $[0,1] \times M$. Заметим, что единственное пучковое препятствие к перестройкам, которое может возникать в этих размерностях — препятствие к тривиальности нормальных расслоений вложенных 2-сфер, над которыми требуется произвести перестройку индекса 3 — "контролируется" классом w_2 и, следовательно, обращается в нуль в силу спинорности отображения g. Заметим также, что условие продолжимости Spin(w)-структуры на перестроенное многообразие управляет выбором нормальных оснащений тех вложенных окружностей, над которыми производятся перестройки индекса 2. Таким образом, при этих перестройках Spin(w)-структура, заданная над отображением g, играет ту же самую роль, которую в общей теории играет "нормальная ξ-структура" — морфизм "над g" нормального расслоения ν_M в расслоение ξ над X.

В результате перестроек получится другое отображение $g : M \to X$, принадлежащее тому же классу бордизмов x, с односвязным M и индуцирующее изоморфизм $H_2(M) \to H_2(X)$. Теперь остается только убить перестройками индекса 4 образующие бесконечного порядгруппы $H_2(M)$, что, как известно, всегда возможно (в частнос это можно сделать, рассуждая так же, как при доказательстве тео мы 2.5)).

Прежде чем переходить к доказательству утверждения об инъ тивности в теореме 2.11, мы сформулируем и докажем более слаб "стабильный" вариант этой теоремы; затем мы выведем требуем утверждение из этого стабильного варианта, сформулировав и доказ соответствующее обобщение теоремы 2.5.

2.13. Стабильные варианты множеств $\mathcal{M}(X,f)$ и $\mathcal{MT}(X,$ Пусть M — связное ориентированное 6-мерное многообразие; мы буд обозначать через s отображение

$$M' = M \# S^3{\times}S^3 \to M$$

— "связную сумму" тождественного отображения $M \to M$ и (нек торого раз навсегда фиксированного) отображения $S^3{\times}S^3 \to S^6$ ст пени 1. Отображение s (как, собственно говоря, и многообразие M зависит от выбора ориентированного вложения $i : D^6 \to M$, и дл фиксированного i его можно считать каноническим. Ясно, что от бражение s — спинорное; более того, его можно накрыть морфизм $\widetilde{s} : \nu_{M'} \to \nu_M$, получающимся каноническим образом по тривиализ ции расслоения $\nu_M|_{i(D^6)}$. В силу изотопности между собой всех ор ентированных вложений $i : D^6 \to M$ и гомотопности всех триви лизаций $\nu_M|_{i(D^6)}$, отображение s и морфизм $\widetilde{s}$ определены однознач с точностью до конкордантности (в классе нормальных отображен в (M, ν_M)).

Пусть опять $(X,f) \in \mathfrak{X}_0$ (мы ничего пока не предполагаем д полнительно относительно пространства X), и пусть (M, g, α) пре ставляет некоторый элемент множества $\mathcal{M}(X,f)$ (в гладком случа или $\mathcal{MT}(X,f)$ (соответственно, в топологическом). Ввиду сказанно выше,

$$(M \# S^3{\times}S^3, g \circ s, \alpha \circ \widetilde{s})$$

представляет корректно определенный элемент этого же самого множ ства; мы будем обозначать этот новый элемент через $s(M, g, \alpha)$. Оч видно, определенный таким образом оператор s допускает итераци так что $s^r(M, g, \alpha)$ — это (X,f)-многообразие

$$(M \# r(S^3{\times}S^3), g \circ s^r, \alpha \circ \widetilde{s}^r)\ .$$

Мы получаем, следовательно, действие полугруппы $\mathbf{N}$ на множеств $\mathcal{M}(X,f)$ и $\mathcal{MT}(X,f)$; соответствующие фактормножества обозначае соответственно, через $\mathcal{M}^s(X,f)$ и $\mathcal{MT}^s(X,f)$. Очевидно, что стандартный кобордизм между многообразиями M и $M \# S^3\times S^3$ дает $\mathrm{Spin}(f)$-бордизм между (M,g,α) и $s(M,g,\alpha)$, так что определены фактор-отображения

$$\mathcal{M}^s(X,f) \to \Omega_6^{\mathrm{Spin}}(X;\, f) \tag{18}$$

и

$$\mathcal{MT}^s(X,f) \to \Omega\mathrm{T}_6^{\mathrm{Spin}}(X;\, f)\ . \tag{19}$$

2.14. Стабильный вариант теоремы классификации. *Для любого* $(X,f)\in\mathfrak{X}_0$ *отображения* (18) *и* (19) *сюръективны; если же вдобавок* $\pi_3(X)=0$, *то эти отображения — биекции.*

Заметим, что здесь не требуется, чтобы пространство X было односвязным — позднее мы используем это для доказательства существования контрпримера, о котором шла речь в конце п. 2.9.

Доказательство сюрьективности здесь практически совпадает с доказательством в п. 2.12, с той только разницей, что нам теперь не нужно "убивать" перестройками индекса 4 свободную часть группы $H_3(M)$ (что, вообще говоря, и невозможно в неодносвязном случае).

