Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.3.1999

УДК 539.3

УТОЧНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ КВАЗИКИРХГОФОВСКОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК К.Ф.ЧЕРНЫХА

Е. И. Михайловский, А. В. Ермоленко

Получены уравнения статики оболочек, уточняющие квазикирхгофовскую теорию К.Ф.Черныха [1,2] в основном за счет варьирования параметров λ_ξ, κ_ξ, характеризующих поперечное обжатие. Граничные величины приведены к исходной конфигурации оболочки. Показано, что в общем случае независимыми являются шесть геометрических граничных величин, что не согласуется с порядком разрешающей системы уравнений в смещениях, основанной на гипотезе Кирхгофа об отсутствии поперечных сдвигов.

1. Некоторые исходные соотношения

1.1. Отнесем срединную поверхность недеформированной оболочки к ортогональным координатам α^1, α^2. Предположим, что уравнение этой поверхности

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha^i), \; i = 1, 2 \tag{1.1}$$

в результате деформации оболочки переходит в следующее:

$$\overset{*}{\mathbf{r}} = \mathbf{r}(\alpha^i) + \mathbf{u}(\alpha^i). \tag{1.2}$$

Здесь и ниже величины, соответствующие деформированной (актуальной) конфигурации оболочки, снабжены знаком (*).

Вектор перемещений u можно представить так:

$$\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{r}_\alpha + w\mathbf{n} = u_\beta \mathbf{r}^\beta + w\mathbf{n} = u_{<\alpha>}\mathbf{e}_\alpha + w\mathbf{n}, \tag{1.3}$$

где $\mathbf{e}_i = \mathbf{r}_i/\sqrt{a_{ii}}$; $u_{<i>}$ - тангенциальные физические компоненты вектора перемещений, приведенные к исходной конфигурации срединной поверхности: $u_{<i>} = u^i\sqrt{a_{ii}} = u_i/\sqrt{a_{ii}}$, $a_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j$, $\mathbf{r}_i = \partial\mathbf{r}/\partial\alpha^i \equiv \partial_i\mathbf{r}$; здесь и ниже по одинаковым в одночлене верхнему и нижнему греческим индексам следует суммировать от 1-го до 2-х.

Используя формулы дифференцирования векторов ковариантного $\{\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2,\ \mathbf{n}\}$ и контравариантного $\{\mathbf{r}^1,\ \mathbf{r}^2,\ \mathbf{n}\}$ подвижных базисов

$$\partial_i\mathbf{r}_j \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{r}_{ij} = \Gamma^{\alpha}_{ij}\mathbf{r}_{\alpha} + b_{ij}\mathbf{n},\ \partial_i\mathbf{r}^j = \Gamma^j_{i\alpha}\mathbf{r}^{\alpha} + b^j_i\mathbf{n},$$

$$\partial_i\mathbf{n} \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{n}_i = -b^{\alpha}_i\mathbf{r}_{\alpha} = -b_{i\alpha}\mathbf{r}^{\alpha}, \tag{1.4}$$

(Γ^k_{ij} - символы Кристофеля второго рода: $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} = \mathbf{r}_{ij}\cdot\mathbf{r}^k$; b_{ij}, b^j_i - ковариантные и смешанные компоненты тензора кривизны срединной поверхности: $b_{ij} = b_{ji} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_{ij}$, $b^j_i = \partial_i\mathbf{r}^j\cdot\mathbf{n}$),
находим

$$\partial_i\mathbf{u} = \varepsilon_{i\alpha}\mathbf{r}^{\alpha} - \vartheta_i\mathbf{n}. \tag{1.5}$$

Здесь

$$\varepsilon_{ij} = \nabla_i u_j - b_{ij}w,\ \vartheta_i = -\partial_i w - b^{\alpha}_i u_{\alpha} \tag{1.6}$$

или (в физических компонентах)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha} &\stackrel{\Delta}{=} \varepsilon_{<11>} = \frac{\partial u_{<1>}}{\partial s_1} + \rho_1 u_{<2>} - \sigma_1 w,\\
\varepsilon_{\beta} &\stackrel{\Delta}{=} \varepsilon_{<22>} = \frac{\partial u_{<2>}}{\partial s_2} + \rho_2 u_{<1>} - \sigma_2 w,\\
\omega_{\alpha} &\stackrel{\Delta}{=} \varepsilon_{<12>} = \frac{\partial u_{<2>}}{\partial s_1} - \rho_1 u_{<1>} + \tau w,\\
\omega_{\beta} &\stackrel{\Delta}{=} \varepsilon_{<21>} = \frac{\partial u_{<1>}}{\partial s_2} - \rho_2 u_{<2>} + \tau w,\\
\vartheta_{\alpha} &\stackrel{\Delta}{=} \vartheta_{<1>} = -\frac{\partial w}{\partial s_1} - \sigma_1 u_{<1>} + \tau u_{<2>},\\
\vartheta_{\beta} &\stackrel{\Delta}{=} \vartheta_{<2>} = -\frac{\partial w}{\partial s_2} - \sigma_2 u_{<2>} + \tau u_{<1>};
\end{aligned} \tag{1.6$'$}$$

$$\sigma_i = -R_i^{-1},\ \tau = -R_{12}^{-1},\ ds_i = \sqrt{a_{ii}}d\alpha^i,$$

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\frac{\partial\sqrt{a_{11}}}{\partial s_2},\ \rho_2 = \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\frac{\partial\sqrt{a_{22}}}{\partial s_1}. \tag{1.6$''$}$$

(В соотношениях (1.6$'$) слева показаны обозначения, обычно принимаемые в линейной теории оболочек при использовании ортогональных, но не главных координат поверхности (см., например, [3], форм. (6.161)-(6.163)).)

На основании (1.2)-(1.6) получаем следующие формулы для физических компонент тензора деформации (срединной поверхности) Грина-Лагранжа:

$$\gamma_{<ij>} = \frac{1}{2}(\overset{*}{a}_{ij} - a_{ij})/\sqrt{a_{ii}a_{jj}} =$$

$$= \frac{1}{2}(\varepsilon_{<ij>} + \varepsilon_{<ji>} + \varepsilon_{<i\alpha>}\varepsilon_{<j\alpha>} - \vartheta_{<i>}\vartheta_{<j>}). \tag{1.7}$$

Нетрудно проверить справедливость формул

$$\overset{*}{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i + \varepsilon_{i\alpha}\mathbf{r}^\alpha - \vartheta_i\mathbf{n},\ \overset{*}{\mathbf{n}} = \overset{*}{\mathbf{r}}_1 \times \overset{*}{\mathbf{r}}_2/|\overset{*}{\mathbf{r}}_1 \times \overset{*}{\mathbf{r}}_2| =$$

$$= \mathcal{A}[(1+\widetilde{\varepsilon})\mathbf{n} + \widetilde{\vartheta}_{<\alpha>}\mathbf{e}_\alpha], \tag{1.8}$$

где использованы обозначения

$$\mathcal{A} = \sqrt{a/\overset{*}{a}},\ a = a_{11}a_{22},\ \overset{*}{a} = \overset{*}{a}_{11}\overset{*}{a}_{22} - \overset{*}{a}{}^2_{12},$$

$$\widetilde{\vartheta}_{<i>} = \vartheta_{<i>} + \tau_{<ij>},\ \tau_{<ij>} = \vartheta_{<i>}\varepsilon_{<ij>} - \vartheta_{<j>}\varepsilon_{<ji>},\ i \neq j,$$

$$\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon_{<11>} + \varepsilon_{<22>} + \varepsilon_{<11>}\varepsilon_{<22>} - \varepsilon_{<12>}\varepsilon_{<21>}. \tag{1.8'}$$

Далее на основании (1.2), (1.4), (1.5) имеем

$$\overset{*}{\mathbf{r}}_{ij} = (\delta_i^\alpha + \varepsilon_i^\alpha)\overset{*}{\mathbf{r}}_{\alpha j} + (\partial_j\varepsilon_i^\alpha + b_j^\alpha\vartheta_i)\mathbf{r}_\alpha - \partial_j\vartheta_i\mathbf{n}. \tag{1.9}$$

