

УДК 539.3

ТЕОРИЯ ИЗГИБА ПЛАСТИН ТИПА КАРМАНА
БЕЗ ГИПОТЕЗ КИРХГОФА

Е. И. Михайловский, К. В. Бадокин, А. В. Ермоленко

Основное допущение нелинейной квазикирхгофской теории оболочек К.Ф.Черныха [1-3] заключается в предположении, что образ радиус-вектора

$$\mathbf{R}(\alpha^i, \xi) = \mathbf{r}(\alpha^i) + \xi \mathbf{n}(\alpha^i) \quad (0.1)$$

$$(\alpha^i \triangleq (\alpha^1, \alpha^2) \in \Omega, \xi \in [-h/2, h/2])$$

после деформации адекватно описывается формулой

$$\mathbf{R}^*(\alpha^i, \xi) = \mathbf{r}^*(\alpha^i) + \lambda_\xi(\alpha^i) \left(\xi + \frac{1}{2} \xi^2 \kappa_\xi(\alpha^i) \right) \mathbf{n}^*(\alpha^i), \quad (0.2)$$

где \mathbf{n} , \mathbf{n}^* -единичные векторы нормалей соответственно к средней поверхности оболочки до деформации (*исходная конфигурация*) и после деформации (*актуальная конфигурация*);

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \mathbf{u}, \mathbf{u} = u_\alpha \mathbf{e}_\alpha + w \mathbf{n}. \quad (0.2')$$

(Здесь и ниже по встречающимся в одночлене дважды греческим индексам α, β следует суммировать от 1-го до 2-х, по латинскому k - от 1-го до 3-х.)

Для К.Ф.Черныха побудительным мотивом разработки квазикирхгофской теории оболочек было желание учесть изменение толщины при деформировании оболочек из несжимаемых резиноподобных материалов. Однако построенная им теория пригодна и для оболочек из жестких сжимаемых материалов, так как основана на использовании общего упругого потенциала, а не конкретных уравнений упругости.

Уточнение квазикирхгофовой теории К.Ф.Черныха за счет учета *малых* поперечных сдвигов для оболочек из жестких сжимаемых материалов предложено в работах [4,5]. При этом конфигурация (0.2) рассматривалась как промежуточная, на которую *линейно* накладывается деформация поперечного сдвига. Таким образом, актуальная конфигурация определяется формулой

$$\mathbf{R}^V(\alpha^i, \xi) = \mathbf{R}^*(\alpha^i, \xi) + \xi \omega^\beta(\alpha^i) \mathbf{r}_\beta(\alpha^i). \quad (0.3)$$

Нелинейный учет поперечных сдвигов выполнен К.Ф.Черным совместно с С.А.Кабрицем в работе [6], где вместо (0.2) принята формула

$$\mathbf{R}^*(\alpha^i, \xi) = \mathbf{r}^*(\alpha^i) + \lambda_\xi(\xi + \frac{1}{2}\xi^2\kappa_\xi) \mathbf{Q}\mathbf{n}. \quad (0.4)$$

Здесь \mathbf{Q} - ортогональный тензор второго порядка.

Во всех цитированных работах [1-6] принято допущение о неварьируемости параметров λ_ξ, κ_ξ , что, по существу, и позволило К.Ф.Черному получить соответствующие варианты уравнений механики оболочек из условий равновесия бесконечно малого элемента. Нелинейные уравнения, учитывающие малые поперечные сдвиги по линейной теории [4,5], получены с использованием вариационного принципа Лагранжа, но параметры λ_ξ, κ_ξ по-прежнему рассматривались как неэнергетические.

Анализ влияния уточнений линейной кирхгофовой теории изгиба плоских пластин за счет учета поперечных деформаций на решения контактных задач со свободной границей выявил целесообразность определить "цену" неварьируемости параметров λ_ξ, κ_ξ в общих уравнениях нелинейной механики оболочек, учитывающих поперечные деформации.

В данной статье решается соответствующая задача на базе теории изгиба плоских пластин Т.Кармана. Ее цель заключается в дифференцированной оценке уточнений, вносимых в названную теорию за счет учета поперечных сдвигов и поперечного обжатия при варьировании функций λ_ξ, κ_ξ и без такового.

1. Применительно к плоским пластинам принимаем допущение, что радиус-вектор точки недеформированной пластины

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \xi \mathbf{n}, \quad \mathbf{r} = x_\alpha \mathbf{e}_\alpha$$

в результате деформации переходит в следующий:

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{r} + \mathbf{u} + \lambda_\xi(\xi + \frac{1}{2}\xi^2\kappa_\xi) \mathbf{n}, \quad (1.1)$$

где

$$\bar{\mathbf{n}} = \mathbf{n} + \vartheta_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \vartheta_i = -w_{,i} + \omega_i, \quad i = 1, 2. \quad (1.1')$$

Вектор перемещения точки параллельного слоя $\xi = const$ определяется формулой

$$\mathbf{u}^\xi = \bar{\mathbf{R}} - \mathbf{R} = \mathbf{u} + [(\lambda_\xi - 1)\xi + \frac{1}{2}\xi^2 \lambda_\xi \kappa_\xi] \mathbf{n} + \lambda_\xi (\xi + \frac{1}{2}\xi^2 \kappa_\xi) \vartheta_\alpha \mathbf{e}_\alpha \quad (1.2)$$

или

$$u_i^\xi = u_i + \lambda_\xi \xi \vartheta_i + \frac{1}{2}\xi^2 \lambda_\xi \kappa_\xi \vartheta_i \approx u_i + \xi \vartheta_i, \quad i = 1, 2; \quad (1.3)_1$$

$$w^\xi = w + (\lambda_\xi - 1)\xi + \frac{1}{2}\xi^2 \lambda_\xi \kappa_\xi. \quad (1.3)_2$$

(Приближенное равенство (1.3)₁ можно рассматривать как исходное допущение, обычно принимаемое в теории Тимошенко-Рейсснера.)

Очевидно, что параметры λ_ξ , κ_ξ характеризуют поперечную деформацию. При этом первый из них λ_ξ определяет кратность изменения толщины. Действительно, принимая во внимание (1.1), имеем

$$\bar{h} = |\bar{\mathbf{R}}(h/2) - \mathbf{R}(-h/2)| = \lambda_\xi h. \quad (1.4)$$

Для описания деформации пластины используем тензор Грина-Лагранжа с компонентами

$$\gamma_{ij}^\xi = \frac{1}{2}(u_{i,j}^\xi + u_{j,i}^\xi + u_{k,i}^\xi u_{k,j}^\xi), \quad i, j \in 1 : 3$$

$$(u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j, \quad u_3 \equiv w, \quad x_3 \equiv \xi) \quad (1.5)$$

при следующих (дополнительных к уже принятым (1.3)) допущениях:

- i) поперечная деформация описывается линеаризованными формулами (1.5) (т.е. компонентами тензора деформации Коши);
- ii) в тангенциальных компонентах тензора Грина из квадратичных слагаемых учитываются лишь связанные с нормальными перемещениями w ;
- iii) слагаемыми, содержащими производные от функций $\lambda_\xi(\alpha^i)$, $\kappa_\xi(\alpha^i)$, можно пренебречь.

