*Вестник Сыктывкарского университета.*
*Сер.1.Вып.3.1999*

**УДК 521.1**

# Регуляризация уравнений движения пятимерной кеплеровой задачи [1]

*С. М. Полещиков*

Дано применение $L$-преобразованиям восьмого порядка к регуляризации уравнений движения пятимерной задачи двух тел. Рассмотрены канонический и неканонический случаи. Установлено соответствие между решениями пятимерной кеплеровой задачи и решениями восьмимерного гармонического осциллятора при специальном выборе начальных условий.

**1. Введение.** $L$-преобразования, определяемые $L$-матрицами второго порядка [1] совместно с временным преобразованием позволяют регуляризовать уравнения движения плоской задачи двух тел и привести их к уравнению двумерного осциллятора. При этом между траекториями плоской задачи Кеплера и движениями двумерного осциллятора устанавливается взаимно однозначное соответствие.

$L$-преобразования, порождаемые $L$-матрицами четвертого порядка, определены в четырехмерном пространстве [2] и, если их ранг равен трем, они применимы к регуляризации трехмерной задачи двух тел. В регулярных переменных уравнение движения совпадает с уравнением четырехмерного осциллятора. Несовпадение размерностей конфигурационных пространств двух задач (задачи Кеплера и четырехмерного осциллятора) приводит к неоднозначности между их решениями. Однако специальный выбор начальных условий выделяет решения гармонического осциллятора, соответствующие решениям задачи двух тел.

В работах [3], [4] определены $L$-преобразования восьмого порядка

$$\mathbf{x} = L(\mathbf{u})\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbf{R}^8, \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при поддержке научного фонда Сыктывкарского лесного института

где

$$L(\mathbf{u}) = \{l_{ij}(\mathbf{u})\}_{i,j=1,\dots,8} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^\top A_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}^\top A_8 \end{pmatrix}.$$

Матрица $L(\mathbf{u})$ определяется соотношениями

$$L^\top(\mathbf{u})L(\mathbf{u}) = L(\mathbf{u})L^\top(\mathbf{u}) = |\mathbf{u}|^2 E, \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathbf{R}^8, \tag{2}$$

$$L(\mathbf{u})\mathbf{v} = J\, L(\mathbf{v})\mathbf{u}, \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^8, \tag{3}$$

Как показано в [3], [5], матрица $J$ может быть только двух видов

$$J = J_{1,7} \equiv \mathrm{diag}\{1,\, -1,\, -1,\, -1,\, -1,\, -1,\, -1,\, -1\},$$

$$J = J_{5,3} \equiv \mathrm{diag}\{1,\, 1,\, 1,\, 1,\, 1,\, -1,\, -1,\, -1\}.$$

При $J = J_{1,7}$ образ соответствующего $L$-преобразования совпадает с $\mathbf{R}^1$. Для нашей цели этот случай не представляет интереса. Поэтому в дальнейшем будет рассматриваться только случай $J = J_{5,3}$.

Можно показать [4], что все матрицы $A_1, \dots, A_8$ ортогональные, элементы набора $\{A_1, \dots, A_5\}$ – симметрические матрицы и антикоммутируют между собой, элементы набора $\{A_6, A_7, A_8\}$ – кососимметрические матрицы и так же антикоммутируют между собой. Кроме того, элементы первого множества коммутируют с элементами второго множества.

Сходные свойства $L$-преобразований четвертого и восьмого порядков позволяют надеяться на возможное применение последних к задаче регуляризации уравнений движения.

**2. Неканонический случай.** Из определяющего соотношения (3) с $J = J_{5,3}$ следует тождество

$$\left(L(\mathbf{u})\mathbf{u}\right)_i = 0, \quad i = 6, 7, 8, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^8.$$

Следовательно, это преобразование можно применить к регуляризации уравнения движения в пятимерном пространстве. В силу аналогий в свойствах $L$-матриц восьмого и четвертого порядков форма уравнения движения должна иметь такой же вид, как и уравнение трехмерной задачи двух тел. Поэтому рассмотрим динамическую систему, определяемую уравнением

$$\ddot{\mathbf{x}} + \frac{\mu}{r^3}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad r = |\mathbf{x}|, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^5. \tag{4}$$

Уравнение (4) является обобщением уравнения относительного движения задачи двух тел на пятимерный случай. Естественно называть это уравнение *уравнением относительного движения пятимерной кеплеровой задачи.*

Если в правой части этого уравнения стоит ненулевой вектор $\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^5$, то

$$\ddot{\mathbf{x}} + \frac{\mu}{r^3}\mathbf{x} = \mathbf{Q}, \tag{5}$$

и это уравнение движения назовем *возмущенным.*

Пусть

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0, \quad \mathbf{x}_0,\, \dot{\mathbf{x}}_0 \in \mathbf{R}^5 \tag{6}$$