Отсюда с учетом (1.8), (1.8′) находим

$$\overset{*}{b}_{ij} = \overset{*}{\mathbf{r}}_{ij}\cdot\overset{*}{\mathbf{n}} = \mathcal{A}[(b_{ij} + b_{\alpha j}\varepsilon_i^\alpha - \partial_j\vartheta_i)(1+\overset{*}{\varepsilon})+$$

$$+(\Gamma_{ij}^\alpha + \Gamma_{\beta j}^\alpha\varepsilon_i^\beta + \partial_j\varepsilon_i^\alpha + b_j^\alpha\vartheta_i)\widetilde{\vartheta}_\alpha]. \tag{1.10}$$

Эти формулы можно записать в следующем удобном для практического применения виде:

$$\begin{bmatrix} \overset{*}{b}_{11} \\ \overset{*}{b}_{12} \\ \overset{*}{b}_{22} \end{bmatrix} = \mathcal{A}[\omega_{ij}] \begin{bmatrix} \overset{*}{\vartheta}_{<1>} \\ 1+\overset{*}{\varepsilon} \\ \overset{*}{\vartheta}_{<2>} \end{bmatrix}. \tag{1.11}$$

Здесь

$$\omega_{11} = \frac{\partial\varepsilon_{<11>}}{\partial s_1} + \delta_1(1+\varepsilon_{<11>}) - \rho_1\varepsilon_{<12>} + \sigma_1\vartheta_{<1>},$$

$$
\begin{aligned}
\omega_{12} &= -\frac{\partial \vartheta_{<1>}}{\partial s_1} + \sigma_1(1+\varepsilon_{<11>}) - \tau\varepsilon_{<12>} - \delta_1\vartheta_{<1>},\\
\omega_{13} &= \frac{\partial \varepsilon_{<12>}}{\partial s_1} - \rho_1(1+\varepsilon_{<11>}) + \delta_1\varepsilon_{<12>} - \tau\vartheta_{<1>},\\
\omega_{21} &= \frac{\partial \varepsilon_{<11>}}{\partial s_2} + \rho_1(1+\varepsilon_{<11>}) - \rho_2\varepsilon_{<12>} - \tau\vartheta_{<1>},\\
\omega_{22} &= -\frac{\partial \vartheta_{<1>}}{\partial s_2} - \tau(1+\varepsilon_{<11>}) + \sigma\varepsilon_{<12>} - \rho\vartheta_{<1>},\\
\omega_{23} &= \frac{\partial \varepsilon_{<12>}}{\partial s_2} + \rho_2(1+\varepsilon_{<11>}) + \rho_1\varepsilon_{<12>} + \sigma_2\vartheta_{<1>},\\
\omega_{31} &= \frac{\partial \varepsilon_{<21>}}{\partial s_2} - \rho_2(1+\varepsilon_{<22>}) + \delta_2\varepsilon_{<21>} - \tau\vartheta_{<2>},\\
\omega_{32} &= -\frac{\partial \vartheta_{<2>}}{\partial s_2} + \sigma_2(1+\varepsilon_{<22>}) - \tau\varepsilon_{<22>} - \delta_2\vartheta_{<2>},\\
\omega_{33} &= \frac{\partial \varepsilon_{<22>}}{\partial s_2} + \delta_2(1+\varepsilon_{<22>}) + \rho_2\varepsilon_{<21>} + \sigma_2\vartheta_{<2>},\\
&\delta_i = \partial(\ln\sqrt{a_{ii}})/\partial s_i. \qquad (1.12)
\end{aligned}
$$

1.2. Рассмотрим на срединной поверхности оболочки линию Γ ($\overset{*}{\Gamma}$ - в актуальной конфигурации), которая, в частности, может совпадать с граничным контуром $\partial\Omega$ ($\partial\overset{*}{\Omega}$). Свяжем с линией Γ правую тройку ортов $\{\boldsymbol{\nu},\ \mathbf{t},\mathbf{n}\}$, где $\boldsymbol{\nu}$ - орт тангенциальной нормали к линии Γ, $\mathbf{t}$ - орт касательной, $\mathbf{n}$ - орт нормали к срединной поверхности. Очевидно, что

$$
\mathbf{t} = t^\beta \mathbf{r}_\beta = \frac{d\mathbf{r}}{ds_t} = \frac{d\alpha^\beta}{ds_t}\mathbf{r}_\beta, \qquad (1.13)
$$

т.е.

$$
t^i = d\alpha^i/ds_t. \qquad (1.13')
$$

Далее получаем

$$
\boldsymbol{\nu} = \nu^\beta \mathbf{r}_\beta = \mathbf{t}\times\mathbf{n} = t^\alpha c^{\beta}_{\cdot\alpha}\mathbf{r}_\beta, \qquad (1.14)
$$

где $c^{i}_{\cdot j}$ - смешанные компоненты поверхностного дискриминантного тензора:

$$
c^{1}_{\cdot 1} = -c^{2}_{\cdot 2} = \frac{a_{12}}{\sqrt{a}},\ c^{2}_{\cdot 1} = -\frac{a_{11}}{\sqrt{a}},\ c^{1}_{\cdot 2} = -\frac{a_{22}}{\sqrt{a}}. \qquad (1.14')
$$

Вводя вектор-градиент для поверхности

$$
\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{r}^\alpha \nabla_\alpha, \qquad (1.15)
$$

производные вдоль касательной и тангенциальной нормали можно выразить формулами

$$\frac{d}{ds_t} = \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\nabla} = t^\alpha \nabla_\alpha, \quad \frac{d}{ds_\nu} = \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \nu^\alpha \nabla_\alpha. \tag{1.16}$$

Правила дифференцирования введенных ортов вдоль касательной можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds_t} &= \rho_t \mathbf{t} - \tau_t \mathbf{n}, \\
\frac{d\mathbf{t}}{ds_t} &= \sigma_t \mathbf{n} - \rho_t \boldsymbol{\nu}, \\
\frac{d\mathbf{n}}{ds_t} &= \tau_t \boldsymbol{\nu} - \sigma_t \mathbf{t}.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Отсюда с учетом формул (1.4), (1.13) и (1.14) находим

$$\sigma_t = -\mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds_t} = -(t^\gamma \mathbf{r}_\gamma) \cdot (\frac{d\mathbf{n}}{d\alpha^\nu} \frac{d\alpha^\nu}{ds_t}) = t^\gamma t^\nu b_{\nu\mu} \delta^\mu_\gamma = b_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta,$$

$$\begin{aligned}
\tau_t = \boldsymbol{\nu} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds_t} &= (\nu^\gamma \mathbf{r}_\gamma) \cdot (\frac{d\mathbf{n}}{d\alpha^\nu} \frac{d\alpha^\nu}{ds_t}) = -b_{\alpha\beta} t^\alpha \nu^\beta, \\
\rho_t = -\boldsymbol{\nu} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds_t} &= -(\nu^\alpha \mathbf{r}_\alpha) \cdot (t^\beta \nabla_\beta \mathbf{t}) = \\
&= -\nu_\alpha t^\beta (\partial_\beta t^\alpha + t^\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}) = -\nu_\alpha t^\beta \nabla_\beta t^\alpha.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

По аналогии с (1.13), (1.13′) можно записать

$$\boldsymbol{\nu} = \nu^\beta \mathbf{r}_\beta = \frac{d\mathbf{r}}{ds_\nu} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha^\beta} \frac{\partial \alpha^\beta}{\partial s_\nu} = \frac{d\alpha^\beta}{ds_\nu} \mathbf{r}_\beta, \tag{1.19}$$

т.е.

