Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.3.1999

УДК 517.946.53

Анализ условий воспламенения цилиндра с теплоизолированной полостью [1]

Д.В.Касев, С.И.Худяев

Выполняется расчет критических условий теплового взрыва цилиндра с каналом в зависимости от отношения радиусов цилиндра и канала. Проводится сопоставление с теоретической верхней оценкой.

1. Введение

Проблема воспламенения цилиндра с коаксиальной полостью (каналом) представляет практический интерес и привлекла внимание многих авторов. Случай идеального теплообмена на стенках цилиндра и канала рассматривался в работах [1,2], результаты которых оказались ошибочными. В работе [3] последовало исправление [1]. На ошибку [2] было указано одним из авторов настоящей статьи вскоре после выхода [2]. Однако правильное решение было опубликовано много позже [4](см. также [5] § 1).Необходимо отметить, что раньше всех эта задача, так же, как и задача с теплоизолированным каналом, была решена А.Г. Мержановым и В.В. Барзыкиным, работа которых однако осталась неопубликованной.

В настоящей работе мы вновь возвращаемся к задаче о воспламенении цилиндра с теплоизолированным каналом и с использованием общего интеграла соответствующего уравнения приводим расчет предела воспламенения в зависимости от отношения радиусов цилиндра и канала.

Проводится сопоставление полученных данных с теоретической верхней оценкой предела воспламенения (см. [5] §3,[6],[10]), полученной для произвольной области и при общих однородных граничных условиях.

[1]Работа выполняется при поддержке **РФФИ** (грант 97-01-80903)

2. Уравнение. Общий интеграл

В предположении аррениусовской зависимости скорости химической реакции от температуры и ее независимости от концентрации реагента (приближение реакции нулевого порядка [6-8]) в цилиндрических координатах с учетом независимости решения от осевой (бесконечный цилиндр) и угловой координат стационарное распределение температуры в объеме реактора описывается уравнением:

$$\lambda\left(\frac{d^2T}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{dT}{d\xi}\right)+QK_0\exp\left(-\frac{E}{RT}\right)=0; \qquad (1)$$

$$\left.\frac{dT}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_1}=0, \quad T|_{\xi=\xi_2}=T_0.$$

Здесь ξ - текущий радиус, ξ_2 - радиус цилиндра, $\xi_1<\xi_2$ - радиус канала, T - температура в реакторе, T_0 - температура окружающей среды, λ - коэффициент теплопроводности, Q - теплота реакции,E - энергия активации, R - универсальная постоянная, K_0 - нормирующий множитель. Граничное условие при $\xi=\xi_1$ выражает отсутствие теплового потока на стенке канала, другое условие при $\xi=\xi_2$ означает идеальный теплоотвод через стенку цилиндра.

Вводя безразмерные переменные и параметры:

$$u=\frac{E\,(T-T_0)}{RT_0{}^2}; \quad r=\frac{\xi}{\xi_2}; \quad r_0=\frac{\xi_1}{\xi_2}; \qquad (2)$$

$$\beta=\frac{RT_0}{E}; \quad \delta=\frac{\xi_2^2EQ}{\lambda RT_0^2}K_0\exp\left(-\frac{E}{RT_0}\right)$$

и используя приближение Франк-Каменецкого [6,7] : $\beta u^2\ll 1$, уравнение (1) приводится к виду :

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}+\delta e^u=0; \qquad \left.\frac{du}{dr}\right|_{r=r_0}=0; \qquad u|_{r=1}=0, \qquad (3)$$

в котором содержатся всего два параметра : число Франк-Каменецкого δ, характеризующее интенсивность химического тепловыделения, и r_0 - отношение радиуса канала к радиусу цилиндра ($r_0<1$).

Взрывное протекание реакции означает отсутствие положительного решения задачи (3). Здесь существует критическая величина параметра δ , зависящая от r_0 - $\delta_{\text{кр}}(r_0)$, выше которой (при $\delta>\delta_{\text{кр}}(r_0)$) решение отсутствует. Расчет зависимости $\delta_{\text{кр}}(r_0)$ и является основной задачей настоящей работы.