начальные условия уравнения (5). Из теоремы единственности решения дифференциального уравнения вытекает, что, если в уравнении (5) вектор $\mathbf{Q}$ имеет координаты $Q_4 = Q_5 = 0$ и выбраны нулевые начальные условия для четвертой и пятой компонент векторов $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$

$$x_i(0) = 0, \quad \dot{x}_i(0) = 0, \quad i = 4, 5,$$

то движение, описываемое этим уравнением, происходит в трехмерном подпространстве $(x_1, x_2, x_3)$ пространства $\mathbf{R}^5$. Эти траектории будут совпадать с траекториями трехмерной задачи двух тел при согласовании начальных условий.

Произведем устранение особенности уравнения (5), расположенной в начале координат. Для этого применим $L$-преобразование восьмого порядка ранга пять (1) и временное преобразование

$$dt = r d\tau \tag{7}$$

Из (2) имеем $r = |\mathbf{u}|^2$. Рассмотрим билинейное произведение

$$\mathbf{u} * \mathbf{v} \equiv l(\mathbf{u})\mathbf{v}, \quad l(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^\top A_6 \\ \mathbf{u}^\top A_7 \\ \mathbf{u}^\top A_8 \end{pmatrix}.$$

В отличии от четырехмерного случая выражение $\mathbf{u} * \mathbf{v}$ теперь представляет собой трехмерный вектор. Из ортогональности матрицы $L(\mathbf{u})$ (см. свойство (2)) следуют тождества

$$l(\mathbf{u})l^\top(\mathbf{u}) = |\mathbf{u}|^2 E_3, \quad l(\mathbf{u})L^\top(\mathbf{u}) = |\mathbf{u}|^2 E_{3\times 8},$$

где

$$E_{3\times 8} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как матрицы $A_6, A_7, A_8$ кососимметрические, то имеем свойство

$$\mathbf{u} * \mathbf{v} = -\mathbf{v} * \mathbf{u}.$$

Отсюда вытекает тождество

$$l(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{u} * \mathbf{u} = \mathbf{0}_3, \quad \mathbf{0}_3 = (0,0,0)^\top, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^8.$$

Соотношение

$$\mathbf{u} * \mathbf{v} = \mathbf{0}_3$$

назовем *билинейным.* Для произвольных векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, удовлетворяющих билинейному соотношению выполняется равенство

$$L(\mathbf{u})\mathbf{v} = L(\mathbf{v})\mathbf{u}.$$

Рассмотрим уравнение движения в восьмимерном пространстве

$$\mathbf{u}'' + \frac{h}{2}\mathbf{u} = \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} L^\top(\mathbf{u})\mathbf{Q}, \quad h = \frac{\mu - 2|\mathbf{u}'|^2}{|\mathbf{u}|^2}, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{R}^8. \tag{8}$$

В этом уравнении пятимерный вектор $\mathbf{Q}$ дополнен до восьмимерного нулевыми координатами. Вид уравнения (8) подсказывается аналогией с четырехмерным случаем [6].

**Теорема 1** . *Решение уравнения (8) с начальными условиями*

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}_0',$$

*определяемыми из*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= L(\mathbf{u}_0)\mathbf{u}_0, \\ \mathbf{u}_0' &= \frac{1}{2} L^\top(\mathbf{u}_0)\dot{\mathbf{x}}_0, \end{aligned} \tag{9}$$

*при помощи преобразования (1), (7) переходит в соответствующее решение уравнения (5) с начальными условиями (6).*

Векторы $\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0$ в (9) дополняются до восьмимерных нулевыми компонентами. Условия (9) по аналогии с четырехмерным случаем назовем *$KS$-начальными условиями.* Доказательство теоремы опирается на лемму.

**Лемма 1** . *Величина $\mathbf{u}(\tau) * \mathbf{u}'(\tau)$ является интегралом уравнения (8). При выборе начальных условий (9) значение этого интеграла равно нулю.*

Доказательство. Вычислим производную от $\mathbf{u} * \mathbf{u}'$ в силу уравнения (8). Имеем

$$\frac{d}{d\tau}(\mathbf{u} * \mathbf{u}') = \mathbf{u}' * \mathbf{u}' + \mathbf{u} * \mathbf{u}'' = \mathbf{u} * \left(-\frac{h}{2}\mathbf{u} + \frac{r}{2}L^{\top}(\mathbf{u})\mathbf{Q}\right) =$$

$$= \frac{r}{2}l(\mathbf{u})L^{\top}(\mathbf{u})\mathbf{Q} = \frac{r^2}{2}E_{3\times 8}\mathbf{Q} = \mathbf{0}_3.$$