$$\nu^i = d\alpha^i / ds_\nu. \tag{1.19′}$$

Далее имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds_\nu} &= \sigma_\nu \mathbf{n} - \rho_\nu \mathbf{t}, \quad \rho_\nu = -\mathbf{t} \cdot \frac{\boldsymbol{\nu}}{ds_\nu} = -t_\alpha \nu^\beta \nabla_\beta \nu^\alpha, \\
\frac{d\mathbf{t}}{ds_\nu} &= \rho_\nu \boldsymbol{\nu} - \tau_\nu \mathbf{n}, \quad \tau_\nu = \mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds_\nu} = -b_{\alpha\beta} \nu^\alpha t^\beta, \\
\frac{d\mathbf{n}}{ds_\nu} &= \tau_\nu \mathbf{t} - \sigma_\nu \boldsymbol{\nu}, \quad \sigma_\nu = -\boldsymbol{\nu} \cdot \frac{\mathbf{n}}{ds_\nu} = b_{\alpha\beta} \nu^\alpha \nu^\beta.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Учитывая принятое выше предположение о том, что координатные линии на недеформированной срединной поверхности являются ортогональными, нетрудно получить следующие соотношения (см. рис.1 [6] и форм.(1.6″)):

$$
\begin{gathered}
\mathbf{r}_i = \nu_i \boldsymbol{\nu} + t_i \mathbf{t}, \ \mathbf{r}^j = \nu^i \boldsymbol{\nu} + t^i \mathbf{t}, \\
\nu_1 = \sqrt{a_{11}} \cos\gamma, \ \nu_2 = \sqrt{a_{22}} \sin\gamma, \\
t_1 = -\sqrt{a_{11}} \sin\gamma, \ t_2 = \sqrt{a_{22}} \cos\gamma, \\
\nu^1 = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{a_{11}}}, \ \nu^2 = \frac{\sin\gamma}{\sqrt{a_{22}}}, \\
t^1 = -\frac{\sin\gamma}{\sqrt{a_{11}}}, \ t^2 = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{a_{22}}};
\end{gathered} \tag{1.21}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{ds_t} = t^\alpha \partial_\alpha = -\frac{\sin\gamma}{\sqrt{a_{11}}} \frac{\partial}{\partial \alpha^1} + \frac{\cos\gamma}{\sqrt{a_{22}}} \frac{\partial}{\partial \alpha^2}, \\
\frac{d}{ds_\nu} = \nu^\alpha \partial_\alpha = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{a_{11}}} \frac{\partial}{\partial \alpha^1} + \frac{\sin\gamma}{\sqrt{a_{22}}} \frac{\partial}{\partial \alpha^2};
\end{gathered} \tag{1.22}
$$

$$
\begin{gathered}
\sigma_\nu = \sigma_1 \cos^2\gamma - \tau \sin 2\gamma + \sigma_2 \sin^2\gamma, \\
\sigma_t = \sigma_1 \sin^2\gamma + \tau \sin 2\gamma + \sigma_2 \cos^2\gamma, \\
\tau_\nu = \tau_t = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\gamma + \tau \cos 2\gamma, \\
\rho_t = \frac{d\gamma}{ds_t} + \rho_1 \sin\gamma + \rho_2 \cos\gamma, \\
\rho_\nu = -\frac{d\gamma}{ds_\nu} + \rho_1 \cos\gamma - \rho_2 \sin\gamma.
\end{gathered} \tag{1.23}
$$

1.3. В реализуемом ниже вариационном подходе к выводу уравнений нелинейной теории оболочек будут использованы специальные формулы интегрирования по частям (в том смысле, что подынтегральные функции представляют собой компоненты вектора или тензора, а ковариантное дифференцирование связано как с исходной, так и с актуальной конфигурациями). Дадим краткий вывод названных формул.

Фолмулы Грина для скалярной функции имеют вид

$$
\begin{gathered}
\int_\Omega \partial_1 \Phi d\alpha^1 d\alpha^2 = \oint_{\partial\Omega} \Phi d\alpha^2, \\
\int_\Omega \partial_2 \Phi d\alpha^1 d\alpha^2 = -\oint_{\partial\Omega} \Phi d\alpha^1,
\end{gathered} \tag{1.24}
$$

где движение по контуру $\partial\Omega$ осуществляется так, чтобы ограничиваемая им область Ω оставалась слева.

На основании (1.14) имеем

$$\nu_i = a_{\beta i}\nu^\beta = a_{\beta i}c^\beta_{.\alpha}t^\alpha = c_{i\alpha}t^\alpha, \tag{1.25}$$

где c_{ij} - ковариантные компоненты дискриминантного поверхностного тензора:

$$c_{12} = -c_{21} = \sqrt{a},\ c_{11} = c_{22} = 0. \tag{1.25$'$}$$

Из (1.13$'$) с учетом (1.25), (1.25$'$) находим

$$d\alpha^1 = t^1 ds_t = \frac{\nu_2}{c_{21}}ds_t = -\frac{1}{\sqrt{a}}\nu_2 ds_t,$$

$$d\alpha^2 = t^2 ds_t = \frac{\nu_1}{c_{12}}ds_t = \frac{1}{\sqrt{a}}\nu_1 ds_t. \tag{1.26}$$

Используя (1.26), интегралы (1.24) можно представить единой формулой

$$\int_\Omega \partial_i \Phi d\alpha^1 d\alpha^2 = \oint_{\partial\Omega}(\nu_i\Phi/\sqrt{a})ds_t,\ i = 1,2. \tag{1.27}$$

Из вывода этой формулы видно, что она остается справедливой при замене Φ на $\sqrt{a}u^j v$. Выполнив такую замену и свернув полученное равенство по индексам i и j, придем к формуле

$$\int_\Omega \partial_\beta(\sqrt{a}u^\beta v)d\alpha^1 d\alpha^2 = \oint_{\partial\Omega} \nu_\beta u^\beta v ds_t \tag{1.28}$$

или

$$\int_\Omega \sqrt{a}u^\beta \partial_\beta v d\alpha^1 d\alpha^2 = \oint_{\partial\Omega} \nu_\beta u^\beta v ds_t -$$

$$- \int_\Omega v\partial_\beta(\sqrt{a}u^\beta)d\alpha^1 d\alpha^2. \tag{1.29}$$

Используя известную формулу для свертки ковариантной производной контравариантной компоненты вектора

$$\nabla_\beta(\sqrt{a}u^\beta) = \partial_\beta(\sqrt{a}u^\beta), \tag{1.30}$$

соотношению (1.28) при $v \equiv 1$ можно придать вид

$$\int_\Omega \nabla_\beta u^\beta d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \nu_\beta u^\beta ds_t. \tag{1.31}$$

Установим вспомогательную формулу

$$\overset{*}{\nabla}_\beta(\sqrt{a}u^\beta) = \nabla_\beta(\sqrt{a}u^\beta). \tag{1.32}$$

Учитывая, что величина $\mathcal{A} = \sqrt{a/\overset{*}{a}}$ является инвариантом, и принимая во внимание (1.30), находим

$$\overset{*}{\nabla}_\beta(\sqrt{a}u^\beta) = \overset{*}{\nabla}_\beta(\sqrt{\overset{*}{a}}\mathcal{A}u^\beta) = \partial_\beta(\sqrt{\overset{*}{a}}\mathcal{A}u^\beta) =$$

$$= \partial_\beta(\sqrt{a}u^\beta) = \nabla_\beta(\sqrt{a}u^\beta).$$

На основании (1.31) имеем

$$J \triangleq \int_\Omega \nabla_\alpha(\sqrt{a}t^{\alpha\beta}u_\beta)d\alpha^1 d\alpha^2 =$$

$$= \int_\Omega \nabla_\alpha(t^{\alpha\beta}u_\beta)d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \nu_\alpha t^{\alpha\beta}u_\beta ds_t. \tag{1.33}$$

С другой стороны, принимая во внимание (1.32), можно записать

$$J = \int_\Omega \overset{*}{\nabla}_\alpha(\sqrt{a}t^{\alpha\beta}u_\beta)d\alpha^1 d\alpha^2 =$$

$$= \int_\Omega u_\beta \overset{*}{\nabla}_\alpha(\sqrt{a}t^{\alpha\beta})d\alpha^1 d\alpha^2 + \int_\Omega t^{\alpha\beta}\overset{*}{\nabla}_\alpha u_\beta d\Omega. \tag{1.34}$$

Приравнивая правые части равенств (1.33) и (1.34) (см. (1.32)), придем к следующей формуле интегрирования по частям:

$$\int_\Omega t^{\alpha\beta}\overset{*}{\nabla}_\alpha u_\beta d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \nu_\alpha t^{\alpha\beta}u_\beta ds_t - \int_\Omega u_\beta \overset{*}{\nabla}_\alpha(\sqrt{a}t^{\alpha\beta})d\alpha^1 d\alpha^2. \tag{1.35}$$