В соответствии с допущениями (1.3), i)-iii) находим (см. (1.1'))

$$\gamma_{i3}^{\xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^{\xi}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^{\xi}}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{2} (w_{,i} + \vartheta_i) = \frac{1}{2} \omega_i; \quad (1.6)_1$$

$$\gamma_{33}^{\xi} = \frac{\partial w^{\xi}}{\partial \xi} = \lambda_{\xi} - 1 + \xi \lambda_{\xi} \kappa_{\xi}; \quad (1.6)_2$$

$$\gamma_{ij}^{\xi} = \gamma_{ij} + \xi (\kappa_{ij} + \mu_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \quad (1.6)_3$$

где

$$\gamma_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{2} w_{,i} w_{,j}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}),$$

$$\kappa_{ij} = -w_{,ij}, \quad \mu_{ij} = \frac{1}{2} (\omega_{i,j} + \omega_{j,i}). \quad (1.6')$$

В качестве упругого потенциала применительно к жесткогибким оболочкам хорошо зарекомендовал себя потенциал стандартного материала второго порядка [3]. Компоненты тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа при использовании названного потенциала связаны с компонентами энергетически сопряженного тензора деформаций Грина-Лагранжа формулами (5.5.5) [4]. Эти формулы в случае пластины (когда допустимо использование прямоугольных декартовых координат) *совпадают по форме* с соотношениями закона Гука и имеют вид

$$\sigma_{ij}^{\xi} = 2\mu \gamma_{ij}^{\xi} + \lambda I_{\Gamma} \delta_{ij}, \quad (1.7)$$

где λ, μ - упругие константы Ламе; δ_{ij} - символы Кронекера; I_{Γ} - первый главный инвариант тензора деформаций Грина-Лагранжа: $I_{\Gamma} = \gamma_{\alpha\alpha}^{\xi}$. (Законом Гука называем лишь тот вид линейной связи между напряжениями и деформациями, при котором последние линейно зависят от смещений, т.е. $\gamma_{ij} \approx e_{ij}$.)

Впредь рассматриваем поперечный изгиб под действием нормальной нагрузки. Используя граничные условия на лицевых поверхностях пластины в виде

$$\sigma_{33}^{\xi}(h/2) = q_n^+, \quad \sigma_{33}^{\xi}(-h/2) = q_n^-, \quad (1.8)$$

на основании (1.6), (1.7) нетрудно получить следующие формулы для параметров, характеризующих поперечное обжатие:

$$\lambda_{\xi} = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \gamma_{\alpha\alpha} + \frac{m_n}{(\lambda + 2\mu)h},$$

$$\lambda_{\xi}\kappa_{\xi} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\kappa_{\alpha\alpha} + \mu_{\alpha\alpha}) + \frac{q_n}{(\lambda + 2\mu)h}, \quad (1.9)$$

где

$$q_n = q_n^+ - q_n^-, \quad m_n = \frac{1}{2}(q_n^+ + q_n^-)h. \quad (1.9')$$

С учетом формул (1.9) на основании (1.6)₂ получаем

$$\gamma_{33}^{\xi} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\gamma_{\alpha\alpha}^{\xi} + \frac{m_n + \xi q_n}{(\lambda + 2\mu)h}. \quad (1.10)$$

Далее, принимая во внимание эквивалентную равенствам (1.8), (1.9') формулу

$$\sigma_{33}^{\xi} = \frac{1}{h}(m_n + \xi q_n), \quad (1.11)$$

находим

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{\xi} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\sigma_{33}^{\xi} &= \frac{E}{1 - \nu^2}(\gamma_{11}^{\xi} + \nu\gamma_{22}^{\xi}), \\ \sigma_{22}^{\xi} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\sigma_{33}^{\xi} &= \frac{E}{1 - \nu^2}(\gamma_{22}^{\xi} + \nu\gamma_{11}^{\xi}), \quad \sigma_{12}^{\xi} = \frac{E}{1 + \nu}\gamma_{12}^{\xi}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где E, ν - модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Усилия и моменты вводим следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sigma_{ij}^{\xi} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\sigma_{33}^{\xi}\delta_{ij} \right) d\xi, \\ M_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sigma_{ij}^{\xi} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\sigma_{33}^{\xi}\delta_{ij} \right) \xi d\xi. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Отсюда с учетом (1.12), (1.6) находим

$$\begin{aligned} T_{11} &= B(\gamma_{11} + \nu\gamma_{22}), \quad T_{22} = (1 \rightleftharpoons 2)T_{11}, \\ T_{12} &= (1 - \nu)B\gamma_{12}, \quad B = Eh/(1 - \nu^2); \end{aligned} \quad (1.14)_1$$

$$\begin{aligned} M'_{11} &= -D(w_{,11} + \nu w_{,22}), \quad M'_{22} = (1 \rightleftharpoons 2)M'_{11}, \\ M'_{12} &= -(1 - \nu)Dw_{,12}, \quad D = Eh^3/12(1 - \nu^2); \end{aligned} \quad (1.14)_2$$

$$\begin{aligned} M''_{11} &= D(\omega_{1,1} + \nu\omega_{2,2}), \quad M''_{22} = (1 \rightleftharpoons 2)M''_{11}, \\ M''_{12} &= (1 - \nu)D\mu_{12}, \quad M_{ij} = M'_{ij} + M''_{ij}. \end{aligned} \quad (1.14)_3$$

По найденным усилиям и моментам напряжения у лицевых поверхностей пластины вычисляются по формулам ($i = 1, 2$)

$$\sigma_{ii}^{h/2} = \frac{T_{ii}}{h} + \frac{6M_{ii}}{h^2} + \frac{\nu}{1 - \nu}q_n^+, \quad \sigma_{ii}^{-h/2} = \frac{T_{ii}}{h} - \frac{6M_{ii}}{h^2} + \frac{\nu}{1 - \nu}q_n^-,$$

$$\sigma_{12}^{\pm h/2} = \frac{T_{12}}{h} \pm \frac{6M_{12}}{h^2}. \quad (1.15)$$

(Дополнительные слагаемые в формулах для нормальных напряжений могут оказаться существенными в контактных задачах в условиях взаимодействия с абсолютно жесткой преградой.)

Вариационное уравнение Лагранжа можно записать в виде

$$\begin{aligned} \delta U &\equiv \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{\alpha\beta}^{\xi} \delta\gamma_{\alpha\beta}^{\xi} + 2\sigma_{\alpha 3}^{\xi} \delta\gamma_{\alpha 3}^{\xi} + \sigma_{33}^{\xi} \delta\gamma_{33}^{\xi}) d\xi d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} [q_n^+ \delta w^{h/2} - q_n^- \delta w^{-h/2}] d\Omega \equiv A(\delta \mathbf{R}). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Здесь для упрощения записи использованы следующие допущения (см. также (1.8)):

(α) объемные силы отсутствуют;

(β) боковая поверхность пластины свободна от внешней нагрузки.

Принимая во внимание (1.10), (1.6) и (1.14), получаем

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} \left[(\sigma_{\alpha\beta}^{\xi} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{33}^{\xi} \delta_{\alpha\beta}) \delta\gamma_{\alpha\beta}^{\xi} + 2\sigma_{\alpha 3}^{\xi} \delta\gamma_{\alpha 3}^{\xi} \right] d\xi d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} (T_{\alpha\beta} \delta\gamma_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta} \delta\kappa_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta} \delta\mu_{\alpha\beta} + T_{\alpha n} \delta\omega_{\alpha}) d\Omega, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где

$$T_{in} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{i3}^{\xi} d\xi = \mu h \omega_i, \quad i = 1, 2. \quad (1.17')$$

Используя очевидные формулы

$$\begin{aligned} \delta\gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial \delta u_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial w}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial w}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \delta w}{\partial x_{\beta}} \right), \\ \delta\kappa_{\alpha\beta} &= -\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}}, \quad \delta\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta \omega_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial \delta \omega_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right), \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} T_{\alpha\beta} \delta\gamma_{\alpha\beta} d\Omega &= \int_{\Omega} T_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \delta u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial w}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \delta w}{\partial x_{\beta}} \right) d\Omega = \\ &= - \int_{\Omega} [T_{\alpha\beta, \beta} \delta u_{\alpha} + (T_{\alpha\beta w, \alpha})_{, \beta} \delta w] d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (T_{\alpha\beta \nu \beta} \delta u_{\alpha} + T_{\alpha\beta w, \alpha \nu \beta} \delta w) ds_t; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} M_{\alpha\beta} \delta \kappa_{\alpha\beta} d\Omega &= - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta, \beta} \delta w d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (M_{\alpha\beta, \beta} \nu_{\alpha} \delta w + M_{\alpha\beta} \nu_{\beta} \delta \vartheta_{\alpha}) ds_t; \\
\int_{\Omega} M_{\alpha\beta} \delta \mu_{\alpha\beta} d\Omega &= \int_{\Omega} M_{\alpha\beta} \frac{\partial \delta \omega_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} d\Omega = \\
&= - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta, \alpha} \delta \omega_{\beta} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} M_{\alpha\beta} \nu_{\beta} \delta \omega_{\alpha} ds_t. \quad (1.18)
\end{aligned}$$