Следовательно, $\mathbf{u} * \mathbf{u}' = const$ первый интеграл этого уравнения. Этот интеграл эквивалентен трем скалярным интегралам. Поскольку в начальный момент

$$\mathbf{u}(0) * \mathbf{u}'(0) = \frac{1}{2}l(\mathbf{u}_0)L^{\top}(\mathbf{u}_0)\dot{\mathbf{x}}_0 = \frac{r}{2}E_{3\times 8}\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}_3,$$

то интеграл $\mathbf{u} * \mathbf{u}'$ имеет нулевое значение для каждого момента фиктивного времени $\tau$. Лемма доказана.

Из леммы вытекает, что на решениях уравнения (8), удовлетворяющих $KS$-начальными условиям, выполняется перестановочность векторов $\mathbf{u}, \mathbf{u}'$

$$L(\mathbf{u})\mathbf{u}' = L(\mathbf{u}')\mathbf{u}.$$

Доказательство теоремы. Пусть $\mathbf{u}(\tau), \mathbf{u}'(\tau)$ – решение уравнения (8) с начальными условиями (9). Подставим его $L$-образ в левую часть уравнения (5). Так как

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{r}\mathbf{x}' = \frac{1}{r}\left(L(\mathbf{u}')\mathbf{u} + L(\mathbf{u})\mathbf{u}'\right) = \frac{2}{r}L(\mathbf{u})\mathbf{u}', \tag{10}$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = 2\frac{(L(\mathbf{u})\mathbf{u}'' + L(\mathbf{u}')\mathbf{u}')r - r'L(\mathbf{u})\mathbf{u}'}{r^3}, \quad r' = 2(\mathbf{u}, \mathbf{u}'),$$

то имеем

$$\ddot{\mathbf{x}} + \frac{\mu}{r^3}\mathbf{x} =$$

$$= \frac{2}{r^2}L(\mathbf{u})\left(\mathbf{u}'' + \frac{1}{|\mathbf{u}|^2}L^{\top}(\mathbf{u})L(\mathbf{u}')\mathbf{u}' - \frac{2(\mathbf{u}, \mathbf{u}')}{r}\mathbf{u}' + \frac{\mu}{2r}\mathbf{u}\right) =$$

$$= \frac{2}{r^2}L(\mathbf{u})\left[\mathbf{u}'' + \frac{\mu - 2|\mathbf{u}'|^2}{2|\mathbf{u}|^2}\mathbf{u}\right] = \frac{2}{r^2}L(\mathbf{u})\frac{r}{2}L^{\top}(\mathbf{u})\mathbf{Q} = \mathbf{Q},$$

то есть получили правую часть уравнения (5). Во втором равенстве было использовано тождество [7]

$$L^{\top}(\mathbf{u})L(\mathbf{v}) + L^{\top}(\mathbf{v})L(\mathbf{u}) = 2(\mathbf{u}, \mathbf{v})E, \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^8.$$

Осталось проверить соответствие начальных условий. Вектор $\mathbf{u}_0$ переходит в $\mathbf{x}_0$ по определению первого равенства (9). Далее в силу (10) находим

$$\dot{\mathbf{x}}(0) = \frac{2}{|\mathbf{u}(0)|^2} L(\mathbf{u}(0))\mathbf{u}'(0) = \frac{1}{|\mathbf{u}_0|^2} L(\mathbf{u}_0) L^\top(\mathbf{u}_0)\dot{\mathbf{x}}_0 = \dot{\mathbf{x}}_0.$$

Что и требовалось доказать.

Найдем производную от $h$ вдоль решения уравнения (8)

$$h' = -\frac{4(\mathbf{u}', \mathbf{u}'')}{|\mathbf{u}|^2} - h\frac{2(\mathbf{u}, \mathbf{u}')}{|\mathbf{u}|^2} = -2\mathbf{u}'^\top L^\top(\mathbf{u})\mathbf{Q}.$$

Если $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$, то $h$ – интеграл восьмимерного осциллятора

$$\mathbf{u}'' + \frac{h}{2}\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

В переменных $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t$ величина $h$ имеет вид

$$h = \frac{\mu}{r} - \frac{|\dot{\mathbf{x}}|^2}{2},$$

то есть является интегралом энергии уравнения (4).