1.4. Для описания изгиба жесткогибкой оболочки (изготовленной из жесткого сжимаемого материала и допускающей конечные перемещения за счет конечных поворотов при относительно малых деформациях) обычно используют стандартный материал второго порядка (STM-2). Закон упругости для STM-2 имеет вид [2]

$$\{\mathbf{F}^{-1} \cdot J\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{F}^{-1*}\} = 2\mu\boldsymbol{\Gamma} + \lambda I_\Gamma \mathbf{1} \tag{1.36}$$

($\{\mathbf{F}^{-1}\cdot J\boldsymbol{\Sigma}\cdot\mathbf{F}^{-1*}\}$ - тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа; $\mathbf{F}$ - тензор-градиент движения; $\boldsymbol{\Sigma}$ - тензор истинных напряжений Коши; J - якобиан преобразования от лагранжевых координат к эйлеровым; $\boldsymbol{\Gamma}$ - тензор деформации Грина-Лагранжа; I_Γ - первый главный инвариант тензора $\boldsymbol{\Gamma}$; $\mathbf{1}$ - единичный тензор; λ, μ - упругие константы Ламе) или в терминах компонент соответствующих тензоров

$$J\sigma^{ij} = (\lambda g^{ij}g^{\alpha\beta} + 2\mu g^{i\alpha}g^{j\beta})\gamma_{\alpha\beta} \tag{1.37}$$

(g^{ij} - контравариантные компоненты метрического тензора оболочки как трехмерного тела до деформации).

2. Вывод полевых уравнений

Предположим, что радиус-вектор

$$\mathbf{R}(\alpha^i,\xi) = \mathbf{r}(\alpha^i) + \xi\mathbf{n}(\alpha^i) \tag{2.1}$$

$$(\alpha^i \triangleq (\alpha^1,\alpha^2)\in\Omega,\ \xi\in[-h/2,h/2])$$

в результате деформации оболочки переходит в следующий (см. форм.(1.2), (1.3)):

$$\overset{*}{\mathbf{R}}(\alpha^i,\xi) = \overset{*}{\mathbf{r}}(\alpha^i) + \lambda_\xi(\alpha^i)(\xi + 0,5\xi^2\kappa_\xi(\alpha^i))\,\overset{*}{\mathbf{n}}(\alpha^i). \tag{2.2}$$

Преобразованию (2.1)-(2.2) отвечают следующие компоненты тензора деформаций Грина-Лагранжа:

$$\gamma^\xi_{ij} = \frac{1}{2}(\overset{*}{g}_{ij} - g_{ij}) = \gamma_{ij} + \xi\kappa_{ij},\ \gamma^\xi_{i3} = 0,$$

$$\gamma^\xi_{33} = \frac{1}{2}(\overset{*}{g}_{33} - g_{33}) = \frac{1}{2}(\lambda^2_\xi - 1) + \xi\lambda^2_\xi\kappa_\xi, \tag{2.3}$$

где

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\overset{*}{a}_{ij} - a_{ij}),\ \kappa_{ij} = -\lambda_\xi\overset{*}{b}_{ij} + b_{ij}. \tag{2.3$'$}$$

Принимая во внимание, что

$$g^{ij} = a^{ij} - \xi b^{ij} \approx a^{ij},\ g^{i3} = 0,\ g^{33} = 1,$$

соотношения упругости (1.37) можно представить в виде

$$J\sigma^{ij} = (\lambda a^{ij}a^{\alpha\beta} + 2\mu a^{i\alpha}a^{j\beta})\gamma^\xi_{\alpha\beta} + \lambda a^{ij}\gamma^\xi_{33},$$

$$J\sigma^{33} = \lambda a^{\alpha\beta}\gamma^\xi_{\alpha\beta} + (\lambda + 2\mu)\gamma^\xi_{33}. \tag{2.4}$$

Параметры λ_ξ, κ_ξ определяем из граничных условий

$$J\sigma^{33}(h/2) = q_n^+, \; J\sigma^{33}(-h/2) = q_n^-. \tag{2.5}$$

После несложных преобразований находим

$$\lambda_\xi^2 = 1 - \frac{2\lambda}{\lambda+2\mu}a^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta} + \frac{2m_n}{(\lambda+2\mu)h},$$

$$\lambda_\xi^2\kappa_\xi = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}a^{\alpha\beta}\kappa_{\alpha\beta} + \frac{q_n}{(\lambda+2\mu)h}, \tag{2.6}$$

где

$$q_n = q_n^+ - q_n^-, \; m_n = \frac{1}{2}(q_n^+ + q_n^-)h. \tag{2.6$'$}$$

Исключив λ_ξ, κ_ξ из уравнений $(2.3)_3$, $(2.4)_2$ с использованием формул (2.6), получим

$$\gamma_{33}^\xi = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}a^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}^\xi + \frac{m_n+\xi q_n}{(\lambda+2\mu)h},$$

$$J\sigma^{33} = \frac{1}{h}(m_n + \xi q_n). \tag{2.7}$$

Усилия и моменты вводим следующими формулами:

$$S^{ij} = \int_{-h/2}^{h/2}(J\sigma^{ij} - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}a^{ij}J\sigma^{33})d\xi,$$

$$M^{ij} = \lambda_\xi\int_{-h/2}^{h/2}(J\sigma^{ij} - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}a^{ij}J\sigma^{33})\xi d\xi. \tag{2.8}$$

По найденым усилиям и моментам напряжения у лицевых поверхностей оболочки вычисляются по формулам (принято, что $\lambda_\xi \approx 1$)

$$J\sigma_{ij}^+ = \frac{S_{<ij>}}{h} + \frac{6M_{<ij>}}{h^2} + \frac{\nu}{1-\nu}a^{ij}\sqrt{a_{ii}a_{jj}}q_n^+,$$

$$J\sigma_{ij}^- = \frac{S_{<ij>}}{h} - \frac{6M_{<ij>}}{h^2} + \frac{\nu}{1-\nu}a^{ij}\sqrt{a_{ii}a_{jj}}q_n^-. \tag{2.9}$$

На основании (2.4), (2.7) и (2.8) получаем

$$S^{ij} = BA^{ij,\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}, \; M^{ij} = \lambda_\xi DA^{ij,\alpha\beta}\kappa_{\alpha\beta}, \tag{2.10}$$

где

$$A^{ij,\alpha\beta} = (1-\nu)a^{i\alpha}a^{j\beta} + \nu a^{ij}a^{\alpha\beta},$$

$$B = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \ D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \tag{2.10'}$$

Принимая для упрощения записи, что нагрузка на боковой поверхности оболочки отсутствует, вариационное уравнение Лагранжа можно записать в виде

$$\delta U - A(\delta \overset{*}{\mathbf{R}}) = 0, \tag{2.11}$$

где

$$\delta U = \int_\Omega \int_{-h/2}^{h/2} \delta \Phi d\xi d\Omega, \ A(\delta \overset{*}{\mathbf{R}}) = \int_{\overset{*}{\Omega}} (\mathbf{q}^+ \cdot \delta \overset{*}{\mathbf{R}}{}^+ - \mathbf{q}^- \cdot \overset{*}{\mathbf{R}}{}^-) d\overset{*}{\Omega},$$

$$\delta\Phi = \{\mathbf{F}^{-1} \cdot J\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{F}^{-1*}\} : \delta\boldsymbol{\Gamma} = J\sigma^{\alpha\beta}\delta\gamma^\xi_{\alpha\beta} + J\sigma^{33}\delta\gamma^\xi_{33}. \tag{2.11'}$$

На основании формул (2.3), (2.7) и (2.8) получаем

$$\delta U = \int_\Omega (S^{\alpha\beta}\delta\gamma_{\alpha\beta} + \lambda_\xi^{-1} M^{\alpha\beta}\delta\kappa_{\alpha\beta}) d\Omega. \tag{2.12}$$

Преобразуем интеграл (2.12). Прежде всего в силу симметричности S^{ij} имеем

$$S^{\alpha\beta}\delta\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} S^{\alpha\beta}(\overset{*}{\mathbf{r}}_\alpha \cdot \delta\overset{*}{\mathbf{r}}_\beta + \overset{*}{\mathbf{r}}_\beta \cdot \delta\overset{*}{\mathbf{r}}_\alpha) = S^{\alpha\beta}\overset{*}{\mathbf{r}}_\alpha \cdot \delta\overset{*}{\mathbf{r}}_\beta. \tag{2.13}$$