Работа внешних сил на вариациях отвечающих им смещений определяется формулой

$$A(\delta \mathbf{R}) = \int_{\Omega} [q_n \delta w + \frac{1}{8} h^2 q_n \delta(\lambda_{\xi} \kappa_{\xi}) + m_n \delta \lambda_{\xi}] d\Omega. \quad (1.19)$$

Принимая во внимание зависимости

$$\begin{aligned}
\delta \lambda_{\xi} &= - \frac{\nu}{1 - \nu} \left(\frac{\partial \delta u_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial w}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \delta w}{\partial x_{\alpha}} \right), \\
\delta(\lambda_{\xi} \kappa_{\xi}) &= \frac{\nu}{1 - \nu} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\alpha}} - \frac{\partial \delta \omega_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} \right), \quad (1.20)
\end{aligned}$$

интеграл (1.19) можно представить так:

$$\begin{aligned}
A(\delta \mathbf{R}) &= \int_{\Omega} [(q_n + k^2 \Delta q_n) \delta w + k^2 q_{n, \alpha} \delta \omega_{\alpha}] d\Omega - k^2 \oint_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial q_n}{\partial s_{\nu}} \delta w + q_n \delta \vartheta_{\nu} \right) ds_t + \\
&+ \frac{\nu}{1 - \nu} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial m_n}{\partial x_{\alpha}} \delta u_{\alpha} - \frac{\partial (m_n \vartheta_{\alpha})}{\partial x_{\alpha}} \delta w \right) d\Omega - \\
&- \frac{\nu}{1 - \nu} \oint_{\partial\Omega} (m_n \delta u_{\nu} + m_n \frac{\partial w}{\partial s_{\nu}} \delta w) ds_t, \quad (1.21)
\end{aligned}$$

где

$$k^2 = \nu h^2 / 8(1 - \nu). \quad (1.21')$$

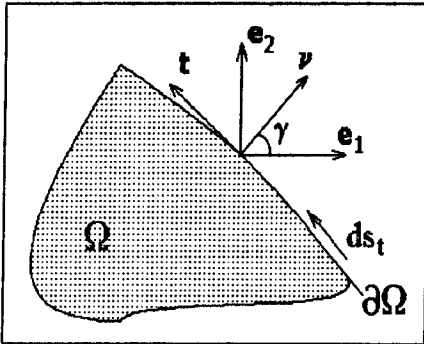


Рис.1

В (1.21) и ниже используются соотношения (рис.1)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s_{\nu}} &= \nu_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}, \quad \frac{\partial}{\partial s_t} = t_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}, \\
\nu &= \nu_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}, \quad \mathbf{t} = t_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} \\
\nu_1 &= t_2 = \cos \gamma, \\
\nu_2 &= -t_1 = \sin \gamma. \quad (1.22)
\end{aligned}$$

Подставляя интегралы (1.18), (1.21) в уравнение Лагранжа и приравнявая к нулю коэффициенты при вариациях δu_i , δw , $\delta \omega_i$, $i = 1, 2$ в интеграле по области Ω , получим

$$T_{i\alpha,\alpha} = 0, \quad i = 1, 2; \quad (1.23)_1$$

$$-M_{\alpha\beta,\alpha\beta} - (T_{\alpha\beta}w_{,\beta})_{,\alpha} = q_n + k^2\Delta q_n; \quad (1.23)_2$$

$$T_{in} - M_{i\alpha,\alpha} = k^2q_{n,i}, \quad i = 1, 2. \quad (1.23)_3$$

Вводя обычным образом функцию напряжения

$$T_{11} = \Phi_{,22}, \quad T_{22} = \Phi_{,11}, \quad T_{12} = -\Phi_{,12}, \quad (1.24)$$

из соотношений (1.14)₁ находим

$$\begin{aligned} e_{11} = u_{1,1} &= \frac{1}{Eh}(\Phi_{,22} - \nu\Phi_{,11}) - \frac{1}{2}w_{,1}^2, \quad e_{22} = (1 - \nu)e_{11}, \\ e_{12} &= \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) = -\frac{1+\nu}{Eh}\Phi_{,12} - \frac{1}{2}w_{,1}w_{,2}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Подставляя e_{ij} из (1.25) в очевидное (при выражении в перемещениях) тождество

$$e_{11,22} + e_{22,11} - 2e_{12,12} = 0,$$

придем к следующему уравнению Кармана:

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2\Phi = w_{,12}^2 - w_{,11}w_{,22}. \quad (1.26)$$

Дифференцируя (1.23)₃ по x_j и свертывая полученное равенство по индексам i и j , будем иметь

$$-M_{\alpha\beta,\alpha\beta} = -T_{\alpha n,\alpha} + k^2\Delta q_n. \quad (1.27)$$

Исключая теперь из уравнений (1.23)₃ и (1.27) изгибающие моменты и учитывая формулы (1.17'), (1.24), находим

$$\omega_{\alpha,\alpha} = -\frac{1}{\mu h}(q_n + \Lambda(\Phi, w)), \quad (1.28)$$

где

$$\Lambda(\Phi, w) = \Phi_{,11}w_{,22} - 2\Phi_{,12}w_{,12} + \Phi_{,22}w_{,11}. \quad (1.28')$$

Уравнению (1.23)₂ на основании (1.14)₂, (1.14)₃ можно придать вид

$$D\Delta^2w - D\Delta\omega_{\alpha,\alpha} = q_n + k^2\Delta q_n + \Lambda(\Phi, w). \quad (1.29)$$

Исключая, наконец, поперечные сдвиги из (1.29) с помощью (1.28), придем к следующему *обобщенному уравнению Кáрманна*:

$$D\Delta^2 w = q_n - (s^2 - k^2)\Delta q_n + (I - s^2\Delta)\Lambda(\Phi, w), \quad (1.30)$$

где I - тождественный оператор;

$$s^2 = \frac{h^2}{6(1-\nu)}, \quad s^2 - k^2 = \frac{(4-3\nu)h^2}{24(1-\nu)}. \quad (1.30')$$

При $s^2 = k^2 = 0$ (1.30) переходит в классическое уравнение Карманна. С параметрами s^2 (S.Timoshenko) и k^2 (K.Chernykh) связаны уточнения уравнения Карманна соответственно за счет поперечных сдвигов и поперечного обжатия.

Уравнениям (1.23)₃ на основании формул (1.14)₂, (1.14)₃ и (1.17') можно придать вид

$$D[\Delta\omega_1 - \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x_2}(\omega_{1,2} - \omega_{2,1})] - \mu h\omega_1 = D(\Delta w)_{,1} - k^2 q_{n,1}, \quad (1.31)_1$$

$$D[\Delta\omega_2 - \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x_1}(\omega_{2,1} - \omega_{1,2})] - \mu h\omega_2 = D(\Delta w)_{,2} - k^2 q_{n,2}. \quad (1.31)_2$$

Уравнения (1.31) вместе с уравнениями (1.26) и (1.30) составляют согласованную систему относительно искомых функций w , Φ , ω_1 , ω_2 .

