Вестник Сыктывкарского университета
Сер.1.Вып.3.1999

УДК 526.31

Редукция порядка кривых Безье

В. Е. Езовских

При построении кривых Безье часто используется повышение порядка. Получены соотношения, при выполнении которых возможно понижение порядка, что может быть использовано для уменьшения числа опорных точек.

Известно представление кривых Безье в виде разложения по полиномам Берштейна [1, p.7]

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 B_0^n(t) + \mathbf{p}_1 B_1^n(t) + \cdots + \mathbf{p}_n B_n^n(t), 0 \le t \le 1.$$

Точки плоскости $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i)$ называются точками Безье, являются вершинами так называемого полигона Безье и в общем случае не лежат на кривой $\mathbf{p}(t)$. Полиномы Бернштейна определяются соотношениями (C_n^i–число сочетаний из n элементов по i)

$$B_i^n(t) = C_n^i (1-t)^{n-i} t^i,\ i = \overline{0 \ldots n},\ 0 \le t \le 1$$

и обладают свойствами

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n = 1, \quad B_i^n \ge 0 \ \text{ при } \ 0 \le t \le 1,$$

$$B_i^n(t) = (1-t) B_i^{n-1} + t B_{i-1}^{n-1}.$$

Довольно часто при использовании кривых Безье применяется повышение степени, при котором изменяют полигон Безье, увеличивая число его вершин. Результирующие полигоны сходятся к исходной кривой

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{p}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \mathbf{p}_i^* B_i^{n+1}(t),$$

причем новые точки Безье находятся из соотношений Кастелло [1, p.8]

$$\mathbf{p}_i^* = \alpha_i \mathbf{p}_{i-1} + (1-\alpha_i)\mathbf{p}_i, \quad \alpha_i = \frac{i}{n+1}. \tag{1}$$

Поставим задачу. Имеется полигон Безье $(\mathbf{p}_0^*, \mathbf{p}_1^* \dots \mathbf{p}_{n+1}^*)$, определяющий кривую $\mathbf{p}^*(t)$. Возможно ли осуществить переход к полигону меньшего порядка $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n)$, определяющему ту же самую кривую $\mathbf{p}^*(t)$? Все особенности процесса редукции сводятся к вопросу о разрешимости системы линейных уравнений. При $n = 2$ из соотношений Кастелло (1) имеем

$$2\mathbf{p}_1 = 3\mathbf{p}_1^* - \mathbf{p}_0^*,$$

$$2\mathbf{p}_1 = 3\mathbf{p}_2^* - \mathbf{p}_3^*.$$

Система совместна (полигоны Безье эквивалентны) при

$$\mathbf{p}_0^* - 3\mathbf{p}_1^* + 3\mathbf{p}_2^* - \mathbf{p}_3^* = 0.$$

При $n = 3$ соотношения Кастелло (1) дают

$$3\mathbf{p}_1 = 4\mathbf{p}_1^* - \mathbf{p}_0^*,$$

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 2\mathbf{p}_2^*,$$

$$3\mathbf{p}_2 = 4\mathbf{p}_3^* - \mathbf{p}_4^*.$$

Для эквивалентности полигонов должно быть выполнено соотношение

$$\mathbf{p}_0^* - 4\mathbf{p}_1^* + 6\mathbf{p}_2^* - 4\mathbf{p}_3^* + \mathbf{p}_4^* = 0.$$

Элементарные вычисления приводят к следующему результату.

