Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.3.1999

УДК 539.3

Устойчивость шарнирно-закрепленной пластины с односторонними ограничениями на перемещения

В.Н. Тарасов

Решается задача об устойчивости прямоугольной пластины, нагруженной по кромке силами при односторонних ограничениях на перемещения. Она сводится к определению минимального параметра, при котором некоторая задача нелинейного программирования имеет неединственное решение. Приводятся результаты расчетов.

Рассмотрим шарнирно закрепленную пластину, сжимаемую по краям усилиями, направленными вдоль оси x. Обозначим через $w(x,y), \quad 0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b$ прогиб пластины.

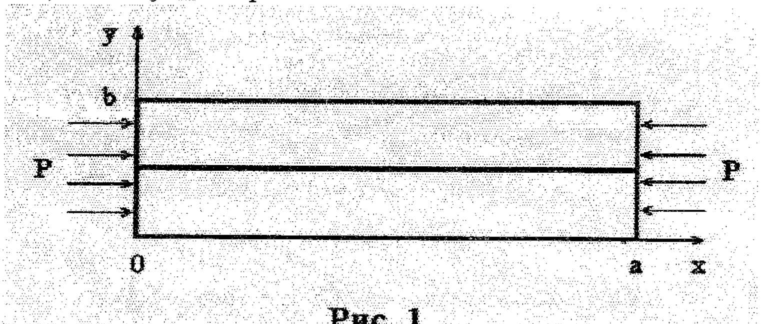

Рис. 1

Потенциальная энергия деформации пластины имеет вид ([1]):

$$U = \frac{D}{2}\int_0^a\int_0^b \Big((\Delta w)^2 - (1-\nu)L(w,w)\Big)\,dxdy, \tag{1}$$

где

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \qquad L(w,w) = 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right).$$

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость пластины при изгибе, E- модуль Юнга, ν- коэффициент Пуассона.

Работа внешних сил может быть вычислена по формуле

$$W = \frac{P}{2} \int\limits_0^a \int\limits_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy. \tag{2}$$

Предположим, что пластина шарнирно оперта по контуру:

$$w(x,0) = w(x,b) = w''_{yy}(x,0) = w''_{yy}(x,b) = 0, \tag{3}$$

$$w(0,y) = w(a,y) = w''_{xx}(0,y) = w''_{xx}(a,y) = 0. \tag{4}$$

Проблема устойчивости пластины сводится к поиску сил P, таких, что вариационная задача

$$U - W \to \min_w \tag{5}$$

имеет нетривиальное решение.

Граничные условия (3)-(4) будут выполнены, если функцию $w(x,y)$, будем искать в виде

$$w(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(x) sin(\frac{k\pi y}{b}). \tag{6}$$

Функции $w_k(x)$ должны удовлетворять граничным условиям:

$$w_k(0) = w_k''(0) = w_k(a) = w_k''(a) = 0.$$

Подставляя (6) в формулы для упругой энергии (1) и работы внешних сил (2) с учетом граничных условий, получим

$$U = \frac{Db}{4} \int\limits_0^a \sum_{k=1}^{\infty} \left(w_k'' - \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 w_k \right)^2 dx$$

$$W = \frac{Pb}{4} \int\limits_0^a \sum_{k=1}^{\infty} w_k'^2 dx.$$

Таким образом, поиск нетривиальных решений задачи (5) можно свести к вариационной задаче изопериметрического типа:

$$\frac{D}{2}\int_0^a \sum_{k=1}^{\infty}\left(w_k'' - (\frac{k\pi}{b})^2 w_k\right)^2 dx \to \min_{w_k} \qquad (7)$$

при ограничениях

$$\frac{1}{2}\int_0^a \sum_{k=1}^{\infty} w_k'^2 dx = 1. \qquad (8)$$

Применяя правило множителей Лагранжа,выпишем уравнение Эйлера:

$$w_k^{(4)} - 2\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 w_k'' + \left(\frac{k\pi}{b}\right)^4 w_k + \frac{\lambda}{D} w_k'' = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (9)$$