Далее с учетом (2.6) находим

$$\delta\kappa_{\alpha\beta} = -\lambda_\xi \delta\overset{*}{b}_{\alpha\beta} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\overset{*}{b}_{\alpha\beta} a^{\nu\mu}\overset{*}{\mathbf{r}}_\nu \cdot \delta\overset{*}{\mathbf{r}}_\mu. \tag{2.14}$$

Используя формулы (1.4), можно записать

$$\overset{*}{\nabla}_\alpha \delta\overset{*}{\mathbf{r}}_\beta = \delta(\partial_\alpha \overset{*}{\mathbf{r}}_\beta) - \overset{*}{\Gamma}{}^\nu_{\alpha\beta}\delta\overset{*}{\mathbf{r}}_\nu =$$

$$= \delta(\overset{*}{\Gamma}{}^\nu_{\alpha\beta}\overset{*}{\mathbf{r}}_\nu) + \delta(\overset{*}{b}_{\alpha\beta}\overset{*}{\mathbf{n}}) - \overset{*}{\Gamma}{}^\nu_{\alpha\beta}\delta\overset{*}{\mathbf{r}}_\nu = \delta(\overset{*}{b}_{\alpha\beta}\overset{*}{\mathbf{n}}) + \overset{*}{\mathbf{r}}_\nu \delta\overset{*}{\Gamma}{}^\nu_{\alpha\beta}. \tag{2.15}$$

На основании (2.15) и (1.4) получаем

$$\overset{*}{\nabla}_\alpha(\overset{*}{\mathbf{n}} \cdot \delta\overset{*}{\mathbf{r}}_\beta) = \overset{*}{\nabla}_\alpha \overset{*}{\mathbf{n}} \cdot \delta\overset{*}{\mathbf{r}}_\beta + \overset{*}{\mathbf{n}} \cdot \overset{*}{\nabla}_\alpha \delta\overset{*}{\mathbf{r}}_\beta = -\overset{*}{b}{}^\nu_\alpha \overset{*}{\mathbf{r}}_\nu \cdot \delta\overset{*}{\mathbf{r}}_\beta + \delta\overset{*}{b}_{\alpha\beta}. \tag{2.16}$$

Объединив формулы (2.14) и (2.16), будем иметь

$$\delta\kappa_{\alpha\beta} = -\lambda_\xi \overset{*}{\nabla}_\alpha(\overset{*}{\mathbf{n}} \cdot \delta\overset{*}{\mathbf{r}}_\beta) - \lambda_\xi \overset{*}{b}{}^\nu_\alpha \overset{*}{\mathbf{r}}_\nu \cdot \delta\overset{*}{\mathbf{r}}_\beta + \frac{\nu}{1-\nu}\overset{*}{b}_{\alpha\beta} a^{\nu\mu}\overset{*}{\mathbf{r}}_\nu \cdot \delta\overset{*}{\mathbf{r}}_\mu. \tag{2.17}$$

Интеграл (2.12) с учетом этой формулы приводится к виду

$$\delta U = \int_{\Omega} [T^{\alpha\beta} \overset{*}{\mathbf{r}}_{\alpha} \cdot \delta \overset{*}{\mathbf{r}}_{\beta} - M^{\alpha\beta} \overset{*}{\nabla}_{\alpha} (\overset{*}{\mathbf{n}} \cdot \delta \overset{*}{\mathbf{r}}_{\beta})] d\Omega, \qquad (2.18)$$

где

$$T^{ij} = S^{ij} - \overset{*}{b}{}^{i}_{\alpha} M^{\alpha j} + \frac{\nu}{1-\nu} \overset{*}{b}_{\nu\mu} M^{\nu\mu} a^{ij}. \qquad (2.18')$$

С использованием формулы интегрирования по частям (1.35) получаем

$$- \int_{\Omega} M^{\alpha\beta} \overset{*}{\nabla}_{\alpha} (\overset{*}{\mathbf{n}} \cdot \delta \overset{*}{\mathbf{r}}_{\beta}) d\Omega =$$

$$= \int_{\Omega} \overset{*}{\nabla}_{\alpha} (\sqrt{a} M^{\alpha\beta}) \overset{*}{\mathbf{n}} \cdot \delta \overset{*}{\mathbf{r}}_{\beta} d\alpha^1 d\alpha^2 + J_1, \qquad (2.19)$$

где

$$J_1 = - \oint_{\partial\Omega} \nu_{\alpha} M^{\alpha\beta} \overset{*}{\mathbf{n}} \cdot \partial_{\beta} (\delta \overset{*}{\mathbf{r}}) ds_t. \qquad (2.19')$$

На основании (2.19) интеграл (2.18) можно представить так:

$$\delta U = \int_{\Omega} [T^{\beta\alpha} \overset{*}{\mathbf{r}}_{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{a}} \overset{*}{\nabla}_{\alpha} (\sqrt{a} M^{\alpha\beta}) \overset{*}{\mathbf{n}}] \cdot \delta \overset{*}{\mathbf{r}}_{\beta} d\Omega + J_1. \qquad (2.20)$$

Выполнив в (2.20) интегрирование по частям, будем иметь

$$\delta U = - \int_{\Omega} \partial_{\beta} [\sqrt{a} T^{\beta\alpha} \overset{*}{\mathbf{r}}_{\alpha} + \overset{*}{\nabla}_{\alpha} (\sqrt{a} M^{\alpha\beta}) \overset{*}{\mathbf{n}}] \cdot \delta \overset{*}{\mathbf{r}} d\alpha^1 d\alpha^2 +$$

$$+ J_1 + J_2 + J_3. \qquad (2.21)$$

Здесь

$$J_2 = \oint_{\partial\Omega} \nu_{\beta} T^{\beta\alpha} \overset{*}{\mathbf{r}}_{\alpha} \cdot \delta \overset{*}{\mathbf{r}} ds_t,$$

$$J_3 = \oint_{\partial\Omega} \frac{\nu_{\beta}}{\sqrt{a}} \overset{*}{\nabla}_{\alpha} (\sqrt{a} M^{\alpha\beta}) \overset{*}{\mathbf{n}} \cdot \delta \overset{*}{\mathbf{r}} ds_t. \qquad (2.22)$$

Преобразуем далее выражение для работы внешних сил. На основании (2.2) и (2.6′) получаем

$$\mathbf{q}^{+} \cdot \delta \overset{*}{\mathbf{R}}{}^{+} - \mathbf{q}^{-} \cdot \delta \overset{*}{\mathbf{R}}{}^{-} = \mathbf{q} \cdot \delta \overset{*}{\mathbf{r}} + \frac{1}{8} h^2 q_n \delta (\lambda_{\xi} \kappa_{\xi}) +$$

$$+ m_n \delta \lambda_{\xi} + \lambda_{\xi} \mathbf{m} \cdot \delta \overset{*}{\mathbf{n}} + \frac{1}{8} h^2 \lambda_{\xi} \kappa_{\xi} \mathbf{q} \cdot \delta \overset{*}{\mathbf{n}}. \qquad (2.23)$$

Элементарный анализ показывает, что подчеркнутыми в (2.23) слагаемыми можно пренебречь. На основании (2.6) и (2.17) приходим к следующей приближенной формуле:

$$\delta(\lambda_\xi \kappa_\xi) \approx \frac{\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} \overset{*}{\nabla}_\alpha (\overset{*}{\mathbf{n}} \cdot \delta \overset{*}{\mathbf{r}}_\beta). \tag{2.24}$$

Окончательно работу внешних сил на вариациях отвечающих им смещений с использованием формул интегрирования по частям (1.29), (1.35) можно представить в виде

$$-A(\delta \overset{*}{\mathbf{R}}) = -\int_\Omega \{\sqrt{\overset{*}{a}}\mathbf{q} + k^2 \partial_\beta [\overset{*}{\nabla}_\alpha (q_n \sqrt{\overset{*}{a}} a^{\alpha\beta}) \overset{*}{\mathbf{n}}]\} \cdot \delta \overset{*}{\mathbf{r}} d\alpha^1 d\alpha^2 + J_4 + J_5, \tag{2.25}$$