Утверждение 1. *Редукция полигона Безье $\mathbf{p}_i^*$, $i = \overline{0 \dots n+1}$ к полигону $\mathbf{p}_j$, $j = \overline{0 \dots n}$ выполнима в том и только в том случае, если*

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i C_{n+1}^i \mathbf{p}_i^* = 0. \tag{2}$$

В координатах (x, y) получаем два соотношения

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i C_{n+1}^i x_i^* = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i C_{n+1}^i y_i^* = 0. \tag{3}$$

Отметим, что условие (2) является необходимым и достаточным для эквивалентности полигонов $\mathbf{p}_j$ и $\mathbf{p}_i^*$. В самом деле, на основе (1) $\mathbf{p}_i^*$ однозначно вычисляется по $\mathbf{p}_j$. При редукции будем последовательно вычислять значения $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_0^*$, $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{n+1}^*$, $\mathbf{p}_1 = \frac{(n+1)\mathbf{p}_1^* - \mathbf{p}_0^*}{n}$, $\mathbf{p}_{n-1} = \frac{(n+1)\mathbf{p}_n^* - \mathbf{p}_{n+1}^*}{n}$ и так далее. Величины $\mathbf{p}_i$ вычисляются однозначно и проблема несовместности возникает единственно при "столкновении" процессов, идущих от $j = 0$ и $j = n$. При выполнении условия (2) она разрешима.

Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из (2),(3).

Утверждение 2. *Эквивалентность полигонов Безье инвариантна относительно сдвига.*

Пусть вектор сдвига – (a, b). Тогда условия (3) записываются в виде

$$\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i C_{n+1}^i (x_i^* + a) = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i C_{n+1}^i (y_i^* + b) = 0.$$

Они выполнены, так как $\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i C_{n+1}^i = 0$.

Утверждение 3. *Эквивалентность полигонов Безье инвариантна относительно линейных отображений.*

Пусть переход от координат (x, y) к координатам (u, v) задается соотношениями $u = ax + by$, $v = cx + dy$. Тогда

$$\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i C_{n+1}^i u_i = a\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i C_{n+1}^i x_i^* + b\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i C_{n+1}^i y_i^* = 0.$$

Утверждение 4. *При ограниченной вариации координат опорных точек полигона Безье $u_i = x_i^* + \delta x_i$ и $v_i = y_i^* + \delta y_i$, $-h \le \delta x_i$, $\delta y_i \le h$ отклонение в условиях (3) от* 0 *ограничено величиной $h2^{n+1}$. Оценка точная, то есть достижима при определенном выборе δx_i^* и δy_i^*.*

В самом деле

$$D = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i C_{n+1}^i (x_i^* + \delta x_i^*) = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i C_{n+1}^i x_i^* + \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i C_{n+1}^i \delta x_i.$$

В этом соотношении вторая сумма равна 0, а третья максимальна (минимальна), если все слагаемые в ней положительны (отрицательны). Выбирая $\delta x_i = (-1)^i h$, получим $D = \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i h = h\sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i = h2^{n+1}$.

Понижение степени полигонов Безье может быть практически использовано при обработке кривых на растре и сжатии дискретных сигналов.

Растровую кривую из $n+1$ точки будем рассматривать как полигон Безье $\mathbf{p}_i^*$. Ясно, что в этом случае все величины x_i^* и y_i^* – целые числа. Для произвольной кривой весьма маловероятно выполнение условий (3). Однако, учитывая утверждение 4, можно изменить координаты опорных точек так, что условия (3) будут выполнены. Если при этом величина $h < \frac{1}{2}$, то вид кривой на растре не изменится. Исследования на компьютере показали, что для достаточно гладких кривых подобный подход является эффективным, позволяя существенно сократить объем информации, необходимый для отрисовки образа. Сжатие дискретных сигналов – это, фактически, переход к одномерному случаю.

Автор глубоко признателен Александру Алексеевичу Васильеву за помощь в работе над темой.

Литература

1. **Böhm W., Farin G.,Kahmann J.** A survey of curve and surface methods in CAGD// *Computer Aided Geometric Design. 1984. V.1 P.1-60.*

Summary

Ezovskih V. E. Lowering the degree of Bezier curves

Degree elevation is a common rule for Bezier curves drawing. We deduce some relation which allows one to lower the degree of free–form curves. They may be used for reference points set order reducing.

Сыктывкарский университет

Поступила 14.09.98