Собирая уравнения, относящиеся к движению в $\mathbf{R}^8$, приходим к системе

$$\begin{cases} \mathbf{u}'' + \frac{h}{2}\mathbf{u} = \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} L^\top(\mathbf{u})\mathbf{Q}, \\ h' = -2\mathbf{Q}^\top L(\mathbf{u})\mathbf{u}', \\ t' = |\mathbf{u}|^2. \end{cases} \tag{11}$$

Эта система имеет восемнадцатый порядок. Начальные условия для переменных $\mathbf{u}, \mathbf{u}'$ вычисляются по формулам (9). Для $h, t$ берутся значения

$$h_0 = \frac{\mu}{r_0} - \frac{|\dot{\mathbf{x}}_0|^2}{2}, \quad t_0 = 0.$$

Если возмущающее ускорение содержит потенциальную часть с потенциалом $V$

$$\mathbf{Q} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{F},$$

то вместо $h$ можно ввести другую переменную $h_\text{п} = h - V$. Введем обозначение $V_c(t, \mathbf{u}) = V(t, \mathbf{x}(\mathbf{u}))$. Так как

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_k} = 2l_{ik}(\mathbf{u}), \quad i = 1, \ldots, 5,$$

то

$$\frac{\partial V_c}{\partial u_k}=\sum_{i=1}^{5}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial u_k}=2\sum_{i=1}^{5}l_{ik}(\mathbf{u})\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

или в матричной форме

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V_c}{\partial \mathbf{u}}=L^{\mathsf{T}}(\mathbf{u})\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}. \tag{12}$$

Здесь

$$\frac{\partial V_c}{\partial \mathbf{u}}=\left(\frac{\partial V_c}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial V_c}{\partial u_8}\right)^{\mathsf{T}},\quad \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}=\left(\frac{\partial V}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial V}{\partial x_5},\,0,\,0,\,0\right)^{\mathsf{T}}.$$

Производя замену переменной в системе (11), приходим к новой системе регулярных уравнений движения

$$\begin{cases} \mathbf{u}''+\frac{h_{\text{п}}}{2}\mathbf{u}=-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}\Big(|\mathbf{u}|^2V_c\Big)+\frac{|\mathbf{u}|^2}{2}L^{\mathsf{T}}(\mathbf{u})\mathbf{F},\\ h_{\text{п}}'=-|\mathbf{u}|^2\frac{\partial V_c}{\partial t}-2\mathbf{F}^{\mathsf{T}}L(\mathbf{u})\mathbf{u}',\\ t'=|\mathbf{u}|^2. \end{cases}$$

**3. Канонический случай.** Уравнение (5) может быть записано в эквивалентной канонической форме

$$\dot{x}_i=\frac{\partial H_a}{\partial y_i},\quad \dot{y}_i=-\frac{\partial H_a}{\partial x_i}+F_i,\quad i=0,\ldots,5, \tag{13}$$

где

$$H_a=H+y_0=\frac{1}{2}|\mathbf{y}|^2-\frac{\mu}{r}+V(t,\mathbf{x})+y_0,\quad (\mathbf{y}=\dot{\mathbf{x}})$$

$$F_0=-\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{F}, \tag{14}$$

$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{F}\in\mathbf{R}^5$ и для переменных $x_0, y_0$ приняты начальные значения

$$x_0(0)=0,\quad y_0(0)=-H(0,\mathbf{x}(0),\mathbf{y}(0)). \tag{15}$$

Следующий этап состоит в регуляризации уравнений этой канонической системы. Напомним, что при выборе силы $F_0$ вида (14) величина $H_a$ является интегралом системы (13). При начальных условиях (15) переменная $x_0$ совпадает с физическим временем $x_0=t$, а переменная $y_0$ равна отрицательной энергии : $y_0(t)=-H(t)$ и, значит, $H_a(t)=0$ для всех $t$.

В системе (13) перейдем к новой независимой переменной $\tau$ по формуле

$$dt=\nu d\tau,\quad \nu=\nu(x_0,\mathbf{x},y_0,\mathbf{y}). \tag{16}$$

В результате приходим к системе

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{\partial H_b}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{d\tau} = -\frac{\partial H_b}{\partial x_i} + \nu F_i, \quad i = 0, \ldots, 5 \tag{17}$$

с гамильтонианом

$$H_b = \nu H_a = \nu\Big(\frac{|\mathbf{y}|^2}{2} + y_0 + V(x_0, \mathbf{x}) - \frac{\mu}{r}\Big).$$

Решения системы (13) получаются из решений системы (17) при соответствующем выборе начальных условий.