Доказательство инъективности также нетрудно. Пусть (M_i,g_i,α_i), $i=1,2$ — два (X,f)-многообразия, и пусть $G:V\to X$ — соединяющий их $\mathrm{Spin}(f)$-бордизм в X. Таким образом, мы имеем замкнутое ориентированное многообразие V с краем $-M_1\cup M_2$ и спинорное отображение $G:V\to X$ с $G|_{M_i}=g_i$; предполагается также, что на V задана некоторая $\mathrm{Spin}(f\circ G)$-структура A, индуцирующая на M_i заданные $\mathrm{Spin}(f\circ g_i)$-структуры α_i. Мы действуем так же, как в п. 2.12: посредством перестроек индексов 1, 2 и 3, производимых над многообразием V, добиваемся того, чтобы отображение G было 3-эквивалентностью (при этом не забывая продолжать A на результат перестройки). После этого оказывается (ввиду того, что, согласно сделанным предположениям, сужения $G|_{M_i}$ — также 3-эквивалентности), что бордизм V удовлетворяет условию

$$\pi_i(V,M_1)=\pi_i(V,M_2)=0\ ,\ i\le 2\ .$$

Используя это, мы можем, начав с произвольного разложения кобордизма V на ручки и применяя стандартную технику перегруппировки и сокращения ручек (в топологическом случае изложенную в [6, Essay III]), как при доказательстве теоремы об s-кобордизме , избавиться от ручек индексов $0,1,2$ и $5,6,7$, оставив, таким образом, только два средних индекса 3 и 4. Теперь кобордизм V естественным образом

представляется в виде $W_1 \cup W_2$, где каждое W_i есть объединение руч
индекса 3 над M_i. Заметим теперь, что, ввиду инъективности инду
рованных гомоморфизмов

$$(g_i)_* : \pi_2(M_i) \to \pi_2(X) \ ,$$

приклеивающие отображения ручек гомотопически тривиальны, т
что W_1 и W_2 — это не что иное как $([0,1]\times M_1) \natural r_1(S^3\times D^4)$
$([0,1]\times M_2)\natural r_2(S^3\times D^4)$ для некоторых r_1 и r_2. Следовательно, для "п
межуточного" многообразия $M = W_1 \cap W_2$ мы имеем диффеоморфиз
(гомеоморфизмы)

$$M \approx M_i \# r_i(S^3\times S^3)\ , i = 1, 2\ , \qquad (2$$

и, ввиду $\pi_3(X) = 0$, отображение $G|_M$ "пропускается" (с точностью
гомотопии) через соответствующие "проекции" $s^{r_i} : M \to M_i$, так ч
мы имеем

$$s^{r_1}(M_1, g_1, \alpha_1) \approx (M, G|_M, A|_M) \approx s^{r_2}(M_2, g_2, \alpha_2)\ ,$$

что и требовалось.

По существу, доказанное утверждение представляет собой неко
рый специальный случай теоремы 2.1 из [11]. Приведенное выше д
казательство отличается от доказательства в [11] рядом техническ
деталей (хотя общая идея, конечно, такая же) и значительно про
последнего (собственно, из теоремы 2.1 работы [11] следует более си
ное утверждение, чем доказанная выше теорема — а именно, что б
ективность отображений (19) и (18) имеет место и без предполож
ния $\pi_3(X) = 0$; нам, однако, это не понадобится).

Теперь, для того, чтобы завершить доказательство теоремы 2.
мы сформулируем и докажем утверждение, обобщающее 2.5 (и за
но 2.4), в том же духе, в каком сама эта теорема обобщает 2.3.

**2.15. Обобщение теоремы о разложении 2.4 и теоремы еди
ственности 2.5.** *Для любого $(X, f) \in \mathfrak{X}_0$ с односвязным X и для л
бого неотрицательного целого r отображения*

$$s^r : \mathcal{M}_0(X, w) \to \mathcal{M}_r(X, w) \qquad (2$$

и

$$s^r : \mathcal{MT}_0(X, w) \to \mathcal{MT}_r(X, w) \qquad (2$$

инъективны; если же $\pi_3(X) = 0$, то эти отображения — биекци

Утверждение о сюрьективности отображений (21) и (22) означает, по определению, следующее: для любого 3-связного отображения $g : M \to X$ с $M \in \mathcal{M}_r$ (соответственно, $M \in \mathcal{MT}_r$) существует такое 3-связное отображение $g_0 : M_0 \to X$ с $M \in \mathcal{M}_0$ (соответственно, $M \in \mathcal{MT}_0$) и такой диффеоморфизм (гомеоморфизм) $h : M_0 \# r(S^3{\times}S^3) \to M$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
M_0 \# r(S^3{\times}S^3) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "s"'] & M \arrow[d, "g"] \\
M_0 \arrow[r, "g_0"] & X
\end{tikzcd} \tag{23}$$

гомотопически коммутативна. Взяв здесь $X = K(G,2)$ с $G \approx H_2(M)$, мы получим утверждение о существовании разложения (10), составляющее часть теоремы 2.4. Заметим, что в этом случае (т.е. когда X имеет вид $K(G,2)$) отображение g_0, делающее диаграмму (23) гомотопически коммутативной, существует "автоматически".

Доказательство этого утверждения о сюрьективности в общем случае по существу не отличается от доказательства существования разложения (10) (см. доказательство теоремы 2.6), к которому нужно лишь добавить, что, ввиду условия $\pi_3(X) = 0$, сужения отображения g на букеты $\alpha_i(S^3) \cup \beta_i(S^3)$ и, следовательно, на сферы ∂U_i гомотопически тривиальны (мы используем обозначения п. 2.6), что и позволяет построить отображение g_0.