Решение уравнения (9) проще всего искать в виде ряда Фурье

$$w_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{kn} * sin(\frac{n\pi x}{a}). \qquad (10)$$

Подставляя (10) в (9), получим

$$v_{kn} D\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2\right]^2 - \lambda v_{kn}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = 0, \quad k, n = 1, 2 \ldots$$

Из условия нетривиальности решения получаем известную формулу (см.[1]) для последовательности собственных чисел уравнения (9)

$$\lambda_{kn} = \frac{D\pi^2}{b^2}\left[\frac{nb}{a} + \frac{k^2 a}{nb}\right]^2. \qquad (11)$$

При расчетах на устойчивость имеет значение лишь минимальное число λ, при котором уравнение (9) имеет нетривиальное решение. Это число λ имеет смысл критической нагрузки $P_{\text{кр}}$, и, очевидно, для его вычисления в (11) следует положить $k = 1$. Что же касается n, то оно зависит от отношения $\frac{b}{a}$, и минимум λ_{1n} достигается при том целом n, при котором выражение $K = \left(\frac{nb}{a} + \frac{a}{nb}\right)$ принимает наименьшее значение. Таким образом при некотором n получаем критическую нагрузку

$$P_{\text{кр}} = \lambda_{1n} = \frac{D\pi^2}{b^2}\left[\frac{nb}{a} + \frac{a}{nb}\right]^2.$$

Выражение для прогиба пластины (собственной функции) в этом случае имеет вид

$$w(x,y) = sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) sin\left(\frac{\pi y}{b}\right),$$

т.е. пластина при критической нагрузке изгибается по n полуволнам вдоль оси x и по одной полуволне вдоль оси y (см.[1] стр.331), т.е. для случая удлиненных пластин прогиб $w(x,y)$ может принимать отрицательные значения.

В связи с этим представляет интерес задача об устойчивости пластины при наличии одностороннего ограничения на прогиб. Предположим, что пластина находится над жестким ребром, расположенным вдоль оси x по середине пластины (рис.1). Тогда ограничения на перемещения пластины записываются следующим образом:

$$w(x,\frac{b}{2}) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq a. \tag{12}$$

В этом случае для определения критической нагрузки необходимо найти такое P, при котором задача вариационного исчисления

$$\frac{D}{2}\int_0^a \sum_{k=1}^{\infty}\left(w_k'' - (\frac{k\pi}{b})^2 w_k\right)^2 dx - \frac{P}{2}\int_0^a \sum_{k=1}^{\infty} {w'_k}^2 dx \to \min_{w_k}$$

при ограничениях в виде неравенств

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k(x) sin\frac{k\pi}{2} \geq 0 \tag{13}$$

имеет нетривиальное решение, или (что то же самое) решить задачу изопериметрического типа (7), (8) при ограничениях (13). Поскольку $sin\frac{k\pi}{2} = 0$ при $k = 2,4,6,...$, то для четных k для функций $w_k(x)$ необходимым условием экстремума будет уравнение Эйлера (9), откуда получаем набор собственных чисел для задачи (7), (8), (13), определяемых формулой (11). Таким образом, четные значения k в задаче (7), (8) и (13) можно исключить. Полагая $k = 2j-1, u_j = w_{2j-1} \quad j = 1,2...$, и учитывая равенства $\int_0^a w_k'' w_k dx = -\int_0^a w_k' w_k' dx$, получим следующую задачу вариационного исчисления:

$$J(w) = \frac{D}{2}\int_0^a \sum_{j=1}^{\infty}\left({u_j''}^2 - 2(\frac{(2j-1)\pi}{b})^2 u_j'' u_j + (\frac{(2j-1)\pi}{b})^4 u_j^2\right) dx \to \min_{u_j} \tag{14}$$