где

$$J_4 = k^2 \oint_{\partial\Omega} \nu_\beta \mathcal{A}^{-1} \overset{*}{\nabla}_\alpha (q_n a^{\alpha\beta}) \overset{*}{\mathbf{n}} \cdot \delta \overset{*}{\mathbf{r}} ds_t,$$

$$J_5 = -k^2 \oint_{\partial\Omega} \nu_\alpha a^{\alpha\beta} \mathcal{A}^{-1} q_n \overset{*}{\mathbf{n}} \cdot \partial_\beta (\delta \overset{*}{\mathbf{r}}) ds_t,$$

$$k^2 = \frac{\nu h^2}{8(1-\nu)} (\text{см.}[6]). \tag{2.25$'$}$$

Подставляя теперь δU из (2.21) и $A(\delta \overset{*}{\mathbf{R}})$ из (2.25) в уравнение (2.11) и приравнивая в интеграле по области Ω в скалярном произведении $(\ldots) \cdot \delta \mathbf{r}$ множитель $(\ldots)$ к нулю, придем к следующему уравнению равновесия:

$$\partial_\beta [\sqrt{a} T^{\beta\alpha} \overset{*}{\mathbf{r}}_\alpha + \overset{*}{\nabla}_\alpha (\sqrt{a} M^{\alpha\beta}) \overset{*}{\mathbf{n}}] + \sqrt{\overset{*}{a}} \mathbf{q} +$$
$$+ k^2 \partial_\beta [\overset{*}{\nabla}_\alpha (q_n \sqrt{\overset{*}{a}} a^{\alpha\beta}) \overset{*}{\mathbf{n}}] = \mathbf{0}. \tag{2.26}$$

Выполнив в (2.26) дифференцирование с использованием формул (1.4) и умножив полученное уравнение последовательно на $\overset{*}{\mathbf{r}}{}^j$ и $\overset{*}{\mathbf{n}}$, будем иметь

$$\partial_\beta (\sqrt{a} T^{\beta j}) + \sqrt{a} T^{\beta\alpha} \overset{*}{\Gamma}{}^j_{\alpha\beta} - \overset{*}{\nabla}_\alpha (\sqrt{a} M^{\alpha\beta}) \overset{*}{b}{}^j_\beta + \sqrt{\overset{*}{a}} q^j -$$
$$\underline{- k^2 \sqrt{\overset{*}{a}} \overset{*}{\nabla}_\alpha (q_n a^{\alpha\beta}) b^j_\beta} = 0, \ j = 1, 2;$$

$$\partial_\beta \overset{*}{\nabla}_\alpha (\sqrt{a} M^{\alpha\beta}) + \sqrt{a} T^{\beta\alpha} \overset{*}{b}_{\alpha\beta} + \sqrt{\overset{*}{a}} q_n +$$
$$+ k^2 \partial_\beta [\sqrt{\overset{*}{a}} \overset{*}{\nabla}_\alpha (q_n a^{\alpha\beta})] = 0. \tag{2.27}$$

Уравнениям (2.27) можно придать несколько иной вид. Сумму первых двух членов уравнения $(2.27)_1$ с учетом известной формулы (см., например, [2,4])

$$\nabla_\alpha(\sqrt{a}t^{\alpha i}) = \partial_\alpha(\sqrt{a}t^{\alpha i}) + \sqrt{a}\Gamma^i_{\alpha\beta}t^{\alpha\beta}$$

можно представить так:

$$\partial_\beta(\sqrt{\overset{*}{a}}\mathcal{A}T^{\beta j}) + \sqrt{\overset{*}{a}}\overset{*}{\Gamma}{}^j_{\alpha\beta}(\mathcal{A}T^{\beta\alpha}) =$$

$$= \overset{*}{\nabla}_\beta(\sqrt{\overset{*}{a}}\mathcal{A}T^{\beta j}) = \overset{*}{\nabla}_\beta(\sqrt{a}T^{\beta j}).$$

Аналогично на основании формулы (1.30) получаем

$$\partial_\beta(\sqrt{\overset{*}{a}}\overset{*}{\nabla}_\alpha(\mathcal{A}M^{\alpha\beta})) = \overset{*}{\nabla}_\beta(\sqrt{\overset{*}{a}}\overset{*}{\nabla}_\alpha(\mathcal{A}M^{\alpha\beta})) = \overset{*}{\nabla}_\alpha\overset{*}{\nabla}_\beta(\sqrt{a}M^{\alpha\beta}).$$

Окончательно систему полевых уравнений равновесия можно записать в виде

$$\overset{*}{\nabla}_\alpha(\sqrt{a}T^{\alpha j}) - \overset{*}{b}{}^j_\beta\overset{*}{\nabla}_\alpha(\sqrt{a}M^{\alpha\beta}) + \sqrt{\overset{*}{a}}q^j = 0,\ j = 1,2,$$

$$\overset{*}{\nabla}_\alpha\overset{*}{\nabla}_\beta(\sqrt{a}M^{\alpha\beta}) + \sqrt{a}T^{\beta\alpha}\overset{*}{b}_{\alpha\beta} + \sqrt{\overset{*}{a}}q_n +$$

$$+k^2\partial_\beta[\sqrt{\overset{*}{a}}\overset{*}{\nabla}_\alpha(q_n a^{\alpha\beta})] = 0. \tag{2.28}$$

Заметим, что в случае плоской пластины уравнения (2.28) при отсутствии тангенциальной поверхностной нагрузки совпадают с уравнениями $(1.23)_1$, $(1.23)_2$ [6], в чем нетрудно убедиться, если положить в (2.28)

$$\sqrt{\overset{*}{a}} = \sqrt{a} = 1,\ \overset{*}{\Gamma}{}^k_{ij} = 0,\ \overset{*}{\nabla}_\alpha = \nabla_\alpha = \partial_\alpha,$$

$$\overset{*}{b}_{ij} = w_{,ij},\ a^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta},\ q^j = 0$$

и отбросить среднее слагаемое в уравнении $(2.28)_1$.

3. К формулировке граничных уравнений

На основании соотношений (1.2), (1.5), (1.21) имеем

$$\overset{*}{\mathbf{r}}_i = (\nu_i + \varepsilon_{i\alpha}\nu^\alpha)\boldsymbol{\nu} + (t_i + \varepsilon_{i\alpha}t^\alpha)\mathbf{t} - \vartheta_i\mathbf{n},$$

$$\delta\overset{*}{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\nu}\delta u_\nu + \mathbf{t}\delta u_t + \mathbf{n}\delta w, \tag{3.1}$$

где

$$u_\nu = u^\alpha\nu_\alpha = u_{<1>}\cos\gamma + u_{<2>}\sin\gamma,$$

$$u_t = u^\alpha t_\alpha = -u_{<1>} \sin\gamma + u_{<2>} \cos\gamma. \qquad (3.1')$$

Криволинейный интеграл $(2.22)_1$ с учетом формул (3.1) можно представить так:

$$J_2 = \oint_{\partial\Omega} (Q'_{\nu\nu}\delta u_\nu + Q'_{\nu t}\delta u_t - T^{\alpha\beta}\nu_\alpha \vartheta_\beta \delta w) ds_t. \qquad (3.2)$$

Здесь

$$Q'_{\nu\nu} = T_{\nu\nu} + T^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma}\nu_\alpha \nu^\gamma, \ T_{\nu\nu} = T^{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta,$$

$$Q'_{\nu t} = T_{\nu t} + T^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma}\nu_\alpha t^\gamma, \ T_{\nu t} = T^{\alpha\beta}\nu_\alpha t_\beta,$$

$$T^{\alpha\beta}\nu_\alpha\vartheta_\beta = T^{\alpha\beta}\nu_\alpha(\nu_\beta\vartheta_\nu + t_\beta\vartheta_t) = T_{\nu\nu}\vartheta_\nu + T_{\nu t}\vartheta_t,$$

$$\vartheta_\nu = \vartheta_\alpha\nu^\alpha = \vartheta_{<1>}\cos\gamma + \vartheta_{<2>}\sin\gamma = -\frac{dw}{ds_\nu} - \sigma_\nu u_\nu + \tau_\nu u_t;$$

$$\vartheta_t = \vartheta_\alpha t^\alpha = -\vartheta_{<1>}\sin\gamma + \vartheta_{<2>}\cos\gamma = -\frac{dw}{ds_t} - \sigma_t u_t + \tau_t u_\nu. \qquad (3.2')$$