Более существенно для нас утверждение об инъективности, которое будет необходимо для завершения доказательства теоремы 2.11. Это утверждение об инъективности, по определению, означает следующее:

Пусть $g_0 : M_0 \to X$ *и* $g_0' : M_0' \to X$ *— 3-связные отображения с* $M_0, M_0' \in \mathcal{M}_0$ *(или* $M_0, M_0' \in \mathcal{MT}_0$*). Положим* $M = M_0 \# r(S^3{\times}S^3)$ *и* $M' = M_0' \# r(S^3{\times}S^3)$*. Пусть существует такой сохраняющий ориентацию диффеоморфизм (соответственно, гомеоморфизм)* $h : M \to M'$*, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "g_0 \circ s^r"'] & & M' \arrow[dl, "g_0' \circ s^r"] \\
& X &
\end{tikzcd} \tag{24}$$

гомотопически коммутативна. Тогда существует такой сохраняющий ориентацию диффеоморфизм (гомеоморфизм) $h_0 : M_0 \to M_0'$, *что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} M_0 \arrow[rr, "h_0"] \arrow[dr, "g_0"'] & & M_0' \arrow[dl, "g_0'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$ (2

также гомотопически коммутативна.

Взяв опять $X = K(G,2)$, мы получим как утверждение о существ вании разложения (10), так и его усиление — теорему 2.5: в самом дел в этом случае гомотопическая коммутативность диаграмм (24) и (2 означает, что индуцированные гомоморфизмы $h_* : H_2(M) \to H_2(M$ и $(h_0)_* : H_2(M_0) \to H_2(M_0')$ совпадают. Доказательство инъективн сти отображений (21) и (22) практически совпадает с доказательств теоремы 2.5. К этому доказательству нужно только добавить, что м имеем отображения

$$W = ([0,1]\times M_0) \natural\, r(S^3\times D^4) \xrightarrow{s} M \xrightarrow{g} X$$

и

$$W' = ([0,1]\times M_0') \natural\, r(S^3\times D^4) \xrightarrow{s} M' \xrightarrow{g'} X \ ,$$

и ввиду гомотопической коммутативности диаграммы (24) мы мож "склеить" их и получить отображение

$$V = W \cup_h W' \to X \ ,$$

дающее требуемую конкордантность между (M_0, g_0) и (M_0', g_0'). Сле ет, правда, заметить, что в ходе доказательства теоремы 2.5 дифф морфизм (или гомеоморфизм) h заменялся другим, с целью удовлет рить гомологическому условию (14). Эта замена, однако, не нару ет гомотопической коммутативности диаграммы (24): в самом де как видно из доказательства теоремы 2.7, можно считать, что "нов вариант отображения h совпадает со "старым" на $M_0 \setminus i(D^6) \subset$ так что суперпозиция $s^r \circ h$ вообще не меняется.

2.16. Одно замечание к теореме 2.15. В связи с утвержден об инъективности в теореме 2.15 уместно спросить — нельзя ли по бовать от диффеоморфизма (гомеоморфизма) h_0, чтобы выполнял условие

$$h_0 \circ s^r \sim s^r \circ h$$ (

(заметим, что в наиболее существенном для нас случае $X = K(G$ из коммутативности диаграммы (24) и из условия (26) вытекала и коммутативность диаграммы (25)). Нетрудно, однако, показ то условие (26), вообще говоря, не может быть выполнено. Чтобы получить соответствующий пример, возьмем $M_0 = M_0' = S^2{\times}S^4$ $M = M' = S^2{\times}S^4 \# S^3{\times}S^3$. Пусть $j : S^3 \to M_0$ — вложение, реализующее какой-нибудь ненулевой элемент γ группы $\pi_3(M_0) \approx \mathbf{Z}$. Рассмотрим сферы $S_1 = j(S^3) \# S^3{\times}\mathrm{pt}$ и $S_2 = \mathrm{pt}{\times}S^3$, вложенные в многообразие M (сферы $S^3{\times}\mathrm{pt}$ и $\mathrm{pt}{\times}S^3$ рассматриваются как первоначально вложенные в $S^3{\times}S^3$). Заметим теперь, что доказательство теоремы 2.6 позволяет утверждать больше, чем сказано в ее формулировке, а именно, что существует диффеоморфизм (или гомеоморфизм) $h : M_0 \# r(S^3{\times}S^3) \to M$, переводящий стандартный "симплектический" набор сфер в многообразии $r(S^3{\times}S^3)$ в любой заранее заданный набор сфер, вложенных в M, образующих базис группы $H_3(M)/\,\mathrm{Tors}$ и пересекающихся между собой (геометрически) соответствующим образом. Применив это к сферам S_1 и S_2, мы получим диффеоморфизм $h : M \to M$, переводящий сферу $S^3{\times}\mathrm{pt}$ в S_1. Но ясно, что гомотопический класс отображения $s|_{S_1}$ есть не что иное как γ, в то время как отображение $s|_{S^3\times\mathrm{pt}}$ гомотопически тривиально; таким образом, соотношение (26) невозможно ни при каких h_0 (не только при диффеоморфизмах).

2.17. Следствие теоремы 2.15. *Для любого $(X, f) \in \mathfrak{X}_0$ с односвязным X естественные отображения (проекции)*

$$\mathcal{M}_0(X, w) \to \mathcal{M}^s(X, w)$$

$$\mathcal{MT}_0(X, w) \to \mathcal{MT}^s(X, w)$$

инъективны; если же $\pi_3(X) = 0$, то эти отображения — биекции.

2.18. Доказательство теоремы 2.11: инъективность. Утверждение об инъективности в теореме 2.11 — прямое следствие пп. 2.14 и 2.17.

Заметим, что вместо того, чтобы ссылаться на 2.17 (т.е., в конечном счете, на теорему 2.5), можно было бы поступить по-другому: дополнить доказательство п. 2.14, воспользовавшись основной конструкцией из п. 2.8 (с дополнением в п. 2.15), чтобы вместо стабильной инъективности получить сразу "настоящую" инъективность. Для этого достаточно модифицировать кобордизм V (обозначения п. 2.14), "разрезав" его вдоль многообразия M и затем снова склеив по гомеоморфизму (диффеоморфизму) $h : M \to M$, удовлетворяющему условию $h_*(a_i) = b_i'$, где a_i, b_i и a_i', b_i' — симплектические базисы группы $H_3(M)$, соответствующие двум разложениям (20) многообр зия M. То же самое рассуждение, что и в пп. 2.8, 2.15 показывае что $V' = W_1 \cup_h W_2$ — h-кобордизм между M_1 и M_2, и что существу отображение $V' \to X$, продолжающее отображения g_1 и g_2.