Устраним особенность в уравнениях (17), порожденную центральной силой притяжения. Для этого перейдем в системе (17) к новым переменным $q_0, \mathbf{q}, p_0, \mathbf{p}$ по формулам

$$\begin{aligned} &x_0 = q_0, && y_0 = p_0, \\ &\mathbf{x} = \Lambda(\mathbf{q})\mathbf{q}, && \mathbf{y} = \frac{1}{2r}\Lambda(\mathbf{q})\mathbf{p}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbf{R}^8$, $\Lambda(\mathbf{q})$ – матрица вида

$$\Lambda(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^\top A_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}^\top A_5 \end{pmatrix}.$$

Найдем выражение гамильтониана $H_b$ в новых переменных. Введем трехмерный вектор

$$\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)^\top = \frac{1}{2r}\mathbf{q} * \mathbf{p} = \frac{1}{2r}l(\mathbf{q})\mathbf{p}.$$

Отсюда

$$(y_1, \ldots, y_5, \rho_1, \rho_2, \rho_3)^\top = \frac{1}{2r}L(\mathbf{q})\mathbf{p}.$$

Вычислим квадрат модуля этого составного вектора

$$|\mathbf{y}|^2 + |\boldsymbol{\rho}|^2 = \frac{1}{4r^2}|\mathbf{q}|^2|\mathbf{p}|^2 = \frac{|\mathbf{p}|^2}{4r}.$$

Следовательно, новый гамильтониан примет вид

$$H_c = \frac{\nu}{r}\Big(\frac{1}{8}|\mathbf{p}|^2 + p_0|\mathbf{q}|^2 + |\mathbf{q}|^2 V_c(q_0, \mathbf{q}) - \frac{1}{8|\mathbf{q}|^2}(\mathbf{q} * \mathbf{p})^2 - \mu\Big).$$

Для дальнейшего потребуется теорема, устанавливающая соответствие между решениями гамильтоновых систем различных порядков. Введем векторные величины

$$\mathbf{z} = (x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n)^\top, \quad \mathbf{w} = (q_0, \ldots, q_m, p_0, \ldots, p_m)^\top,$$

$$\mathbf{Z} = -(Y_0, \ldots, Y_n, X_0, \ldots, X_n)^\top, \quad \mathbf{F} = -(P_0, \ldots, P_m, Q_0, \ldots, Q_m)^\top,$$

$$H_\mathbf{z} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_0}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial x_n}, \frac{\partial H}{\partial y_0}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial y_n}\right)^\top,$$

$$K_\mathbf{w} = \left(\frac{\partial K}{\partial q_0}, \ldots, \frac{\partial K}{\partial q_m}, \frac{\partial K}{\partial p_0}, \ldots, \frac{\partial K}{\partial p_m}\right)^\top.$$

Для преобразования

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0(q_0, \mathbf{q}, p_0, \mathbf{p}), \quad & y_0 &= y_0(q_0, \mathbf{q}, p_0, \mathbf{p}), \\ \mathbf{x} &= \mathbf{x}(q_0, \mathbf{q}, p_0, \mathbf{p}), \quad & \mathbf{y} &= \mathbf{y}(q_0, \mathbf{q}, p_0, \mathbf{p}), \end{aligned}$$

где $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^m$ $(m \geq n)$, и его матрицы Якоби введем обозначения

$$\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{w}) \tag{18}$$

$$\mathbf{f}_\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial q_0} & \ldots & \frac{\partial x_0}{\partial q_m} & \frac{\partial x_0}{\partial p_0} & \ldots & \frac{\partial x_0}{\partial p_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial x_n}{\partial q_0} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial q_m} & \frac{\partial x_n}{\partial p_0} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial p_m} \\ \frac{\partial y_0}{\partial q_0} & \ldots & \frac{\partial y_0}{\partial q_m} & \frac{\partial y_0}{\partial p_0} & \ldots & \frac{\partial y_0}{\partial p_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial y_n}{\partial q_0} & \ldots & \frac{\partial y_n}{\partial q_m} & \frac{\partial y_n}{\partial p_0} & \ldots & \frac{\partial y_n}{\partial p_m} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим гамильтонову систему порядка $2n+2$

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = J_{2n+2}(H_\mathbf{z} + \mathbf{Z}), \tag{19}$$

где

$$J_{2n+2} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & E_{n+1} \\ -E_{n+1} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$E_{n+1}$ – единичная матрица порядка $n+1$. Составим новую гамильтонову систему порядка $2m+2$

$$\frac{d\mathbf{w}}{d\tau} = J_{2m+2}(K_\mathbf{w} + \mathbf{F}) \tag{20}$$

с функцией Гамильтона $K(\mathbf{w}) = H(\mathbf{f}(\mathbf{w}))$ и силами $\mathbf{F} = \mathbf{f}_\mathbf{w}^\top \mathbf{Z}$.