Формулу $(1.8)_2$ можно представить в виде

$$\overset{*}{\mathbf{n}} = \mathcal{A}[(1+\widetilde{\varepsilon})\mathbf{n} + \widetilde{\vartheta}_\nu \boldsymbol{\nu} + \widetilde{\vartheta}_t \mathbf{t}], \qquad (3.3)$$

где использованы обозначения (см. (1.8′))

$$\widetilde{\vartheta}_\nu = \vartheta_\nu + \tau_{<12>}\cos\gamma + \tau_{<21>}\sin\gamma,$$

$$\widetilde{\vartheta}_t = \vartheta_t - \tau_{<12>}\sin\gamma + \tau_{<21>}\cos\gamma. \qquad (3.3')$$

Принимая во внимание (3.1) и (3.3), находим (см. (2.22))

$$J_2 + J_3 = \oint_{\partial\Omega} (Q''_{\nu\nu}\delta u_\nu + Q''_{\nu t}\delta u_t + T_{\nu n}\delta w) ds_t, \qquad (3.4)$$

где

$$Q''_{\nu\nu} = Q'_{\nu\nu} + \overset{*}{\nabla}_\alpha(\mathcal{A}M^{\alpha\beta})\nu_\beta\widetilde{\vartheta}_\nu,$$

$$Q''_{\nu t} = Q'_{\nu t} + \overset{*}{\nabla}_\alpha(\mathcal{A}M^{\alpha\beta})\nu_\beta\widetilde{\vartheta}_t,$$

$$T_{\nu n} = \overset{*}{\nabla}_\alpha(\mathcal{A}M^{\alpha\beta})\nu_\beta(1+\widetilde{\varepsilon}) - T_{\nu\nu}\vartheta_\nu - T_{\nu t}\vartheta_t. \qquad (3.5)$$

Используя формулы (см. (1.22))

$$\frac{\partial}{\partial\alpha^i} = \nu_i\frac{d}{ds_\nu} + t_i\frac{d}{ds_t}, \ i = 1, 2, \qquad (3.6)$$

криволинейный интеграл (2.19′) можно представить так:

$$J_1 = J_{11} + J_{12}, \tag{3.7}$$

где

$$J_{11} = -\oint_{\partial\Omega} M_{\nu t}\overset{*}{\mathbf{n}} \cdot \frac{d\delta\overset{*}{\mathbf{r}}}{ds_t} ds_t, \ M_{\nu t} = M^{\alpha\beta}\nu_\alpha t_\beta,$$

$$J_{12} = -\oint_{\partial\Omega} M_{\nu\nu}\overset{*}{\mathbf{n}} \cdot \frac{d\delta\overset{*}{\mathbf{r}}}{ds_\nu} ds_t, \ M_{\nu\nu} = M^{\alpha\beta}\nu_\alpha \nu_\beta. \tag{3.7′}$$

Предполагая, что контур $\partial\Omega$ не имеет угловых точек, получаем с использованием интегрирования по частям

$$J_{11} = J_{111} + J_{112},$$

$$J_{111} = \oint_{\partial\Omega} \frac{dM_{\nu t}}{ds_t}\overset{*}{\mathbf{n}} \cdot \delta\overset{*}{\mathbf{r}} ds_t, \ J_{112} = \oint_{\partial\Omega} M_{\nu t}\frac{d\overset{*}{\mathbf{n}}}{ds_t} \cdot \delta\overset{*}{\mathbf{r}} ds_t. \tag{3.8}$$

Принимая во внимание формулы (3.1) и (3.3), можно записать

$$J_{111} = \oint_{\partial\Omega} \mathcal{A}\frac{dM_{\nu t}}{ds_t}[\widetilde{\vartheta}_\nu \delta u_\nu + \widetilde{\vartheta}_t \delta u_t + (1+\widetilde{\varepsilon})\delta w] ds_t. \tag{3.9}$$

Аналогично, интегралу J_4 из (2.25′) можно придать вид

$$J_4 = k^2 \oint_{\partial\Omega} \nu_\beta \nabla_\alpha (q_n a^{\alpha\beta})[\widetilde{\vartheta}_\nu \delta u_\nu + \widetilde{\vartheta}_t \delta u_t + (1+\widetilde{\varepsilon})\delta w] ds_t. \tag{3.10}$$

С точностью, принятой при вычислении $\delta(\lambda_\xi \kappa_\xi)$ (см. (2.24)), с учетом (1.21), (1.22) можно использовать приближенные равенства

$$\overset{*}{\nabla}_\gamma (q_n a^{\gamma\beta})\nu_\beta \approx \nabla_\gamma (q_n a^{\gamma\beta})\nu_\beta = \frac{dq_n}{ds_\nu},$$

$$J_4 = k^2 \oint_{\partial\Omega} \frac{dq_n}{ds_\nu} \delta w ds_t. \tag{3.11}$$

Далее, используя формулы (1.17) применительно к исходной конфигурации, контурный интеграл J_{112} можно преобразовать к следующему виду:

$$J_{112} = \oint_{\partial\Omega} M_{\nu t}[(\widetilde{\kappa}_{t\nu} + \mathcal{A}(1+\widetilde{\varepsilon})\tau_t)\delta u_\nu + (\widetilde{\kappa}_{tt} - \mathcal{A}(1+\widetilde{\varepsilon})\sigma_t)\delta u_t +$$

$$+(\sigma_t\widetilde{\vartheta}_t - \tau_t\widetilde{\vartheta}_\nu + \frac{d\mathcal{A}(1+\widetilde{\varepsilon})}{ds_t})\delta w]ds_t. \tag{3.12}$$

Здесь использованы обозначения

$$\widetilde{\kappa}_{t\nu} = \frac{d\mathcal{A}\widetilde{\vartheta}_\nu}{ds_t} - \rho_t\mathcal{A}\widetilde{\vartheta}_t, \ \widetilde{\kappa}_{tt} = \frac{d\mathcal{A}\widetilde{\vartheta}_t}{ds_t} + \rho_t\mathcal{A}\widetilde{\vartheta}_\nu. \tag{3.12$'$}$$

Собирая воедино интегралы (3.4), (3.9), (3.11), (3.12), получим

$$J_{11} + J_2 + J_3 + J_4 = \oint_{\partial\Omega} [Q_{\nu\nu}\delta u_\nu + Q_{\nu t}\delta u_t +$$

$$+(Q_{\nu n} + k^2\frac{dq_n}{ds_\nu})\delta w]ds_t. \tag{3.13}$$

Здесь

$$Q_{\nu\nu} = T_{\nu\nu} + M_{\nu t}(\mathcal{A}(1+\widetilde{\varepsilon})\tau_t + \widetilde{\kappa}_{t\nu}) +$$

$$+T^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma}\nu_\alpha\nu^\gamma + \overset{*}{\nabla}_\alpha(\mathcal{A}M^{\alpha\beta})\nu_\beta\widetilde{\vartheta}_\nu + \mathcal{A}\frac{dM_{\nu t}}{ds_t}\widetilde{\vartheta}_\nu,$$

$$Q_{\nu t} = T_{\nu t} - M_{\nu t}(\mathcal{A}(1+\widetilde{\varepsilon})\sigma_t - \widetilde{\kappa}_{tt}) +$$

$$+T^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma}\nu_\alpha t^\gamma + \overset{*}{\nabla}_\alpha(\mathcal{A}M^{\alpha\beta})\nu_\beta\widetilde{\vartheta}_t + \mathcal{A}\frac{dM_{\nu t}}{ds_t}\widetilde{\vartheta}_t,$$

$$Q_{\nu n} = \overset{*}{\nabla}_\alpha(\mathcal{A}M^{\alpha\beta})\nu_\beta(1+\widetilde{\varepsilon}) + \mathcal{A}\frac{dM_{\nu t}}{ds_t}(1+\widetilde{\varepsilon}) -$$

$$-T_{\nu\nu}\vartheta_\nu - T_{\nu t}\vartheta_t + M_{\nu t}(\sigma_t\widetilde{\vartheta}_t - \tau_t\widetilde{\vartheta}_\nu + \frac{d(\mathcal{A}(1+\widetilde{\varepsilon}))}{ds_t}). \tag{3.13$'$}$$

Рассмотрим, наконец, интегралы J_{12} и J_5. Второй из названных интегралов (см. (2.25′)) с использованием формулы (3.6) можно преобразовать к следующему виду:

$$J_5 = -k^2\oint_{\partial\Omega} \mathcal{A}^{-1}q_n\overset{*}{\mathbf{n}} \cdot \frac{d\delta\overset{*}{\mathbf{r}}}{ds_\nu}ds_t.$$

(Здесь учтено, что $a^{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta = 1, \ a^{\alpha\beta}\nu_\alpha t_\beta = 0$.)