2.19. Отображения степени 1, 3-эквивалентности и гомотопические эквивалентности. Пусть $h : M \to M'$ — отображение ст пени 1. Как известно [7, глава I, теорема 2.5], из условия $\deg h =$ следует, что индуцированные гомоморфизмы $h_* : H_i(M) \to H_i(M$ являются эпиморфизмами. Таким образом, для $M, M' \in \mathcal{MT}$ отобр жение h тогда и только тогда 3-связно, когда индуцированный г моморфизм $h_* : H_2(M) \to H_2(M')$ является изоморфизмом. Зам тим, что определенные в п. 2.13 "почти канонические" отображени $s^r : M \# r(S^3{\times}S^3) \to M$ удовлетворяют, очевидно, этим условиям. Ок зывается, что (для многообразий из $\mathcal{MT}$) любое 3-связное отображени степени 1 устроено, "с точностью до гомотопической эквивалентности так же как s^r:

Теорема. *Пусть* $M, M' \in \mathcal{M}$ (*или* $M, M' \in \mathcal{MT}$), *и пусть некот рое отображение* $h : M \to M'$ *степени* 1 *индуцирует изоморфиз* $H_2(M) \to H_2(M')$. *Тогда найдется такое многообразие* $M_0 \in \mathcal{M}$ (*с ответственно,* $M_0 \in \mathcal{MT}$), *такой диффеоморфизм* (*соответственн гомеоморфизм*) $\varphi : M \to M_0 \# r(S^3{\times}S^3)$ (*где* $2r = b_3(M) - b_3(M'$ *и такая гомотопическая эквивалентность* $h_0 : M_0 \to M'$, *чт* $h_0 \circ s^r \circ \varphi \sim h$.

Доказательство этой теоремы представляет собой вполне элемента ное упражнение по односвязной хирургии. Положим

$$K_i = \mathrm{Ker}[h_* : H_i(M) \to H_i(M')] \, .$$

Группы K_i удовлетворяют двойственности Пуанкаре [7, глава I, § в частности, имеются изоморфизмы

$$K_i / \mathrm{Tors} \approx K_{6-i} / \mathrm{Tors}$$

и

$$\mathrm{Tors}\, K_i \approx \mathrm{Tors}\, K_{5-i} \, .$$

Вследствие предположений теоремы, $K_i = 0$ при $i \le 2$, откуда, вви двойственности, $K_i = 0$ при $i \ge 4$ и $\mathrm{Tors}\, K_3 = 0$. Ввиду той же дво ственности, сужение формы пересечений многообразия M на K_3 н вырождено, откуда следует, что группа K_3 обладает симплектическ базисом — допустим, $a_1, b_1, \ldots, a_r, b_r$. Заметим теперь, что естественный гомоморфизм $\pi_4(h) \to K_3$ является изоморфизмом (теорема Гуревича), откуда следует, что классы a_i, b_i можно реализовать сфероидами $\alpha_i, \beta_i : S^3 \to M$, принадлежащими ядру индуцированного гомоморфизма $h_* : \pi_3(M) \to \pi_3(M')$. Далее мы действуем как при доказательстве теоремы 2.6: делаем α_i, β_i вложениями с минимальным числом трансверсальных попарных пересечений, вырезаем окрестности "букетов" $\alpha_i(S^3) \cup \beta_i(S^3)$ и заклеиваем образовавшиеся 5-мерные сферы шарами (при этом проблемы, связанные с отсутствием гладкости, можно обойти, например, таким же образом, как в п. 2.6 — проведением всех построений в некоторой сглаживаемой окрестности 3-мерного остова). Гомотопическая тривиальность сфероидов $h \circ \alpha_i, h \circ \beta_i$ гарантирует возможность продолжения отображения h на полученное таким образом многообразие M_0, и это продолженное отображение h_0 удовлетворяет — согласно построению — условию $\mathrm{Ker}[(h_0)_* : H_i(M_0) \to H_i(M')] = 0$ для всех i, т.е. является гомотопической эквивалентностью. Существование диффеоморфизма (гомеоморфизма) $\varphi : M \to M_0 \# r(S^3 \times S^3)$ и гомотопии, соединяющей отображение $h_0 \circ s^r \circ \varphi$ с отображением h, также следует из построения.

2.20. Следствие. *Если отображение $h : M \to M'$ удовлетворяет предположениям теоремы 2.19, то оно спинорное.*

Действительно, согласно 2.19, отображение h представляется в виде суперпозиции отображений s (являющихся спинорными по очевидным причинам) и гомотопической эквивалентности h_0 (являющейся спинорной в силу гомотопической инвариантности классов Штифеля-Уитни).

Можно заметить, что теорема 2.19 здесь в действительности не нужна. В самом деле, следствие 1 — это частный случай следующего утверждения, доказываемого простой проверкой.

Пусть M, M' — замкнутые n-мерные многообразия (не обязательно ориентируемые), и пусть $h : M \to M'$ — отображение с $\deg_2 h \neq 0$ (где $\deg_2 h$ — степень по модулю 2). Тогда имеет место соотношения $h_! v_i(M) = v_i(M')$, где v_i обозначает i-й класс Ву, а $h_! : H^i(M) \to H^i(M')$ — когомологический "трансфер" гомоморфизм, сопряженный с гомологическим индуцированным гомоморфизмом $h_* : H_{n-i}(M) \to H_{n-i}(M')$ относительно изоморфизма Пуанкаре).