Системе уравнений относительно ω_1 , ω_2 можно придать несколько иной вид. А именно, вводя вспомогательные функции

$$\phi = \omega_{1,1} + \omega_{2,2}, \quad \psi = \omega_{1,2} - \omega_{2,1}, \quad (1.32)$$

можно записать

$$\Delta\omega_1 = \phi_{,1} + \psi_{,2}, \quad \Delta\omega_2 = \phi_{,2} - \psi_{,1}, \quad (1.33)$$

где функции ϕ и ψ определяются соответственно из уравнений

$$\phi = -\frac{1}{\mu h}(q_n + \Lambda(\Phi, w)), \quad (1.34)_1$$

$$\Delta\Psi - \frac{12}{h^2}\Psi = 0. \quad (1.34)_2$$

(Здесь (1.34)₁ - записанное с учетом обозначения (1.32)₁ уравнение (1.28). Уравнение Гельмгольца (1.34)₂ получается, если вычесть из продифференцированного по x_2 уравнения (1.31)₁ продифференцированное по x_1 уравнение (1.31)₂ и учесть обозначение (1.33)₂.)

Если уравнения (1.23) выполнены, то вариационное уравнение Лагранжа (1.16) принимает вид

$$\oint_{\partial\Omega} (T_{\alpha\beta\nu\beta}\delta u_\alpha + T_{\alpha\beta\nu\beta}w_{,\alpha}\delta w + M_{\alpha\beta,\beta}\nu_\alpha\delta w + M_{\alpha\beta\nu\beta}\delta\vartheta_\alpha + k^2\frac{\partial q_n}{\partial s_\nu}\delta w + k^2q_n\delta\vartheta_\nu)ds_t = 0. \quad (1.35)$$

На основании очевидных формул (см. (1.22))

$$\delta\mathbf{u} = \delta u_\beta\mathbf{e}_\beta = \delta u_\nu\nu + \delta u_t\mathbf{t}, \quad \nabla = \mathbf{e}_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta} = \nu\frac{\partial}{\partial s_\nu} + \mathbf{t}\frac{\partial}{\partial s_t}$$

справедливы соотношения

$$\delta u_\alpha = \nu_\alpha\delta u_\nu + t_\alpha\delta u_t, \quad \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \nu_\alpha\frac{\partial}{\partial s_\nu} + t_\alpha\frac{\partial}{\partial s_t}, \quad (1.36)$$

с помощью которых можно записать

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta\nu\beta}\delta u_\alpha &= T_{\nu\nu}\delta u_\nu + T_{\nu t}\delta u_t, \quad M_{\alpha\beta\nu\beta}\delta\vartheta_\alpha = M_{\nu\nu}\delta\vartheta_\nu + M_{\nu t}\delta\vartheta_t, \\ T_{\alpha\beta\nu\beta}w_{,\alpha} &= T_{\nu\nu}\frac{\partial w}{\partial s_\nu} + T_{\nu t}\frac{\partial w}{\partial s_t}, \end{aligned} \quad (1.37)$$

где

$$T_{\nu\nu} = T_{\alpha\beta\nu\alpha}\nu_\beta, \quad T_{\nu t} = T_{\alpha\beta\nu\alpha}t_\beta, \quad M_{\nu\nu} = M_{\alpha\beta\nu\alpha}\nu_\beta, \quad M_{\nu t} = M_{\alpha\beta\nu\alpha}t_\beta. \quad (1.37')$$

Учитывая далее уравнение (1.23)₃, получаем

$$M_{\alpha\beta,\beta}\nu_\alpha = T_{\nu n} - k^2\frac{\partial q_n}{\partial s_\nu}, \quad (1.38)$$

где

$$T_{\nu n} = T_{\alpha n}\nu_\alpha = \mu h\omega_\nu. \quad (1.38')$$

С использованием формул (1.37), (1.38) уравнение (1.35) можно представить так:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} [T_{\nu\nu}\delta u_\nu + T_{\nu t}\delta u_t + (T_{\nu n} + T_{\nu\nu}\frac{\partial w}{\partial s_\nu} + T_{\nu t}\frac{\partial w}{\partial s_t})\delta w + \\ + (M_{\nu\nu} + k^2q_n)\delta\vartheta_\nu + M_{\nu t}\delta\vartheta_t]ds_t = 0, \end{aligned} \quad (1.39)$$

где

$$\vartheta_\nu = -\frac{\partial w}{\partial s_\nu} + \omega_\nu, \quad \vartheta_t = -\frac{\partial w}{\partial s_t} + \omega_t. \quad (1.39')$$

Если контур $\partial\Omega$ является гладким, то уравнению (1.39) можно придать вид (при наличии угловых точек см., например, [4])

$$\oint_{\partial\Omega} [T_{\nu\nu}\delta u_\nu + T_{\nu t}\delta u_t + Q_{\nu n}\delta w + (M_{\nu\nu} + k^2q_n)\delta\vartheta_\nu + M_{\nu t}\delta\omega_t]ds_t = 0, \quad (1.40)$$

где

$$Q_{\nu n} = T_{\nu n} + \frac{\partial M_{\nu t}}{\partial s_t} + T_{\nu\nu} \frac{\partial w}{\partial s_\nu} + T_{\nu t} \frac{\partial w}{\partial s_t}. \quad (1.40')$$

Уравнению (1.40) отвечает следующий вариант граничных величин:

$$\left| \begin{array}{c|c} T_{\nu\nu} & T_{\nu t} \\ \hline u_\nu & u_t \end{array} \right|; \quad (1.41)_1$$

$$\left| \begin{array}{c|c|c} Q_{\nu n} & M_{\nu\nu} + k^2q_n & M_{\nu t} \\ \hline w & \vartheta_\nu & \omega_t \end{array} \right|. \quad (1.41)_2$$

Все силовые граничные величины выражаются через основные искомые функции w , Φ , ω_1 , ω_2 . При этом имеют место формулы

$$\begin{aligned} M_{\nu\nu} &= D(-\Delta_{\nu\nu}w + \nu\Delta_{tt}w + \frac{\partial\omega_\nu}{\partial s_\nu} + \nu\frac{\partial\omega_t}{\partial s_t} - \rho_\nu\omega_t - \nu\rho_t\omega_\nu), \\ M_{\nu t} &= \frac{1}{2}(1 - \nu)D(-2\Delta_{\nu t}w + \frac{\partial\omega_t}{\partial s_\nu} + \frac{\partial\omega_\nu}{\partial s_t} - \rho_t\omega_t - \rho_\nu\omega_\nu), \\ T_{\nu\nu} &= \Delta_{tt}\Phi, \quad T_{\nu t} = -\Delta_{\nu t}\Phi. \end{aligned} \quad (1.42)$$

В формулах (1.42) и ниже используются обозначения

$$\begin{aligned} \Delta_{\nu\nu} &= \frac{\partial^2}{\partial s_\nu^2} + \rho_\nu \frac{\partial}{\partial s_t}, \quad \Delta_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial s_t^2} + \rho_t \frac{\partial}{\partial s_\nu}, \\ \Delta_{\nu t} &= \frac{\partial^2}{\partial s_\nu \partial s_t} - \rho_t \frac{\partial}{\partial s_t}, \quad \Delta_{t\nu} = \frac{\partial^2}{\partial s_t \partial s_\nu} - \rho_\nu \frac{\partial}{\partial s_\nu}, \\ \rho_t &= \frac{\partial\gamma}{\partial s_t}, \quad \rho_\nu = -\frac{\partial\gamma}{\partial s_\nu}, \quad \Delta_{\nu t} = \Delta_{t\nu}, \quad \Delta = \Delta_{\nu\nu} + \Delta_{tt}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Через функции w , ω_1 , ω_2 элементарно выражаются геометрические граничные величины, характеризующие изгибную деформацию. Что же касается тангенциальных смещений, то для их получения следует дополнительно интегрировать систему уравнений (1.25). Таким образом, в тех случаях, когда граничные условия формулируются в терминах тангенциальных смещений система уравнений $\{(1.26), (1.30), (1.31)\}$ не является замкнутой.