Объединив J_5 и J_{12} (см. (3.7′)), получим

$$J_{12} + J_5 = -\oint_{\partial\Omega} (M_{\nu\nu} + k^2 \mathcal{A}^{-1} q_n)\overset{*}{\mathbf{n}} \cdot \frac{d\delta\overset{*}{\mathbf{r}}}{ds_\nu} ds_t. \tag{3.14}$$

С учетом формул (3.1), (1.20) применительно к исходной конфигурации интеграл (3.14) приводится к виду

$$J_{12} + J_5 = \oint_{\partial\Omega} (\mathcal{A}M_{\nu\nu} + k^2 q_n)[(1+\widetilde{\varepsilon})\delta\vartheta_\nu -$$

$$-\widetilde{\vartheta}_\nu \delta\varepsilon_{\nu\nu} - \widetilde{\vartheta}_t \delta\omega_{\nu\nu}]ds_t, \tag{3.15}$$

где (см. [3], с.288, форм.(6.41))

$$\varepsilon_{\nu\nu} = \frac{du_\nu}{ds_\nu} + \rho_\nu u_t - \sigma_\nu w,$$

$$\omega_{\nu\nu} = -\frac{du_t}{ds_\nu} + \rho_\nu u_\nu - \tau_\nu w. \tag{3.15′}$$

Из (3.15) видно, что обобщенному усилию $\mathcal{A}M_{\nu\nu} + k^2 q_n$ в нелинейной теории оболочек, вообще говоря, нельзя сопоставить обобщенное смещение (так, чтобы в квадратных скобках (3.15) стояла вариация какой-либо геометрической величины). На граничном контуре срединной поверхности оболочки в нелинейной теории независимыми являются 6 геометрических параметров u_ν, u_t, w, $\partial u_\nu/\partial s_\nu$, $\partial u_t/\partial s_\nu$, $\partial w/\partial s_\nu$, что, как известно, не согласуется с порядком разрешающей системы уравнений в смещениях, основанных на принципиальной гипотезе Кирхгофа об отсутствии трансверсальных сдвигов. Вместе с тем, основные виды граничных условий, соответствующие реальному закреплению элементов конструкций, обеспечивают выполнение граничного вариационного уравнения (см. (3.13), (3.15))

$$J_{11} + J_{12} + \sum_{k=2}^{5} J_k = 0. \tag{3.16}$$

Действительно, в случае незакрепленного края граничные условия

$$Q_{\nu\nu} = Q_{\nu t} = Q_{\nu n} + k^2 \frac{\partial q_n}{\partial s_\nu} = 0, \; M_{\nu\nu} + \mathcal{A}^{-1} k^2 q_n = 0$$

очевидно удовлетворяют уравнению (3.16).

Рассмотрим условия, соответствующие в линейной теории случаю жестко защемленного края

$$u_\nu = u_t = w = 0, \ \vartheta_\nu = 0.$$

Из (3.2′) следует, что $\vartheta_t = 0$. Но тогда $\vartheta_{<1>} = \vartheta_{<2>} = 0$ (см. (3.2′)) и поэтому $\widetilde{\vartheta}_\nu = \widetilde{\vartheta}_t = 0$ (см. (1.8′), (3.3′)), что означает выполнение уравнения (3.16) (см. форм.(3.15)).

Нетрудно убедиться также в том, что уравнению (3.16) удовлетворяют граничные условия шарнирно опертого подвижного

$$Q_{\nu\nu} = Q_{\nu t} = 0, \ w = 0, \ M_{\nu\nu} + \mathcal{A}^{-1}k^2 q_n = 0$$

и неподвижного

$$u_\nu = u_t = 0, \ w = 0, \ M_{\nu\nu} + \mathcal{A}^{-1}k^2 q_n = 0$$

краев.

Однако используемые иногда в линейной механике оболочек граничные условия жестко защемленного тангенциально подвижного края (см., например, [7])

$$Q_{\nu\nu} = Q_{\nu t} = 0, \ w = 0, \ \vartheta_\nu = 0,$$

вообще говоря, не обеспечивают выполнение уравнения (3.16), так как в этом случае (см. (3.2′))

$$\vartheta_t = -\sigma_t u_t + \tau_t u_\nu \neq 0.$$

С учетом сказанного в качестве рабочего варианта граничных величин можно принять следующие пары "обобщенная сила $\longleftrightarrow$ обобщенное смещение"

$$T_{\nu\nu} + \tau_t M_{\nu t} \longleftrightarrow u_\nu, \ T_{\nu t} - \sigma_t M_{\nu t} \longleftrightarrow u_t, \ M_{\nu\nu} + k^2 q_n \longleftrightarrow \vartheta_\nu,$$

$$\nabla_\alpha M^{\alpha\beta}\nu_\beta + \frac{dM_{\nu t}}{ds_t} - T_{\nu\nu}\vartheta_\nu - T_{\nu t}\vartheta_t + k^2\frac{dq_n}{ds_\nu} \longleftrightarrow w \qquad (3.17)$$

Граничные величины (3.17) полностью совпадают при $\sigma_t = \tau_t = 0$ с выведенными в работе [6] (см. форм. $(1.41)_1$, (1.47)) для теории пластин типа Кармана, уточненной за счет трансверсального обжатия. Погрешность упрощений, связанных с использованием варианта граничных величин (3.17), может быть оценена a posteriori по решению, найденному на основе этих величин.

Литература

1. **Черных К.Ф.** Нелинейная теория изотропных упругих тонких оболочек//*Изв.АН СССР. МТТ. 1980. №3. С.148-159.*
2. **Черных К.Ф.** Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.:Машиностроение, 1986. 336с.
3. **Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И.** Линейная теория тонких оболочек. Л.:Политехника, 1991. 656с.
4. **Михайловский Е.И., Торопов А.В.** Математические модели теории упругости. Сыктывкар: Сыкт. ун-т, 1995. 251с. (ISBN 5-87237-079-2)
5. **Михайловский Е.И.** Граничные условия подкрепленного края жестко-гибкой оболочки в нелинейной теории типа Тимошенко-Рейсснера//*Изв.РАН. МТТ. 1995. №2. С.109-119.*
6. **Михайловский Е.И., Бадокин К.В., Ермоленко А.В.** Теория изгиба плоских пластин типа Ка́рмана без гипотез Кирхгофа//*Вестник Сыкт. ун-та. Сер.1. 1999. Вып.3. С. 181–202.*
7. **Ермоленко А.В., Михайловский Е.И.** Граничные условия для подкрепленного края в теории изгиба плоских пластин Ка́рмана//*Изв.РАН. МТТ. 1998. №3. С.73-85.*

Summary

Mikhailovskii E.I., Ermolenko A.V. Refinement of nonlinear quasi-Kirhhoffian K.Chernykh's theory of shells

Due to the variations of the parameters λ_ξ, κ_ξ which characterize the transverse squeezing, we deduce the equations for the statics of the shell which refine K.Chernykh's quasi-Kirchhoffian theory. The boundary values are reduced to the origin configuration of the shell. It is shown, that in the general case, there are 6 independent geometrical boundary values that does not agree with the order of the permitting system of the equations in displacement based on Kirchhoff's hypothesis on non-availability of transverse displacement.

Сыктывкарский университет

Поступила 14.09.98