2.21. Следствие. *Если в предположениях теоремы 2.19 выпол но дополнительно условие $b_3(M) = b_3(M')$, то отображение h яв ется гомотопической эквивалентностью.*

В самом деле, в этом случае мы должны иметь $r = 0$. Впроч и здесь теорема 2.19 не нужна: ясно, что из $b_3(M) = b_3(M')$ выте ет $K_3 = 0$ (где K_i обозначает, как и в п. 2.19, ядро индуцированн гомоморфизма $H_i(M) \to H_i(M')$), откуда все следует.

Мы будем в дальнейшем называть отображения, удовлетворяющ предположениям теоремы 2.19, стабильными гомотопическими экви лентностями. Это словоупотребление оправдывается, наряду с тео мой 2.19, следующей далее теоремой 2.23.

2.22. Лемма. *Для любых $M, M' \in \mathcal{MT}$ и для любого отображен $h_0 : M \to M'$ степени 1 найдется такое отображение $\widetilde{h}_0$, что д грамма*

$$\begin{tikzcd}
M \# S^3\times S^3 \arrow[r, "\widetilde{h}_0"] \arrow[d, "s"'] & M' \# S^3\times S^3 \arrow[d, "s"] \\
M \arrow[r, "h_0"] & M'
\end{tikzcd}$$

гомотопически коммутативна.

Утверждение леммы становится очевидным, если заметить, чт ввиду связности многообразия M и односвязности M' (и ввиду услови на $\deg h_0$), мы можем продеформировать отображение h_0 так, чтоб некоторая точка из M' имела ровно один трансверсальный прообраз.

Заметим, что отображение $\widetilde{h}_0$ автоматически имеет степень 1, и ч если отображение h_0 является гомотопической эквивалентностью, и $\widetilde{h}_0$ — также гомотопическая эквивалентность.

2.23. Теорема. *Пусть $M, M' \in \mathcal{MT}$, и пусть $h : M \to M'$ — ст бильная гомотопическая эквивалентность. Тогда многообразие гомотопически эквивалентно многообразию $M' \# r(S^3\times S^3)$, приче гомотопическая эквивалентность $\widetilde{h} : M \to M' \# r(S^3\times S^3)$ може быть выбрана таким образом, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
 & M' \# r(S^3\times S^3) \arrow[d, "s^r"] \\
M \arrow[ru, "\widetilde{h}"] \arrow[r, "h"] & M'
\end{tikzcd}$$

окажется гомотопически коммутативной.

Согласно теореме 2.19, мы можем представить отображение h в виде $h_0\circ s^r\circ\varphi$, где $h_0 : M_0 \to M'$ — гомотопическая эквивалентность и $\varphi : M \to M_0 \# r(S^3\times S^3)$ — гомеоморфизм. Применяя к отображению h_0 лемму 2.22 (r раз), мы получаем гомотопическую эквивалентность

$$\widetilde{h}_0 : M_0 \# r(S^3\times S^3) \to M' \# r(S^3\times S^3)\ ,$$

удовлетворяющую условию $s^r\circ\widetilde{h}_0 \sim h_0\circ s^r$. Отображение $\widetilde{h} = \widetilde{h}_0\circ\varphi$ — искомая гомотопическая эквивалентность.

2.24. Множества $\mathcal{N}(M)$. Пусть $M\in\mathcal{MT}$. Мы будем обозначать через $\mathcal{N}(M)$ подмножество (смежный класс) группы $\Omega\mathrm{T}_6^{\mathrm{Spin}}(M;\, w_2(M))$, образованное классами бордизмов спинорных отображений $N \to M$ степени 1. Следующее утверждение легко выводится из теоремы 2.19.

Теорема. *Каждый класс бордизмов из $\mathcal{N}(M)$ содержит гомотопическую эквивалентность.*

Для доказательства предположим, что $(N,h)\in\mathcal{N}(M)$. Сначала, действуя как в п. 2.12, мы можем сделать отображение h, не меняя его класса бордизмов, 3-связным. Теперь используем теорему 2.19 и заметим, что отображение $s^r : M_0 \# r(S^3\times S^3) \to M_0$ принадлежит тому же классу бордизмов (в $\Omega\mathrm{T}_6^{\mathrm{Spin}}(M_0;\, w_2(M_0))$), что и тождественное отображение $M_0 \to M_0$.

2.25. Инвариант Θ. Для любого $(M,\varphi)\in\mathcal{MT}(G,w)$ (или, более общим образом, для любого $M\in\mathcal{MT}$ и спинорного гомоморфизма $\varphi : H_2(M)\to G$) положим

$$\Theta(M,\varphi) = g_*\mathcal{N}(M) \subset \Omega\mathrm{T}_6^{\mathrm{Spin}}(G,2;\, w)\ ,$$

где $g : M \to K(G,2)$ — отображение, принадлежащее гомотопическому классу φ. Взяв, в частности, $G = H_2(M)$ и $\varphi = \mathrm{id}$, мы получаем зависящий только от M инвариант

$$\Theta(M) = \Theta(M,\mathrm{id}) \subset \Omega\mathrm{T}_6^{\mathrm{Spin}}(H_2(M),2;\, w_2(M))\ ;$$

для произвольного гомоморфизма $\varphi : H_2(M) \to G$ мы можем теперь написать

$$\Theta(M,\varphi) = \varphi_*\Theta(M)\ ,$$

где $\varphi_* : \Omega\mathrm{T}_6^{\mathrm{Spin}}(H_2(M),2;\, w_2(M)) \to \Omega\mathrm{T}_6^{\mathrm{Spin}}(G,2;\, w)$ — соответствующий индуцированный изоморфизм.