В работе [4] предложено вместо варианта тангенциальных граничных величин (1.41)₁ использовать следующий:

$$\left| \begin{array}{c|c} B_n & F_t \\ \hline k_{tn} & -\varepsilon_{tt} \end{array} \right|, \quad (1.44)$$

где

$$B_n = \Phi, \quad F_t = -\frac{\partial \Phi}{\partial s_\nu}; \quad (1.44')_1$$

$$\varepsilon_{tt} = -\frac{1}{Eh}(\Delta_{\nu\nu}\Phi - \nu\Delta_{tt}\Phi) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial s_t}\right)^2,$$

$$\begin{aligned} -k_{tn} = & \frac{1}{Eh} \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial s_\nu} + \frac{1+\nu}{Eh} \left[\frac{\partial \Delta_{tt} \Phi}{\partial s_\nu} + \rho_t (\Delta_{tt} \Phi - \Delta_{\nu\nu} \Phi) + \right. \\ & \left. + 2\rho_\nu \Delta_{\nu t} \Phi + 2\rho_\nu \rho_t \frac{\partial \Phi}{\partial s_t} + \frac{\partial w}{\partial s_\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial s_t^2} + \frac{1}{2} \rho_t \left[\left(\frac{\partial w}{\partial s_\nu} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s_t} \right)^2 \right] \right]. \end{aligned} \quad (1.44')_2$$

Заметим, что вариант граничных величин (1.44) получен в предположении, что область Ω является односвязной. Случай многосвязной области рассмотрен в работах [7,8].

Замечание 1.1. Уравнения Кармана, уточненные лишь за счет поперечных сдвигов, рассматривались, например, в работе [4], где они представлены в виде ($\Psi \rightarrow \Phi$, $L \rightarrow \Lambda$)

$$\frac{1}{Eh} \Delta^2 \Phi = -\frac{1}{2} \Lambda(w, w); \quad (1.45)_1$$

$$D \Delta \vartheta_{\alpha, \alpha} = -q_n - \Lambda(\Phi, w); \quad (1.45)_2$$

$$\Delta \vartheta_i + \frac{1+\nu}{1-\nu} (\vartheta_{\alpha, \alpha})_{,i} = \frac{12}{h^2} (\vartheta_i + w_{,i}). \quad (1.45)_3$$

Уравнение (1.45)₁ совпадает с уравнением (1.26). Из (1.45)₂ при $\vartheta_i = -w_{,i} + \omega_i$ получаем уравнение (1.29) для случая $k^2 = 0$. Из системы уравнений (1.45)₃ ($i = 1, 2$) получаем

$$D \Delta^2 w - D \Delta \omega_{\alpha, \alpha} = -\mu h \omega_{\alpha, \alpha}. \quad (1.46)$$

Уравнения (1.29) (при $k^2 = 0$) и (1.46) совместны, если выполняется (1.28). Исключая из уравнения (1.29) (при $k^2 = 0$) и уравнения (1.28) $\omega_{\alpha, \alpha}$ приходим к уравнению (1.30) для случая $k^2 = 0$.

Граничные величины теории типа Кармана-Тимошенко совпадают с величинами (1.41)₂ при $k^2 = 0$, $Q_{\nu n} = T_{\nu n} + T_{\nu\nu} \frac{\partial w}{\partial s_\nu} + T_{\nu t} \frac{\partial w}{\partial s_t}$ и $\omega_t = \vartheta_t$. ■

Замечание 1.2. Уравнения Кармана, уточненные лишь за счет поперечного обжатия ($\omega_i = 0$), совпадают с уравнениями (1.26), (1.30), если

в последнем положить $s^2 = 0$. Тангенциальные граничные величины при этом сохраняют вид (1.41)₁ или (1.44). Для изгибной деформации граничные величины принимают вид

$$\left| \begin{array}{l} Q_{\nu n} + k^2 \frac{\partial q_n}{\partial s_\nu} \\ w \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} M_{\nu\nu} + k^2 q_n \\ \vartheta_\nu = -\frac{\partial w}{\partial s_\nu} \end{array} \right|, \quad (1.47)$$

где (см. (1.38'), (1.40'), и (1.42)₁)

$$Q_{\nu n} = -D \frac{\partial \Delta w}{\partial s_\nu} + \frac{\partial M_{\nu t}}{\partial s_t} + T_{\nu\nu} \frac{\partial w}{\partial s_\nu} + T_{\nu t} \frac{\partial w}{\partial s_t},$$

$$M_{\nu\nu} = -D(\Delta_{\nu\nu} w - \nu \Delta_{tt} w). \quad (1.47')$$

Обращаем внимание на то, что:

- слагаемое $k^2 \partial q_n / \partial s_\nu$ в выражении для перерезывающей силы в (1.47) при дополнительном учете поперечных сдвигов исчезает;
- все изменения, вносимые в полевые и граничные уравнения Кармана за счет поперечного обжатия связаны лишь с вариациями параметров λ_ξ, κ_ξ . ■

2. Ограничиваясь линейным приближением, уравнения (1.26), (1.30) и (1.28) принимаем в виде

$$\Delta^2 \Phi = 0,$$

$$\Delta^2 w = p_n - h_*^2 \Delta p_n,$$

$$\omega_{\alpha, \alpha} = -\frac{1}{\mu h} q_n, \quad (2.1)$$

где $p_n = q_n / D$, $h_*^2 = s^2 - k^2$.

Пусть прямоугольная пластина расположена параллельно абсолютно жесткому основанию с зазором $\Delta \ll h$ и находится под действием равномерной нормальной нагрузки $q_n = q_0 = \text{const}$ ($p_0 = q_0 / D$). Предполагаем, что краями $x_1 = 0$ и $x_1 = 2l$ пластина шарнирно оперта, а два других ее края бесконечно удалены или загружены (подкреплены) так, что реализуется цилиндрический изгиб. Когда нагрузка достигнет определенной величины, пластина коснется основания. Предполагаем, что при дальнейшем увеличении нагрузки пластина начнет выстилаться по основанию, образуя область контакта

$$\Omega_0 = \{(x_1, x_2) : x_0 = < x_1 \leq 2l - x_0, \dots\}, \quad (2.2)$$

в которой реализуется полное прилегание пластины к основанию. В силу одномерности задачи впредь будем указывать лишь одну координату точки $x \equiv x_1$.

Тогда уравнения цилиндрического изгиба пластины имеют вид

$$\Phi^{IV} = 0, \quad (2.3)_1$$

$$w^{IV} = p_n - h_*^2 p_n'' \triangleq L_0 p_n, \quad (2.3)_2$$

$$\omega_1' = -\frac{1}{\mu h} q_n. \quad (2.3)_3$$

Граничные условия шарнирно опертого края выражаются равенствами ($\omega_1 \equiv \omega_2 = 0$)

$$B_n = 0, \quad F_t = 0,$$

$$w = 0, \quad M_1 + k^2 q_n = 0 \text{ при } x_1 = 0, \quad x_1 = 2l \quad (2.4)$$

или

$$\Phi = 0, \quad \Phi' = 0, \quad (2.5)_1$$

$$w = 0, \quad D(-w'' + \omega_1') + k^2 q_n = 0. \quad (2.5)_2$$

Из уравнений (2.3)₁, (2.5)₁ очевидно следует, что $\Phi \equiv 0$.