Уравнение (3) удается проинтегрировать в элементарных функциях. Техника интегрирования была изложена еще в работе [9] (см. также [4]). В этом легче всего убедиться, если установим эквивалентность задачи (3) и задачи о воспламенении плоского слоя с несимметричными условиями:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \kappa e^u = 0; \quad \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = 2q; \quad \theta|_{x=1} = 0; \quad q > 0. \tag{4}$$

В самом деле, функция

$$v(x) = \theta(x) + 2q(1 - x) \tag{5}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \kappa e^{-2q(1-x)}e^v = 0, \tag{6}$$

и однородным условиям

$$\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0} = 0; \qquad v|_{x=1} = 0. \tag{7}$$

Если положить

$$r = e^{-q(1-x)}, \qquad u(r) = v(x), \tag{8}$$

то легко убедиться, что $u(r)$ удовлетворяет уравнению и граничным условиям (3) при

$$r_0 = e^{-q} < 1, \qquad \delta = \kappa/q^2. \tag{9}$$

Эти рассуждения могут быть прочитаны и в обратную сторону, чем устанавливается тождество задач (3) и (4). Общий интеграл уравнения (4) находится стандартным приемом понижения порядка. Если в этом интеграле с помощью формул (5) и (8) перейти к переменным r и u, то мы получим общий интеграл (3). Опуская элементарные выкладки, приведем общее решение (3) (ср.[4]):

$$\delta e^u = \frac{8a^2}{(br^{a+1} + \frac{1}{b}r^{-a+1})^2}, \tag{10}$$

где a и b - произвольные постоянные.

Подчиняя (10) граничному условию (3) при $r = 1$, находим

$$\delta = \frac{8a^2b^2}{(b^2+1)^2}. \tag{11}$$

Из другого граничного условия при $r = r_0$, учитывая (9) для r_0, имеем

$$b^2 = \frac{(a-1)}{(a+1)}e^{2aq}. \tag{12}$$

Исключая b^2 из (11) с помощью (12), получим

$$\delta = \frac{2a^2(a^2-1)}{(a\mathrm{ch}aq - \mathrm{sh}aq)^2} \equiv \psi(a). \tag{13}$$

Это равенство позволяет, в принципе, выразить константу a через заданные величины δ и q (или δ и r_0), исключить из (10) константы a и b и определить решение задачи (3). Как видно из (13), зависимость $\psi(a)$ равна нулю при $a = 1$, положительна при $a > 1$, проходит через максимум и убывает до нуля при $a \longrightarrow \infty$. Таким образом, при каждом $\delta < \max\psi(a)$ уравнение (13) имеет два корня, и, соответственно, исходная задача (3) имеет два решения, которые сливаются при $\delta \longrightarrow \max\psi(a)$ и исчезают при $\delta > \max\psi(a)$.Так что искомое предельное значение δ , выше которого задача (3) перестает быть разрешимой (предел воспламенения), определяется формулой:

$$\delta_{\text{кр}} = \max_{a>1} \frac{2a^2(a^2-1)}{(a\mathrm{ch}aq - \mathrm{sh}aq)^2}. \tag{14}$$

К сожалению, не удается элементарно найти точку максимума $\psi(a)$ и получить явную зависимость $\delta_{\text{кр}}(r_0)$. Приходится прибегать к численным методам.