Мы можем обобщить определение $\Theta(M,\varphi)$ таким же образом, ка в п. 2.10 было обобщено определение $\theta(M,\varphi)$. Пусть $(X,f)\in\mathfrak{X}_0$ (обозн чения п. 2.10). Мы будем в дальнейшем предполагать, что простра ство X односвязно. Для произвольного $(M,g)\in\mathcal{MT}(X,w)$ положим

$$\Theta(M,g)=g_*\mathcal{N}(M)\subset\Omega\mathrm{T}_6^{\mathrm{Spin}}(X;\,w)\ .$$

Заметим, что имеется очевидное включение

$$\theta(M,g)\in\Theta(M,g)\ . \qquad (2$$

2.26. Стабильность инварианта Θ. Тот факт, что для любо (X,w)-многообразия (M,g) и для любой гомотопической эквивален ности $h: M_1\to M$ степени 1 имеет место равенство

$$\Theta(M,g)=\Theta(M_1,g\circ h)$$

— это вполне очевидное следствие определений. Мы докажем бол общее утверждение.

Теорема. *Пусть $(X,f)\in\mathfrak{X}_0$, и пусть пространство X обносвя но. Тогда для любого (X,w)-многообразия (M,g) и для любой ст бильной гомотопической эквивалентности $h: M_1\to M$ (степени +* *имеет место равенство*

$$\Theta(M_1,g\circ h)=\Theta(M,g)\ .$$

Включение $\Theta(M_1,g\circ h)\subset\Theta(M,g)$, как легко видеть, следует и условия $\deg h=1$. Что касается обратного включения, то в силу т оремы 2.19 (или, если угодно, теоремы 2.23), достаточно рассмотре тот случай, когда многообразие M_1 совпадает с $M\,\#\,S^3\times S^3$, а отобр жение h — с s; в этом случае все следует из леммы 2.22.

Взяв частный случай $X=K(\pi_2(M),2)$ и $g=f_{M,2}$, мы получае "соотношение стабильности" для инварианта Θ, аналогичное соотн шению (9):

$$\Theta(M\,\#\,S^3\times S^3)=\Theta(M)\ . \qquad (2$$

2.27. Гомотопическая классификационная теорема. *Для лю бых $M,M'\in\mathcal{MT}$ изоморфизм $\varphi: H_2(M)\to H_2(M')$ в том и тол ко том случае индуцируется сохраняющей ориентацию гомотопич ской эквивалентностью $M\to M'$, если $b_3(M)=b_3(M')$, φ являетс спинорным и $\varphi_*\Theta(M)=\Theta(M')$.*

Эта теорема может рассматриваться как предварительная форма гомотопической классификации (подобно тому как теорема 2.3 выше — предварительная форма гладкой и топологической классификаций). В специальном случае $M\in\mathcal{M}$ и $w_2(M)=0$ это [3, теорема 4] (вместо обозначения Θ в работе [3] использовалось Γ). Мы приведем ниже доказательство некоторого обобщения этой теоремы (обобщения того же рода, в каком теорема 2.11 обобщает теорему 2.3).

2.28. Обобщение гомотопической классификационной теоремы. *Пусть* $(X,f)\in\mathfrak{X}_0$, *пространство* X *односвязно и* $\pi_3(X)=0$*; пусть* (X,w)*-многообразия* (M,g) *и* (M',g') *удовлетворяют условию* $b_3(M)=b_3(M')$*. Гомотопическая эквивалентность* $h:M\to M'$ *степени* 1*, образующая вместе с отображениями* g *и* g' *гомотопически коммутативную диаграмму вида* (15)*, существует в том и только том случае, если выполнено условие*

$$\Theta(M,g)=\Theta(M',g')\ . \tag{29}$$

Необходимость условия (29) является здесь очевидной (и формально следует из теоремы 2.26). Что же касается достаточности, то, как мы увидим, это простое следствие теорем 2.24 и 2.11. Итак, пусть условие (29) выполнено. Тогда, в частности, имеем включение

$$\theta(M,g)\in\Theta(M',g') \tag{30}$$

(вследствие соотношений (29) и (27)). Согласно определению 2.25, включение (30) означает, что найдется такое отображение $h':N\to M'$ степени 1, что отображение $g:M\to X$ окажется $\mathrm{Spin}(w)$-бордантным отображению $g'\circ h':N\to X$. Вследствие теоремы 2.24 мы можем считать, что отображение h' здесь является гомотопической эквивалентностью; в таком случае $(N,g'\circ h')$, как и (M',g'), является (X,w)-многообразием, так что вышеприведенное условие бордантности можно записать в виде

$$\theta(M,g)=\theta(N,g'\circ h')\ .$$

Согласно теореме 2.11, существует гомеоморфизм

$$\varphi:M\to N$$

$(g'\circ h')\circ\varphi\sim g$, и отображение $h'\circ\varphi$ дает требуемую гомотопическую эквивалентность.

2.29. Дополнение: о классификации 5-мерных многообразий. Совершенно аналогично пп. 2.1 и 2.10 мы можем определить множества $\mathcal{M}^5(G,w)$ — 5-мерные аналоги множеств $\mathcal{M}(G,w)$ — и обобщающие их множества $\mathcal{M}^5(X,f)$. Можно также определить отображения

$$\mathcal{M}^5(G,w) \to \Omega_5^{\mathrm{Spin}}(G,2;\,w) \qquad \text{(31}$$

и их обобщения

$$\mathcal{M}^5(X,f) \to \Omega_5^{\mathrm{Spin}}(X;\,f)\;. \qquad \text{(32}$$

Теперь ключевая лемма 4.4 статьи [6] может быть сформулирована с точностью до некоторых несущественных деталей, как следующий аналог теоремы 2.3:

Теорема. *Отображение* (31) *инъективно для всех* G *и* w.