при ограничениях

$$J_1(w) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^a \sum_{j=1}^{\infty} u_j'' u_j dx = 1, \tag{15}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j u_j(x) \le 0. \tag{16}$$

Поскольку присутствуют ограничения в виде неравенств, аналитическое исследование задачи (14)-(16) становится затруднительным. Для конечномерной аппроксимации введем на интервале $[0, a]$ сетку и заменим производные конечными разностями. Введем в рассмотрение векторы $z_j = (z_{j,1}, z_{j,2}, ..., z_{j,m})^* \in R^m$ (*- означает транспонирование), $z_{j,i} = u_j(x_i), \quad i \in 1:m, \quad j \ge 1$. Далее

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad i \in 0:m+1,$$

$$h = \frac{a}{m+3}, \quad x_{-1} = 0, \quad x_{m+2} = a,$$

$$u'_j(x_i) = \frac{z_{j,i+1} - z_{j,i-1}}{2h}, \quad u''(x_i) = \frac{z_{j,i+1} - 2z_{j,i} + z_{j,i-1}}{h^2},$$

$$u'_j(x_{-1}) = \frac{-3z_{j,-1} + 4z_{j,0} - z_{j,1}}{2h}, \quad u'_j(x_{m+2}) = \frac{z_{j,m} - 4z_{j,m+1} + 3z_{j,m+2}}{2h}.$$

$$u''_j(x_{-1}) = \frac{z_{j,-1} - 2z_{j,0} + z_{j,1}}{h^2}, \quad u''_j(x_{m+2}) = \frac{z_{j,m} - 2z_{j,m+1} + z_{j,m+2}}{h^2}.$$

Граничным условиям шарнирного опирания соответствуют равенства

$$z_{j,-1} = 0, \quad z_{j,m+2} = 0, \quad z_{j,0} = \frac{z_{j,1}}{4}, \quad z_{j,m+1} = \frac{z_{j,m}}{4}.$$

Вместо бесконечной суммы ограничимся некоторым конечным числом M слагаемых в формулах (14)-(16), и обозначим $Z = (z_1, z_2, ...z_M) \in R^{m\times M}$. Вычисляя интегралы по квадратурной формуле трапеций, придем к следующей задаче конечномерной оптимизации, аппроксимирующей задачу (14)-(16):

$$f(Z) = \sum_{j=1}^{M}(A_j z_j, z_j) \to \min_Z, \tag{17}$$

$$g(Z) = -\sum_{j=1}^{M}(Qz_j, z_j) = 1, \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{M}(-1)^j z_{j,i} \le 0, \quad i \in [1, m] \tag{19}$$

Матрицы A_j вычисляются по формулам

$$A_j = D\left(\frac{1}{h^3}A - 2\left(\frac{(2j-1)\pi}{b}\right)^2 Q + h\left(\frac{(2j-1)\pi}{b}\right)^4 I\right),$$

где I- единичная матрица, а матрицы A и $\quad -Q$ являются строго положительно определенными и имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 3.25 & -3.5 & 1 & . & . & . & . & 0 \\ -3.5 & 6 & -4 & 1 & . & . & . & . \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ . & . & . & . & 1 & -4 & 6 & -3.5 \\ 0 & . & . & . & . & 1 & -3.5 & 3.25 \end{pmatrix},$$

$$Q = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} -1.5 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & . & . & . & . \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ . & . & . & . & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 & -1.5 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения стационарных точек (точек, удовлетворяющих необходимым условиям экстремума) задачи (17)-(19) применим алгоритм (см. [2]). Пусть Z_0-некоторое начальное приближение, удовлетворяющее всем ограничениям задачи, и пусть уже получена точка $Z_k \in R^{m\times M}$. Найдем точку $\bar{Z}_k$, являющуюся решением задачи:

$$f(Z) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}(A_j z_j, z_j) \to \min_{z_j}, \tag{20}$$

при ограничениях

$$(\frac{\partial g(Z_k)}{\partial Z}, (Z - Z_k)) = 0, \tag{21}$$

$$\sum_{j=1}^{M} (-1)^j z_{j,i} \le 0, \quad i \in [1:m]. \tag{22}$$

Далее полагаем $Z_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{g(\bar{Z}_k)}} \bar{Z}_k$.