Граничные условия (2.5)₂ запишем следующим образом (см. (2.3)₃):

$$w = 0, \quad w'' + h_*^2 p_n = 0. \quad (2.6)$$

Введем вспомогательную функцию \tilde{w} согласно формуле

$$w = \tilde{w} - h_*^2 \tilde{w}'' = L_0 \tilde{w}. \quad (2.7)$$

На основании (2.3)₂ и (2.7) функция \tilde{w} должна удовлетворять уравнению

$$\tilde{w}^{IV} = p_n. \quad (2.8)$$

Граничные условия (2.6) для функции \tilde{w} принимают вид

$$\tilde{w} - h_*^2 \tilde{w}'' = 0, \quad \tilde{w}'' - h_*^2 \tilde{w}^{IV} + h_*^2 p_n = 0$$

или (с учетом (2.8))

$$\tilde{w} = \tilde{w}'' = 0 \text{ при } x = 0, \quad x = 2l. \quad (2.9)$$

В рассматриваемом случае имеется два вида нагрузки (активная и реактивная)

$$\begin{aligned} p_0 &= D^{-1} q_n^+(x), \quad x \in (0, 2l); \\ r(x) &= D^{-1} q_n^-(x), \quad x \in (x_0, 2l - x_0). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Поэтому уравнение (2.8) приводится к виду

$$\tilde{w}^{IV} = p_0 - r(x) \triangleq f(x), \quad (2.11)$$

где $r(x)$ - реакция основания на давление пластины ($r(x) \geq 0$).

Учитывая, что конструкция и действующая на нее нагрузка симметричны относительно линии $x = l$, впредь ограничимся рассмотрением той половины пластины, где $0 \leq x \leq l$. Известно, что при $x = l$

$$\vartheta_1 \equiv -w' + \omega_1 = 0, \quad Q_{1n} = T_{1n} = \mu h \omega_1 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$w'(l) = 0. \quad (2.12)$$

На основании формул (1.23)₃, (1.42) и (2.3)₃ получаем

$$T_{1n} = D(-w''' + \omega_1'') + k^2 q_n',$$

$$\omega_1'' = -\frac{1}{\mu h} q_n'.$$

Отсюда имеем

$$-Dw''' - s^2 q_n' + k^2 q_n' = 0$$

или

$$w''' + h_*^2 p_n' = 0. \quad (2.13)$$

Условия (2.12), (2.13), будучи выраженными через вспомогательную функцию, принимают вид

$$\tilde{w}''' - h_*^2 (\tilde{w}^{IV} - p_n)' = 0,$$

$$\tilde{w}' - h_*^2 \tilde{w}''' = 0,$$

т.е. (см. (2.8))

$$\tilde{w}'(l) = 0, \quad \tilde{w}'''(l) = 0. \quad (2.14)$$

При этом в случае наличия участка выстилания $[x_0, l]$ должны быть выполнены условия:

- выстилания

$$w^{-h/2}(x) = \Delta \text{ при } x \in [x_0, l]; \quad (2.15)$$

- отсутствия излома лицевой поверхности $\xi = -h/2$ при $x = x_0$

$$(w^{-h/2})'(x_0 - 0) = 0; \quad (2.16)$$

- сопряжения по срединной поверхности частей пластины

$$\begin{aligned} w(x_0 - 0) &= w(x_0 + 0), \quad \vartheta_1(x_0 - 0) = \vartheta_1(x_0 + 0), \\ (M_1 + k^2 q_n)(x_0 - 0) &= (M_1 + k^2 q_n)(x_0 + 0), \\ Q_{1n}(x_0 - 0) &= Q_{1n}(x_0 + 0). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Рассмотрим сначала условие (2.15). На основании (1.3)₂ имеем

$$w^{-h/2}(x) = w(x) - \frac{1}{2}h(\lambda_\xi - 1) + \frac{1}{8}h^2\lambda_\xi\kappa_\xi, \quad (2.18)$$

где (см.(1.9))

$$\begin{aligned} \lambda_\xi - 1 &= -\frac{\nu}{Eh}\Delta\Phi + \frac{q_n^+ + q_n^-}{2(\lambda + 2\mu)}, \\ \lambda_\xi\kappa_\xi &= \frac{\nu}{1-\nu}(\Delta w - \mu_{\alpha\alpha}) + \frac{q_n^+ - q_n^-}{h(\lambda + 2\mu)}. \end{aligned} \quad (2.18')$$

На основании (2.10), (2.18) и (2.18') условию (2.15) можно придать вид

$$w + k^2 w'' - \frac{Dhp_0}{8(\lambda + 2\mu)} - \frac{3Dhr}{8(\lambda + 2\mu)} - k^2 \omega'_1 = \Delta \quad (2.19)$$

или (с учетом (2.7) и (2.11))

$$(k^4 + 9(1 - 2\nu)s^4/8)\tilde{w}^{IV} - (s^2 - 2k^2)\tilde{w}'' + \tilde{w} = \Delta + [3(1 - 2\nu)/2]s^4 p_0. \quad (2.20)$$

Систему фундаментальных решений уравнения (2.20) можно представить так:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \operatorname{ch}\alpha(l - x) \cos \beta(l - x), \quad \Phi_2 = \operatorname{sh}\alpha(l - x) \sin \beta(l - x), \\ \Phi_3 &= \operatorname{ch}\alpha(l - x) \sin \beta(l - x), \quad \Phi_4 = \operatorname{sh}\alpha(l - x) \cos \beta(l - x), \end{aligned} \quad (2.21)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s^2 - 2k^2 + 2\sqrt{k^4 + 9(1 - 2\nu)s^4/8}}{k^4 + 9(1 - 2\nu)s^4/8}} \\ \beta &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2k^2 - s^2 + 2\sqrt{k^4 + 9(1 - 2\nu)s^4/8}}{k^4 + 9(1 - 2\nu)s^4/8}}. \end{aligned} \quad (2.21')$$

С учетом симметрии полный интеграл уравнения (2.20) выражается формулой ($x \in [x_0, l]$)

$$\tilde{w} = \Delta + [3(1 - 2\nu)/2]s^4 p_0 + \tilde{C}_1 \Phi_1 + \tilde{C}_2 \Phi_2. \quad (2.22)$$

Из уравнения (2.11) получаем

$$r(x) = p_0 - \tilde{C}_1 \Phi_1^{IV} - \tilde{C}_2 \Phi_2^{IV} = p_0 - C_1 \Phi_1 - C_2 \Phi_2, \quad (2.23)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= (\alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4)\tilde{C}_1 + 4\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)\tilde{C}_2, \\ C_2 &= (\alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4)\tilde{C}_1 - 4\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)\tilde{C}_2. \end{aligned} \quad (2.23')$$

Здесь и ниже использовались следующие формулы для производных функций (2.21):

$$\begin{aligned} \Phi_1' &= -\alpha\Phi_4 + \beta\Phi_3, \quad \Phi_1'' = (\alpha^2 - \beta^2)\Phi_1 - 2\alpha\beta\Phi_2, \\ \Phi_1''' &= -\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)\Phi_4 + \beta(3\alpha^2 - \beta^2)\Phi_3, \\ \Phi_1^{IV} &= (\alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4)\Phi_1 - 4\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)\Phi_2; \\ \Phi_2' &= -\alpha\Phi_3 - \beta\Phi_4, \quad \Phi_2'' = (\alpha^2 - \beta^2)\Phi_2 + 2\alpha\beta\Phi_1, \\ \Phi_2''' &= -\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)\Phi_3 - \beta(3\alpha^2 - \beta^2)\Phi_4, \\ \Phi_2^{IV} &= (\alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4)\Phi_2 - 4\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)\Phi_1. \end{aligned} \quad (2.24)$$

На основании (2.24) имеют место зависимости

$$\Phi_1 = \Psi_1^{IV}(x), \quad \Phi_2 = \Psi_2^{IV}(x), \quad (2.25)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= A\Phi_1 + B\Phi_2, \quad \Psi_2 = A\Phi_2 - B\Phi_1, \\ \gamma A &= \alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4, \quad \gamma B = 4\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2), \\ \gamma &= (\alpha^2 + \beta^2)^4. \end{aligned} \quad (2.25')$$

Вернемся к формуле (2.23). На ее основе общее выражение для контактной реакции имеет вид ($x \in [0, l]$)

$$r(x) = R_0\delta(x - x_0) + (p_0 - C_1\Phi_1 - C_2\Phi_2)H(x - x_0), \quad (2.26)$$

где R_0 - сосредоточенная реакция на границе области контакта.