Рассуждение Бардена (стр. 382 цитированной статьи) в действительности доказывает следующее обобщение (аналог теоремы 2.11):

Обобщение. *Пусть* $(X,f)\in\mathfrak{X}_0$. *Если пространство* X *односвязно и* $\pi_3(X)=0$, *то отображение* (32) *инъективно.*

В работе Бардена эти формулировки содержатся лишь “в неявном виде”. Приведенный здесь подход позволяет свести доказательство классификационной теоремы для замкнутых односвязных 5-мерных многообразий [6, теорема 2.2] к некоторым стандартным вычислениям для групп $\Omega_*^{\mathrm{Spin}}(G,2;\,w)$ (более простым, чем в 6-мерном случае) в работе Бардена эти вычисления заменяются “ручным” (и требующим некоторой изобретательности) построением требуемого Spin(w) бордизма.

Заметим еще, что отображение (31) (или (32)) “почти никогда (в отличие от размерности 6) не является сюрьекцией. В самом деле, множества $\mathcal{M}^5(G,w)$ во многих случаях (например, если Tors не имеет вид $T\oplus T$ или $T\oplus T\oplus \mathbf{Z}_2$) оказываются просто пустым (чего, конечно, не может случиться с группами $\Omega_5^{\mathrm{Spin}}(G,2;\,w)$). Но в тех случаях, когда множество $\mathcal{M}^5(G,w)$ непусто, отображение може не быть сюрьекцией. Нетрудно видеть, например, что при Tors $G\neq$ нулевой элемент группы $\Omega_5^{\mathrm{Spin}}(G,2;\,w)$ не может принадлежать образ отображения (31) — в противном случае форма зацеплений на соответствующем многообразии M с $H_2(M)=G$ оказалась бы вырожденно (т.е. просто нулевой), что, конечно, невозможно.

2.30. Дополнение: о неединственности разложения (10) **в неодносвязном случае.** Мы покажем здесь, используя теорему 2.1

конструкцию из [6], что для неодносвязных многообразий утверждение о единственности разложения (10) перестает быть верным — во всяком случае, в гладкой категории.

Пусть M — связное замкнутое 6-мерное спинорное гладкое многообразие и g — непрерывное отображение многообразия M в 3-мерный тор T^3.

Теорема о T^3-бордизмах. *Класс бордизмов* $(M, g, \alpha) \in \Omega_6^{\mathrm{Spin}}(T^3)$ *не зависит от выбора* Spin*-структуры* α *и гомотопически инвариантен. Последнее означает, что для произвольной гомотопической эквивалентности* $h : M_1 \to M$ *классы бордизмов отображений* g *и* $g \circ h$ *совпадают.*

Для доказательства этой теоремы рассмотрим спектральную последовательность Атьи-Хирцебруха

$$E^2_{**} = H_*(T^3;\ \Omega_*^{\mathrm{Spin}}) \Rightarrow \Omega_*^{\mathrm{Spin}}(T^3)\ .$$

Как нетрудно видеть, для этой последовательности

$$\bigoplus_{p+q=6} E^2_{p,q} = E^2_{2,4} = E^\infty_{2,4} = H_2(T^3;\ \Omega_4^{\mathrm{Spin}})\ ,$$

так что мы имеем изоморфизм

$$\Omega_6^{\mathrm{Spin}}(T^3) \approx H_2(T^3;\ \Omega_4^{\mathrm{Spin}}) = H_2(T^3) = \mathbf{Z}^3\ . \qquad (33)$$

Как известно, изоморфизм $\Omega_4^{\mathrm{Spin}} \to \mathbf{Z}$ может быть задан посредством формулы $M \mapsto \langle p_1(M), [M] \rangle /48$. Отсюда следует, что изоморфизм (33) может быть задан формулой

$$(M, g) \mapsto \frac{(\langle p_1(M)x_1x_2, [M]\rangle, \langle p_1(M)x_2x_3, [M]\rangle, \langle p_1(M)x_3x_1, [M]\rangle)}{48}\ , \qquad (34)$$

где $x_i = g^*(y_i)$ и y_i — образующие группы $H^1(T^3;\ \mathbf{Z})$. Из (34) сразу следует независимость класса бордизмов отображения g от выбора Spin-структуры α; что же касается гомотопической инвариантности, то она следует из этой формулы и из результатов работы [13].

Следствие. *Пусть* M_1 *и* M_2 *— связные замкнутые 6-мерные гладкие многообразия с* $\pi_1(M_i) = \mathbf{Z}^3$, $\pi_2(M_i) = 0$ *и* $w_2(M_i) = 0$. *Тогда если* M_1 *и* M_2 *гомотопически эквивалентны, то они стабильно диффеоморфны.*

Для доказательства этого следствия заметим, что, вследствие условий на гомотопические группы многообразий M_1 и M_2, существуют отображения $g_i : M_i \to T^3$, являющиеся 3-эквивалентностями; при этом мы можем считать, что имеется гомотопически коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "g_1"'] & & M_2 \arrow[dl, "g_2"] \\ & T^3 & \end{tikzcd} ,$$

где h — гомотопическая эквивалентность. Выбрав какие-либо (все равно какие) Spin-структуры α_i на M_1 и M_2, мы получим элементы (M_i, g_i, α_i) множества $\in \mathcal{M}(T^3)$. В соответствии с доказанной выше теоремой, мы имеем равенство

$$\theta(M_1, g_1, \alpha_1) = \theta(M_2, g_2, \alpha_2) \ ,$$

из которого, ввиду теоремы 2.14, следует требуемое утверждение.