Пусть $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\tau)$ – решение системы (20) с начальными условиями

$$\tau = 0, \quad \mathbf{w}^0 = \mathbf{w}(0).$$

**Теорема 2** *[6]. Для того чтобы вектор-функция*

$$\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{w}(\tau)) \tag{21}$$

*была решением уравнения (19) с начальными условиями*

$$\tau = 0, \quad \mathbf{z}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{w}^0)$$

*достаточно, чтобы вдоль траектории* $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\tau)$ *матрица Якоби преобразования (18) удовлетворяла уравнению*

$$\mathbf{f}_{\mathbf{w}} J_{2m+2} \mathbf{f}_{\mathbf{w}}^{\top} = J_{2n+2}. \tag{22}$$

Доказательство. Найдем производную от (21) вдоль траектории системы (20). Имеем

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = \mathbf{f}_{\mathbf{w}} \frac{d\mathbf{w}}{d\tau} = \mathbf{f}_{\mathbf{w}} J_{2m+2} \mathbf{f}_{\mathbf{w}}^{\top} H_{\mathbf{z}} + \mathbf{f}_{\mathbf{w}} J_{2m+2} \mathbf{f}_{\mathbf{w}}^{\top} \mathbf{Z} = J_{2n+2}(H_{\mathbf{z}} + \mathbf{Z}).$$

Что и требовалось доказать.

Таким образом, для установления соответствия между решениями системы

$$\frac{dq_j}{d\tau} = \frac{\partial H_c}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{d\tau} = -\frac{\partial H_c}{\partial q_j} + P_j, \quad j = 0, \ldots, 8, \tag{23}$$

где

$$P_j = \nu \sum_{i=0}^{5} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, \quad j = 0, \ldots, 8$$

и решениями системы (17) надо проверить выполнение условия (22), которое может быть записано через скобки Пуассона

$$\left\{x_i,\, x_k\right\} = 0, \quad \left\{x_i,\, y_k\right\} = \delta_{ik}, \quad \left\{y_i,\, y_k\right\} = 0 \tag{24}$$

для $i, k = 0, \ldots, 5$.

Переменные $x_i$ не зависят от переменных $p_i$. Поэтому первое условие (24) выполнено. Так как при $i = 0$ или $k = 0$ соотношения (24) удовлетворяются тождественно, то остается проверить второе и третье соотношения для значений индексов $i, k = 1, \ldots, 5$. В этом случае они могут быть записаны в матричной форме

$$\left(\left\{x_i,\, y_k\right\}\right) = \frac{1}{|\mathbf{q}|^2} \Lambda(\mathbf{q}) \Lambda^{\top}(\mathbf{q}) = E_5,$$

$$\left(\{y_i,\, y_k\}\right) = \frac{-1}{2|\mathbf{q}|^6}\Big(\Lambda(\mathbf{q})\mathbf{p}\mathbf{q}^\top\Lambda^\top(\mathbf{q}) - \Lambda(\mathbf{q})\mathbf{q}\,\mathbf{p}^\top\Lambda^\top(\mathbf{q}) - \\ -|\mathbf{q}|^2\big(\Lambda(\mathbf{p})\Lambda^\top(\mathbf{q}) - \mathbf{q}^\top\mathbf{p}E_5\big)\Big). \tag{25}$$

Следовательно, второе условие (24) выполняется. Правая часть равенства (25) по теореме из [7] равна некоторой кососимметрической матрице, отличной от нулевой в общем случае. Однако, если в каждый момент $\tau$ будет выполняться равенство

$$\mathbf{q} * \mathbf{p} = \mathbf{0}_3, \tag{26}$$

то по следствию к упоминавшейся теореме из [7] эта матрица обратится в нулевую. Поэтому остается проверить, что величина $\mathbf{q} * \mathbf{p}$ является интегралом системы (23). Тогда при специальном выборе начальных условий будет справедливо соотношение (26) и тем самым проверка третьего условия (24) завершится.

Для множителя $\nu$ в (16) рассмотрим два случая, которые приводят к устранению особенности и разделению переменных в невозмущенной задаче

$$\nu = r, \qquad \nu = \frac{r}{\sqrt{2y_0}}.$$

В первом случае независимая переменная $\tau$ совпадает с фиктивным временем, во втором случае — с обобщенной эксцентрической аномалией [6].