Пользуясь результатами работы [2] можно показать, что последовательность точек Z_k, $k = 1, 2, \ldots$ сходится к некоторой стационарной точке Z_* задачи (17)-(19). Задача (20)-(22) является задачей выпуклого квадратичного программирования и может быть решена за конечное число шагов.

Задача (17)-(19) не является задачей выпуклого программирования, поэтому она может иметь несколько локальных минимумов. Для определения критической нагрузки необходимо найти глобальный минимум. Алгоритм, основанный на решении вспомогательных задач квадратичного программирования (20)-(22), является локальным и приводит к абсолютному минимуму лишь при наличии достаточно хорошего начального приближения. Однако в конкретных случаях, используя методы перебора "активных ограничений", удается показать, что полученное решение является точкой глобального минимума задачи (17)-(19).

На рис.2 изображена функция прогиба пластины при $y = \frac{b}{2}$ при следующих значениях параметров: $a = \pi$, $b = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $D = 1$, число гармоник по y $M = 3$. При $x \ge l_0$ $w(x, \frac{b}{2}) = 0$, $l_0 = 1.8$.

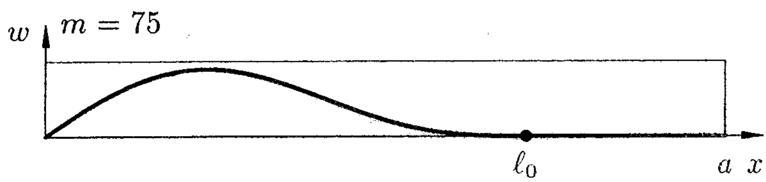

Рис. 2

Результаты расчетов приведены в табл. 1.

Таблица 1

a	π	π	2π	3π	4π	6π	5π	6π
b	$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{4}$	π	π	π	3π	2π	2π
P_{kp}	8.99	71.7	4.489	4.489	4.48	0.488	1.122	1.122

Во всех случаях $D = 1$, $M = 1$, $m = 50$. При $a = \pi$, $b = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ известно точное значение критической силы

$$P_{\text{кр}} = \frac{D\pi^2}{b^2}\left[\frac{nb}{a} + \frac{a}{nb}\right]^2 = 2\left[\frac{n}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{n}\right]^2. \tag{23}$$

При $n = 1$ и $n = 2$ по формуле (23) получаем $P_{\text{кр}} = 9$, что практически совпадает со значением, приведенным в табл.1.

Результаты вычислений показывают, что для случая удлиненных пластин ($a \geq \sqrt{2}b$)критическая сила может быть вычислена по формуле: $P_{\text{кр}} = 4.5\frac{D\pi^2}{b^2}$.

Литература

1. **Вольмир А.С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.

2. **Тарасов В.Н.** Задачи на собственные значения для положительно однородных операторов. //*Вестн. Сыкт. ун-та. Сер.1. 1995. Вып.1.*

3. **Tarasov V.N., Kholmogorov D.V.** Some problem of a stabiliti and supercritical behaviour of elastic systems with one-sided connections // *Transactions of St-Peterburg academy of sciences for strength problems. 1997. V.1. P. 175–188.*

Summary

Tarasov V.N. Stability of hingle-fixed lamina with one-sided constraints on displacement

The problem of stability of rectangular lamina loaded on edge with one-sided constraints on deflection is considered. It is reduced to the determination of the minimal parameter, such that some problem of nonlinear programming has non-unique solution.

Сыктывкарский университет

Поступила 14.09.98