Опишем, наконец, контрпример, обещанный в начале этого пункта. В [6, Essay IV, Appendix B] построено гладкое многообразие M^*, гомотопически эквивалентное, но не диффеоморфное многообразию $S^3 \times T^3$. Очевидно, что многообразия $S^3 \times T^3$ и M^* удовлетворяют предположениям следствия и, значит, стабильно диффеоморфны.

В заключение несколько замечаний относительно сказанного выше.

(а) "Теорема о T^3-бордизмах", как и ее следствие, может быть (таким же точно рассуждением) получена в варианте для топологических многообразий. Этот вариант, впрочем, не особенно полезен, ввиду отсутствия "топологического" аналога многообразия M^*.

(б) Нетрудно было бы доказать как "теорему о T^3-бордизмах", так и ее следствие без предположения $w_2 = 0$. Однако для этого потребовались бы некоторые дополнительные соображения, связанные с построением спектральной последовательности Атьи-Хирцебруха (кроме того, опять-таки, этот более общий вариант не дает нам никаких новых примеров).

(в) При построении контрпримера мы воспользовались гомотопической эквивалентностью многообразий $S^3 \times T^3$ и M^* и (при посредстве "теоремы о T^3-бордизмах") теоремой Рохлина о гомотопической инвариантности чисел Понтрягина соответствующего вида (произведений классов Хирцебруха на одномерные классы когомологий). Мы могли бы действовать по-другому: воспользоваться тем, что в действительности, согласно [6], многообразия $S^3 \times T^3$ и M^* гомеоморфны, и сослаться на теорему Новикова о топологической инвариантности рациональных классов Понтрягина.

Литература

1. **Жубр А.В.** Теорема о разложении для односвязных шестимерных многообразий// *Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1973. Т.36. С.40–49.*

2. **Жубр А.В.** Классификация односвязных шестимерных спинорных многообразий// *Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1974. Т.45. 71–74.*

3. **Жубр А.В.** Классификация односвязных шестимерных спинорных многообразий// *Изв. АН СССР (сер.мат.) 1975. Т.39. С.839–859.*

4. **Жубр А.В.** Классификация односвязных 6-мерных многообразий// *Докл. АН СССР. 1980. Т.255. С.1312–1315.*

5. **Zhubr A.V.** Classification of simply-connected topological 6-manifolds// *Lecture Notes in Math. 1988. V.1346. P.325–339.*

6. **Barden D.** Simply connected 5-manifolds// *Ann. Math. 1965. V.82. P.365–385.*

7. **Браудер В.** Перестройки односвязных многообразий. М.: Наука, 1984. 208с.

8. **Jupp P.E.** Classification of certain 6-manifolds// *Proc. Cambr. Phil. Soc. 1973. V.73. P.293–300.*

9. **Kervaire M.A., Milnor J.** Groups of homotopy spheres// *Ann. Math. 1963. V.77. P.504–537.*

10. **Kirby R.C., Siebenmann L.C.** Foundational essays on topological manifolds, smoothings and triangulations. Princeton university, Princeton, New Jersey, 1977. 352pp.

11. **Kreck M.** Duality and surgery: an extension of results of Browder, Novikov and Wall about surgery on compact manifolds. Preprint Univ. Mainz, 1985. 92pp.

12. **Нецветаев Н.Ю.** Диффеоморфность и стабильная диффеоморфность односвязных многообразий// *Алгебра и анализ. 1990. Т.2. С.112–120.*

13. **Рохлин В.А.** Класс Понтрягина-Хирцебруха коразмерности 2// *Изв. АН СССР (сер.мат.) 1966. Т.30. С.705–718.*

14. **Стонг Р.** Заметки по теории кобордизмов. М.: Мир, 1973. 372с.

15. **Quinn F.** Ends of maps III// *J. Diff. Geom. 1982. V.17. P.503–521.*

16. **Siebenmann L.C.** Topological manifolds. Actes Congrès Intern. Math., 1970. T.2. P.133–163.

17. **Wall C.T.C.** On certain 6-manifolds// *Inv. Math. 1966. V.1. P.355–374.*

Summary

Zhubr A.V. The bordism groups of spin-maps and their application to the problem of classification of 6-manifolds

This paper contains the reduction of the classification problems for simply-connected closed 6-manifolds (smooth, topological and homotopy classifications) to a certain homotopy problem, namely, to the problem of computation of the bordism groups of spin maps of oriented (non-spin) 6-manifolds to Eilenberg-MacLane spaces of the type $(G,2)$ (a map $f : M \to K(G,2)$ is called spin, with respect to a given cohomology class $w \in H^2(G,2;\mathbb{Z}_2)$, if it satisfies the condition $f^*(w) = w_2(M)$). The above-mentioned reduction has been given in the spin case (that is, when $w = 0$) in the paper [3]. Its generalization, given here, provides a basis for proving results announced in [4, 5] (these proofs will be gived elsewhere). The reduction is formulated here in a more general form than it is needed for the classification theorems of [4, 5]. This more general approach enables one, in particular, to return to the question about uniqueness of the decomposition of a 6-manifold into a connected sum of the kind $M_0 \# S^3 \times S^3$ (such M are called stable in [12]), which has been first considered in [1] for closed simply-connected 6-manifolds (and later in [12] for closed simply-connected manifolds of other dimensions), and to show that in the non-simply-connected case this stability does not take place.

Сыктывкарский университет *Поступила 15.09.1998*