Точка максимума $\psi(a)$ (см. (11)) ищется из уравнения $\psi'(a) = 0$ или

$$f(a) \equiv a(a^2-1)[1-q+qa\mathrm{th}qa] - (2a^2-1)(a-\mathrm{th}qa) = 0. \tag{15}$$

Поскольку $f(1) = -(1-\mathrm{th}q) < 0$, а $f(a) \longrightarrow +\infty$ при $a \longrightarrow \infty$, то уравнение (15) имеет корень $\bar{a} > 1$. Можно надеяться, что корень единственный, и что производная $f'(a)$:

$$f'(a) = 2a(2-q+2qa^2)\mathrm{th}qa + \frac{q}{\mathrm{ch}^2 qa}(qa^2(a^2-1)+2a^2-1)+q-3a^2(1+q) \tag{16}$$

положительна при каждом $q > 0$ во всей области $a > 1$, и что корень может быть найден по методу Ньютона

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}, \qquad n = 0, 1, ... \tag{17}$$

при подходящем начальном приближении a_0.

3. Нахождение $\delta_{\text{кр}}$

A' priori ясно, что при $r_0 \longrightarrow 0$ ($q \longrightarrow \infty$) задача (3) сводится к задаче о тепловом взрыве сплошного цилиндра (без канала), для которой известно точное значение $\delta_{\text{кр}}$ [4]-[6]: $\delta_{\text{кр}} = 2$, так что соотношение $\delta_{\text{кр}}(r_0) \longrightarrow 2$ при $r_0 \longrightarrow 0$ может служить для контроля правильности расчета. Ясно также, что при $r_0 \longrightarrow 1$ ($q \longrightarrow 0$, $q \simeq 1 - r_0$) согласно (9) $\delta_{\text{кр}} \simeq \kappa_{\text{кр}}/(1 - r_0)^2$, где $\kappa_{\text{кр}}$ - предел воспламенения симметричной полосы $-1 < x < 1$ (см.(4)). Этот предел также известен [4], [7]: $\kappa_{\text{кр}} \simeq 0,878$.

Расчеты корня $\bar{a}$ уравнения (15) по методу Ньютона (17) для $r_0 = 0,9; ...0,1$ и соответствующих значений $\delta_{\text{кр}}$ по формуле (ср.(14)):

$$\delta_{\text{кр}} = \frac{2\bar{a}^2(\bar{a}^2 - 1)}{(\bar{a}\text{ch}\bar{a}q - \text{sh}\bar{a}q)^2} \tag{18}$$

сведены в таблицу 1:

таблица 1

r_0	$q = \ln r_0^{-1}$	$\bar{a}$	$\delta_{\text{кр}}$	λ_0/e
0.9	0.10536	11.105	91.502	94.727
0.8	0.22314	5.1467	23.925	24.833
0.7	0.35667	3.1949	11.176	11.639
0.6	0.51083	2.2520	6.6477	6.9524
0.5	0.69315	1.7193	4.5332	4.7651
0.4	0.91629	1.3972	3.3872	3.5814
0.3	1.2040	1.1995	2.7123	2.8867
0.2	1.6094	1.0820	2.3057	2.4684
0.1	2.3026	1.0198	2.0773	2.2325

При выполнении итераций по формуле (17) в качестве начального приближения a_0 при $r_0 = 0,9$ принималось значение $a_0 = \sqrt{1 + \frac{1}{q}}$. Корень $\bar{a}$ считался найденным($\bar{a} = a_{n+1}$), если выполнялось $\left|\frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}}\right| < 10^{-4}$.

Найденное при $r_0 = 0,9$ значение $\bar{a}$ принималось затем в качестве начального приближения для $r_0 = 0,8$. Найденное при $r_0 = 0,8$ значение $\bar{a}$ принималось за начальное приближение при $r_0 = 0,7$ и так далее. Таблица подтверждает высказанные выше соображения об асимптотическом поведении $\delta_{\text{кр}}(r_0)$ при $r_0 \longrightarrow 0$ и $r_0 \longrightarrow 1$.

4. Сравнение с верхней оценкой

В таблицу 1 помещен столбец значений λ_0/e, где λ_0 - первое собственное число задачи

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} + \lambda v = 0, \qquad \left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=r_0} = 0, \qquad v|_{r=1} = 0. \tag{19}$$

Для произвольной области при однородных граничных условиях в работах [6],[10] было установлено, что число λ_0/e оказывается верхней оценкой $\delta_{\text{кр}}$ для соответствующей задачи о тепловом взрыве в этой области при тех же однородных граничных условиях. В ряде известных случаев удавалось установить, что λ_0/e является неплохим приближением к $\delta_{\text{кр}}$. Поэтому и в данном случае интересно сопоставить число λ_0/e с найденным значением $\delta_{\text{кр}}$.