Для правой части уравнения (2.11) имеет место формула

$$f(x) = p_0H(x_0 - x) - R_0\delta(x - x_0) + (C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2)H(x - x_0). \quad (2.27)$$

Функцию Грина для краевой задачи $\{(2.11), (2.14), (2.9)(x = 0)\}$ можно представить формулой

$$G(x; \xi) = \frac{1}{6}(6lx\xi - 3x\xi^2 - x^3)H(\xi - x) + \frac{1}{6}(6lx\xi - 3\xi x^2 - \xi^3)H(x - \xi). \quad (2.28)$$

Решение названной задачи при правой части в виде (2.27) с учетом (2.25) выражается формулой

$$\begin{aligned} \tilde{w}(x) = & p_0 \int_0^{x_0} G(x; \xi) d\xi - R_0 G(x; x_0) - G(x; x_0) [C_1 \Psi_1'''(x_0) + C_2 \Psi_2'''(x_0)] + \\ & + G'_\xi(x; x_0) [C_1 \Psi_1''(x_0) + C_2 \Psi_2''(x_0)] - G''_{\xi\xi}(x; x_0) [C_1 \Psi_1'(x_0) + C_2 \Psi_2'(x_0)] + \\ & + G'''_{\xi\xi\xi}(x; x_0) [C_1 \Psi_1(x_0) + C_2 \Psi_2(x_0)] + [C_1 \Psi_1(x) + C_2 \Psi_2(x)]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Выполнив в (2.29) несложные преобразования, получим

$$\begin{aligned} \underline{x > x_0}: \quad \tilde{w} = & -\frac{1}{6} p_0 \left(\frac{3}{2} x_0^2 x^2 - 3l x_0^2 x + \frac{1}{4} x_0^4 \right) + \\ & + \frac{1}{6} R_0 (3x_0 x^2 - 6lx_0 x + x_0^3) + \frac{1}{6} (3x_0 x^2 - 6lx_0 x + x_0^3) \times \\ & \times [C_1 \Psi_1'''(x_0) + C_2 \Psi_2'''(x_0)] + \frac{1}{2} (2lx - x^2 - x_0^2) [C_1 \Psi_1''(x_0) + C_2 \Psi_2''(x_0)] + \\ & + x_0 [C_1 \Psi_1'(x_0) + C_2 \Psi_2'(x_0)] - [C_1 \Psi_1(x_0) + C_2 \Psi_2(x_0)] + [C_1 \Psi_1(x) + C_2 \Psi_2(x)]; \\ \tilde{w}'(x) = & (l - x) \left\{ \frac{1}{2} p_0 x_0^2 - R_0 x_0 - x_0 [C_1 \Psi_1'''(x_0) + \right. \\ & \left. + C_2 \Psi_2'''(x_0)] + [C_1 \Psi_1''(x_0) + C_2 \Psi_2''(x_0)] \right\} + C_1 \Psi_1'(x) + C_2 \Psi_2'(x); \\ \tilde{w}''(x) = & -\frac{1}{2} p_0 x_0^2 + R_0 x_0 + x_0 [C_1 \Psi_1'''(x_0) + \\ & + C_2 \Psi_2'''(x_0)] - [C_1 \Psi_1''(x_0) + C_2 \Psi_2''(x_0)] + C_1 \Psi_1''(x) + C_2 \Psi_2''(x); \\ \tilde{w}''' = & C_1 \Psi_1'''(x) + C_2 \Psi_2'''(x); \\ \tilde{w}^{IV} = & C_1 \Phi_1 + C_2 \Phi_2. \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \underline{x < x_0}: \quad \tilde{w}(x) = & \frac{1}{6} p_0 \left(\frac{1}{4} x^4 - x_0 x^3 - x_0^3 x + 3lx_0^2 x \right) + \\ & + \frac{1}{6} R_0 (x^3 - 6lx_0 x + 3x_0^2 x) + \frac{1}{6} (x^3 - \\ & - 6lx_0 x + 3x_0^2 x) [C_1 \Psi_1'''(x_0) + C_2 \Psi_2'''(x_0)] + \\ & + (l - x_0) x [C_1 \Psi_1''(x_0) + C_2 \Psi_2''(x_0)] + x [C_1 \Psi_1'(x_0) + C_2 \Psi_2'(x_0)]; \\ \tilde{w}'(x) = & \frac{1}{6} p_0 (x^3 - 3x_0 x^2 - x_0^3 + 3lx_0^2) + \frac{1}{2} R_0 (x^2 - \\ & - 2lx_0 + x_0^2) + \frac{1}{2} (x^2 - 2lx_0 + x_0^2) [C_1 \Psi_1'''(x_0) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_2 \Psi_2'''(x_0)] + (l - x_0)[C_1 \Psi_1''(x_0) + C_2 \Psi_2''(x_0)] + [C_1 \Psi_1'(x_0) + C_2 \Psi_2'(x_0)]; \\
\tilde{w}''(x) &= \frac{1}{2} p_0 (x^2 - 2x_0 x) + R_0 x + x[C_1 \Psi_1'''(x_0) + C_2 \Psi_2'''(x_0)]; \\
\tilde{w}''' &= p_0 (x - x_0) + R_0 + [C_1 \Psi_1'''(x_0) + C_2 \Psi_2'''(x_0)]; \\
\tilde{w}^{IV} &= p_0.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

На основании формул (2.30), (2.31) нетрудно убедиться в тождественном выполнении условий

$$\tilde{w}^{(k)}(x_0 - 0) = \tilde{w}^{(k)}(x_0 + 0), \quad k = 0, 1, 2. \tag{2.32}$$

Подставляя выражения для \tilde{w} , \tilde{w}'' , \tilde{w}^{IV} из (2.30) в равенство (2.20) и приравнявая в нем коэффициенты слева и справа при одинаковых степенях x , получим следующие два уравнения относительно C_1 , C_2 , x_0 :

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{24} p_0 x_0^4 (1 - 24 \frac{h_*^2}{x_0^2}) + \frac{1}{6} R_0 x_0^3 (1 - 12 \frac{h_*^2}{x_0^2}) + \\
& + \frac{1}{6} x_0^3 (1 - 12 \frac{h_*^2}{x_0^2}) [C_1 \Psi_1'''(x_0) + C_2 \Psi_2'''(x_0)] - \\
& - \frac{1}{2} x_0^2 (1 - 4 \frac{h_*^2}{x_0^2}) [C_1 \Psi_1''(x_0) + C_2 \Psi_2''(x_0)] + \\
& + x_0 [C_1 \Psi_1'(x_0) + C_2 \Psi_2'(x_0)] - [C_1 \Psi_1(x_0) + C_2 \Psi_2(x_0)] = \\
& = \Delta + \frac{3}{2} (1 - 2\nu) s^4 p_0;
\end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}
& C_1 [\Psi_1''(x_0) - x_0 \Psi_1'''(x_0)] + C_2 [\Psi_2''(x_0) - x_0 \Psi_2'''(x_0)] = \\
& = R_0 x_0 - \frac{1}{2} p_0 x_0^2.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Замечание 2.1. Если сравнить соотношения, использованные при выводе уравнений (2.33), (2.34), с соответствующими соотношениями классической теории пластин, нетрудно убедиться, что в последней отсутствуют параметры h_*^2 , s^2 , C_1 , C_2 . Полагая в (2.33), (2.34)

$$h_*^2 = 0, \quad s^2 = 0, \quad C_1 = C_2 = 0,$$

получим

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{24} p_0 x_0^4 + \frac{1}{6} R_0 x_0^3 &= \Delta, \\
R_0 x_0 - \frac{1}{2} p_0 x_0^2 &= 0
\end{aligned}$$