**Лемма 2** *Величина $\mathbf{q}*\mathbf{p}$ является векторным интегралом системы (23).*

Доказательство. Установим вспомогательные соотношения. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial p_i}(\mathbf{q} * \mathbf{p}) = \frac{\partial}{\partial p_i}\Big(l(\mathbf{q})\mathbf{p}\Big) = \begin{pmatrix} l_{6i}(\mathbf{q}) \\ l_{7i}(\mathbf{q}) \\ l_{8i}(\mathbf{q}) \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q} * \mathbf{p})^2 = 2l^\top(\mathbf{q})\mathbf{q} * \mathbf{p}, \tag{27}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q} * \mathbf{p})^2 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{p} * \mathbf{q})^2 = 2l^\top(\mathbf{p})\mathbf{p} * \mathbf{q}. \tag{28}$$

Используя свойства матриц $A_1, \ldots, A_8$ получаем

$$\Lambda^\top(\mathbf{q})\Lambda(\mathbf{q}) = |\mathbf{q}|^2 E - l^\top(\mathbf{q})l(\mathbf{q}), \tag{29}$$

$$l(\mathbf{p})\Lambda^{\top}(\mathbf{q}) = -l(\mathbf{q})\Lambda^{\top}(\mathbf{p}). \tag{30}$$

Покажем теперь, что справедливо тождество

$$R \equiv \mathbf{p} * \left(l^{\top}(\mathbf{q})\mathbf{q} * \mathbf{p}\right) + \mathbf{q} * \left(l^{\top}(\mathbf{p})\mathbf{p} * \mathbf{q}\right) = \mathbf{0}_3. \tag{31}$$

Действительно, применяя (29), (30), имеем

$$R = l(\mathbf{p})l^{\top}(\mathbf{q})l(\mathbf{q})\mathbf{p} + l(\mathbf{q})l^{\top}(\mathbf{p})l(\mathbf{p})\mathbf{q} =$$

$$= l(\mathbf{p})\left(|\mathbf{q}|^2\mathbf{p} - \Lambda^{\top}(\mathbf{q})\Lambda(\mathbf{q})\mathbf{p}\right) + l(\mathbf{q})\left(|\mathbf{p}|^2\mathbf{q} - \Lambda^{\top}(\mathbf{p})\Lambda(\mathbf{p})\mathbf{q}\right) =$$

$$= -l(\mathbf{p})\Lambda^{\top}(\mathbf{q})\Lambda(\mathbf{q})\mathbf{p} - l(\mathbf{q})\Lambda^{\top}(\mathbf{p})\Lambda(\mathbf{p})\mathbf{q} = \mathbf{0}_3.$$

Дополняя вектор $\mathbf{F}$ тремя нулевыми координатами, запишем каноническую силу системы (23) в матричной форме

$$P_0 = F_0, \quad \mathbf{P} = 2\nu L^{\top}(\mathbf{q})\mathbf{F}.$$

Вычислим производную от $\mathbf{q} * \mathbf{p}$ в силу системы (23). Учитывая последовательно (27), (28), (12), (31) находим при $\nu = r$

$$\frac{d}{d\tau}(\mathbf{q} * \mathbf{p}) = \mathbf{q}' * \mathbf{p} + \mathbf{q} * \mathbf{p}' = \frac{\partial H_c}{\partial \mathbf{p}} * \mathbf{p} - \mathbf{q} * \frac{\partial H_c}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{q} * \mathbf{P} =$$

$$= \left(\frac{\mathbf{p}}{4} - \frac{l^{\top}(\mathbf{q})}{4|\mathbf{q}|^2}\mathbf{q} * \mathbf{p}\right) * \mathbf{p} - \mathbf{q} * \left(2p_0\mathbf{q} + 2\mathbf{q}V_c + |\mathbf{q}|^2\frac{\partial V_c}{\partial \mathbf{q}} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\mathbf{q} * \mathbf{p})^2}{4|\mathbf{q}|^4}\mathbf{q} - \frac{l^{\top}(\mathbf{p})}{4|\mathbf{q}|^2}\mathbf{p} * \mathbf{q}\right) + 2r\mathbf{q} * L^{\top}(\mathbf{q})\mathbf{F} =$$

$$= \frac{1}{4|\mathbf{q}|^2}\Big(\mathbf{p} * \left(l^{\top}(\mathbf{q})\mathbf{q} * \mathbf{p}\right) + \mathbf{q} * \left(l^{\top}(\mathbf{p})\mathbf{p} * \mathbf{q}\right)\Big) -$$

$$-2rl(\mathbf{q})L^{\top}(\mathbf{q})\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + 2rl(\mathbf{q})L^{\top}(\mathbf{q})\mathbf{F} = 2r^2E_{3\times 8}\left(-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{F}\right) = \mathbf{0}_3.$$

При $\nu = \dfrac{r}{\sqrt{2p_0}}$ во всех слагаемых добавляется множитель $\dfrac{1}{\sqrt{2p_0}}$. Следовательно, $\mathbf{q} * \mathbf{p} = const$ – первый интеграл системы (23). Лемма доказана.

Приведем формулы нахождения начальных условий для системы (23), при которых в начальный момент будет выполняться соотношение (26). Пусть даны начальные условия (6). По этим условиям находим из уравнения $\mathbf{x} = L(\mathbf{q})\mathbf{q}$ какое-либо значение вектора $\mathbf{q}_0$ и расстояние

$$r_0 = |\mathbf{x}_0|^2.$$

Полагаем $q_0 = 0$, $\mathbf{y}_0 = \dot{\mathbf{x}}_0$ и находим значения для обобщенных импульсов

$$\mathbf{p}_0 = 2\Lambda^{\mathsf{T}}(\mathbf{q}_0)\mathbf{y}_0,$$

$$p_0 = -\frac{1}{2}|\mathbf{y}_0|^2 + \frac{\mu}{r_0} - V(0, \mathbf{x}_0).$$

Проверим, что при $\tau = 0$ выполняется билинейное соотношение (26). Дополняя вектор $\mathbf{y}_0$ до восьмимерного нулевыми координатами, находим

$$\mathbf{q}_0 * \mathbf{p}_0 = l(\mathbf{q}_0)\mathbf{p}_0 = 2l(\mathbf{q}_0)L^{\mathsf{T}}(\mathbf{q}_0)\mathbf{y}_0 = 2r_0E_{3\times 8}\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}_3.$$

Заметим, что величина $\mathbf{q} * \mathbf{p}$ входит в гамильтониан $H_c$ в виде квадрата длины этого вектора $(\mathbf{q} * \mathbf{p})^2$. Поэтому система (23) может быть заменена на другую

$$\frac{dq_j}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} + P_j, \quad j = 0, \ldots, 8$$

с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \nu\Big(\frac{|\mathbf{p}|^2}{8r} + p_0 + V_c(q_0, \mathbf{q}) - \frac{\mu}{r}\Big),$$

где $\nu = r$ или $\nu = \dfrac{r}{\sqrt{2p_0}}$.

Начальные условия для этой системы определяются по тем же формулам, что и для системы (23).

В заключении отметим, что при $\nu = \dfrac{r}{\sqrt{2p_0}}$ в невозмущенном случае ($V = 0, \mathbf{F} = \mathbf{0}$) нами установлено соответствие между решениями восьмимерного гармонического осциллятора с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\sqrt{2p_0}}\Big(\frac{|\mathbf{p}|^2}{8} + p_0\mathbf{q}^2\Big) - \frac{\mu}{\sqrt{2p_0}}, \quad \mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbf{R}^8$$

и решениями пятимерной задачи двух тел с гамильтонианом

$$H_b = \frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{2y_0}}\Big(\frac{|\mathbf{y}|^2}{2} + y_0\Big) - \frac{\mu}{\sqrt{2y_0}}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^5$$

при выполнении $KS$-начальных условий.

## Литература


1. **Полещиков С. М., Холопов А. А.** Введение параметров в преобразвании Леви-Чивита и их применение // *Астрономический журнал. 1996. Т. 73. №6. С. 947–952.*

2. **Полещиков С. М., Холопов А. А.** Обобщенные KS-преобразования 4-го порядка//*Вестник Сыкт. ун-та. Сер.1. 1996. Вып.2. С. 201–212.*

3. **Полещиков С. М.** Применение непрерывного векторного поля на семимерной сфере. Часть 1. Построение преобразования // Деп. в ВИНИТИ 18.05.94. №1249-В94. 20 с.

4. **Полещиков С. М.** $L$-матрицы восьмого порядка // *Труды Сыктывкарского лесного института. 1997. Т. 1. С. 8–14.*

5. **Жубр А. В.** KS-преобразования и инволюции нормированных алгебр // *Вестник Сыкт. ун-та. Сер.1. 1996. Вып.2. С. 43–58.*

6. **Штифель Е., Шейфеле Г.** Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 304 с.

7. **Полещиков С. М.** Алгебраические свойства $L$-матриц восьмого порядка // *Труды Сыктывкарского лесного института. 1997. Т. 1. С. 22–26.*



**Summary**

**Poleshchikov S. M.** The regularization of motion equations of five-dimensional Kepler problem

We give the application $L$-transformations of the eighth order to a regularization of the motion equations of five-dimensional two-body problem. The canonical and uncanonical cases are considered. The correspondence between solutions of five-dimensional Kepler problem and solutions of eight-dimensional harmonic oscillator with the special choice of the initial conditions is established.



*Сыктывкарский лесной институт*


*Поступила 12.10.98*