или

$$R_0 = \frac{1}{2} p_0 x_0, \quad x_0 = (24\Delta/p_0)^{1/4}, \quad (2.35)$$

т.е. классической теории соответствует распределение контактных реакций, содержащее сосредоточенные воздействия на краях зоны контакта [9]. ■

Рассмотрим теперь условие (2.16). Имеем (см.(1.3)₂)

$$w^{-h/2}(x) = \tilde{w} - \frac{Dhp_0}{8(\lambda + 2\mu)},$$

т.е. условие (2.16) принимает вид

$$\tilde{w}'(x_0 - 0) = 0. \quad (2.36)$$

На основании (2.36) и (2.30) с учетом (2.34) получаем

$$C_1 \Psi_1'(x_0) + C_2 \Psi_2'(x_0) = 0. \quad (2.37)$$

Таким образом, получены три уравнения (2.33), (2.34), (2.37) относительно четырех неизвестных R_0 , x_0 , C_1 , C_2 . Неиспользованными остались четыре условия сопряжения (2.17). Принимая во внимание (2.7), (2.8), (2.30), (2.31) нетрудно убедиться в тождественном выполнении всех условий кроме четвертого, связанного с непрерывностью перерезывающей силы при переходе через точку $x = x_0$. Это условие на основании (1.31), (2.7), (2.32) принимает вид

$$\tilde{w}'''(x_0 - 0) = \tilde{w}'''(x_0 + 0),$$

что приводит к важному результату:

$$R_0 = 0.$$

Тем самым система (2.33), (2.34), (2.37) становится согласованной по отношению к неизвестным x_0 , C_1 , C_2 .

Численно решалась контактная задача для цилиндрически изгибаемой пластины над абсолютно жестким основанием при следующих исходных данных:

$$l = 100\text{см}, \quad h = 1\text{см}, \quad \Delta = 0,1\text{см}, \quad E = 2 \cdot 10^6 \text{кг/см}^2, \quad \nu = 0,3. \quad (2.38)$$

При этом система {(2.33), (2.34), (2.37)} нормировалась путем замены $\Psi_j^{(i)}(x_0)$ на $D\Psi_j^{(i)}(x_0) \exp[-\alpha(l-a)]$, где в качестве a принималось значение x_0 , вычисленное по формуле (2.35)₂. Численный эксперимент показал, что при фиксированных параметрах (2.38) предложенный выше

алгоритм не при любой нагрузке q_0 приводит к допустимому решению ($r \geq 0$). Оказывается, что условие односторонности связи начинает выполняться лишь при нагрузке, превышающей некоторое характерное значение q_0^* , соответствующее выбранным геометрическим и физическим параметрам. На рис.2 показаны графики реакций абсолютно жесткого основания для нагрузок $q_0^* = 0, 1 \text{ кг/см}^2, 10q_0^*$. При этом заметим, что значения параметра x_0 практически не отличаются от вычисленных по формуле (2.35)₂: $x_0(q_0^*) = 45,7 \text{ см}$, $x_0(10q_0^*) = 25,7 \text{ см}$.

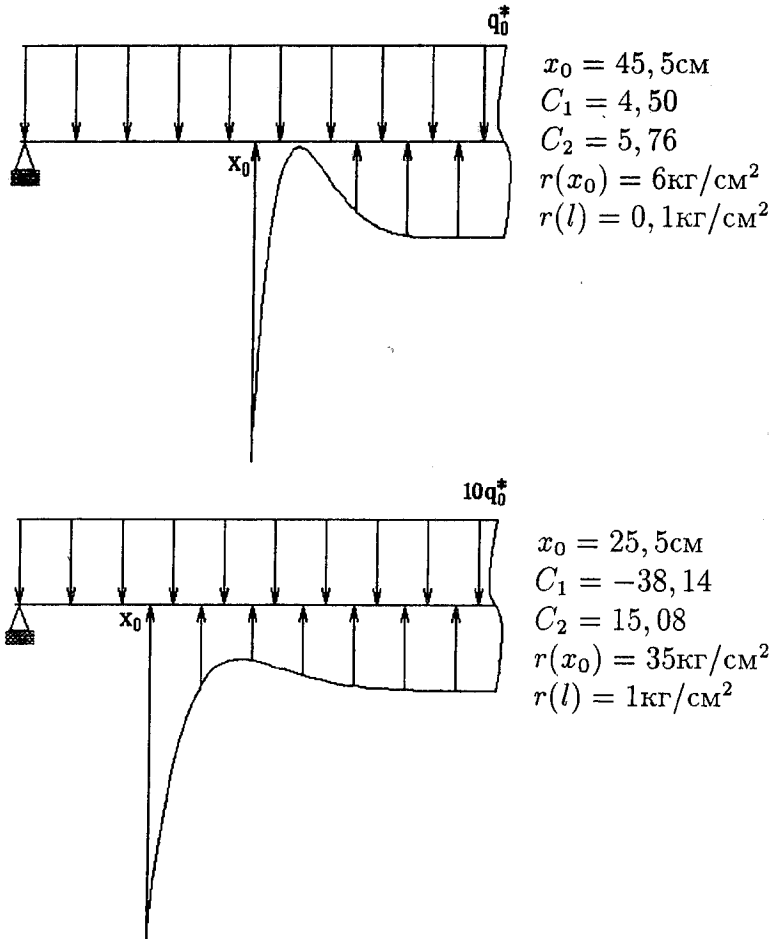


Рис.2

Литература

1. Черных К.Ф. Нелинейная теория изотропных упругих тонких оболочек // Изв. РАН. МТТ. 1980. №2. С.148-159.

2. **Черных К.Ф.** Теория тонких оболочек из эластомеров (резино-подобных материалов)// *Успехи механики*. 1983. Т.6. Вып.1/2. С.111-147.
3. **Черных К.Ф.** Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.:Машиностроение, 1986. 336с.
4. **Михайловский Е.И. Торопов А.В.** Математические модели теории упругости. Сыктывкар: Сыктывкарский ун-т, 1995. 251с. (ISBN 5-87237-079-2)
5. **Михайловский Е.И.** Граничные условия подкрепленного края в нелинейной теории типа Тимошенко-Рейсснера// *Изв. РАН. МТТ*. 1995. №2. С.109-119.
6. **Кабриц С.А., Черных К.Ф.** Нелинейная теория изотропно упругих тонких оболочек с учетом поперечного сдвига// *Изв.РАН. МТТ*. 1996. №1. С.124-136.
7. **Mikhailovskii E.I.** On formulating boundary conditions in the Kármán plane plate bending theory// *Transactions of St-Petersburg academy of sciens for strength problems*. 1997. Vol.1. P.21-44. (ISBN 5-87237-146-2).
8. **Ермоленко А.В., Михайловский Е.И.** Граничные условия для подкрепленного края в теории изгиба плоских пластин Кáрмана// *Изв. АН. МТТ*. 1998. №3. С.73-85.
9. **Михайловский Е.И., Тарасов В.Н.** О сходимости метода обобщенной реакции в контактных задачах со свободной границей// *РАН. ПММ*. 1993. Т.57. Вып.1. С.128-136.

Summary

Mikhailovskii E.I., Vadokin K.V., Ermolenko A.V. The plane plate bending theory of Karman's type without Kirchhoff's hypothesis

The plane plate bending theory due to transverse deformations is refined. The parameters characterizing the transverse squeezing in distinction from K.Chernykh's quasi-Kirchhoffian theory are studied as power base variables. The influence of the transverse deformations on spreading of the contact reactions in the problem with the free borders is investigated.

Сыктывкарский университет

Поступила 14.09.98