Нахождение числа λ_0, конечно, не всегда простая задача. В данном случае, например, в соответствии с (19) $\sqrt{\lambda_0}$ находится как наименьший корень уравнения

$$J_1(\sqrt{\lambda}r_0)\left[J_0(\sqrt{\lambda}r_0)N_0(\sqrt{\lambda}) - N_0(\sqrt{\lambda}r_0)J_0(\sqrt{\lambda})\right] = \frac{2}{\pi r_0\sqrt{\lambda}}J_0(\sqrt{\lambda}), \tag{20}$$

где J_0,J_1 - бесселевы функции I рода, N_0 - функция Неймана[11]. Вряд ли решение уравнения (20) сколько-нибудь проще решения основного уравнения (15). Но для λ_0 существуют различные оценки и приближенные методы. В таблице 1 использовано приближение λ_0 сверху, усиливающее неравенство $\delta_{\text{кр}} < \lambda_0/e$, которое получается по методу Галеркина [5] с использованием лишь одной базисной функции:

$$v = \cos\frac{\pi}{2}\frac{r - r_0}{1 - r_0}, \tag{21}$$

удовлетворяющей граничным условиям (19).

Условие ортогональности (с весом r) невязки при подстановке (21) в (19) к базисной функции (21) приводит для λ_0 к приближенному значению (приближение сверху):

$$\lambda_0 \simeq \frac{1}{(1 - r_0)^2}\left[\frac{\pi^2}{4} + \frac{2}{\frac{1+r_0}{1-r_0} - \frac{4}{\pi^2}}\right]. \tag{22}$$

Простые вычисления при выводе (22) опускаем.

При $r_0 \longrightarrow 0$ точное значение λ_0 известно: $\lambda_0 = 5,78...$ [11]. Формула (22) дает $\lambda_0 \simeq 5,83$. Так что если для сплошного цилиндра $\lambda_0/e \simeq 2,13$ и отличается от точного значения $\delta_{\text{кр}} = 2$ примерно на 6,5%, то с использованием (22) λ_0/e составляет $\sim 2,14$ и отличается от $\delta_{\text{кр}} = 2$ на 7%. Эта точность не ухудшается при возрастании r_0. Формула (22) определяет λ_0 с погрешностью менее 1% и оценку $\delta_{\text{кр}} \leq \lambda_0/e$ практически не ухудшает. Как и в других, доступных для сравнения, случаях, эта оценка и здесь оказывается неплохим приближением к точному значению $\delta_{\text{кр}}$. Относительно такого сравнения для других геометрических форм и граничных условий см.[10], [12].

Литература

1. **Гришин А. М.** Некоторые задачи теории воспламенения //*Ж. прикл. механ. и техн. физики. 1962. №5.*

2. **Анисимов С. И.** Задача о тепловом взрыве для полого цилиндра //*Инженерно-физич. журн. 1964. №1. С.115.*

3. **Гришин А. М.** Исправление к работе "Некоторые задачи теории воспламенения "//*Ж. прикл. механ. и техн. физики. 1963. №2.*

4. **Худяев С. И.** Об одном классе интегрируемых уравнений в задачах горения и гидродинамики // *Матем. моделирование.1995. Т.7. №1. С.35–60.*

5. **Худяев С. И.** Приближенные методы математической физики. Уч. пособие. Сыктывкар: Сыкт. ун-т, 1998. 160с.

6. **Худяев С. И.** Математическая теория теплового взрыва. Черноголовка. 1984. 29с.(Препринт/Отделение Ин-та хим.физики АН СССР)

7. **Франк-Каменецкий Д. А.** Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.:Наука, 1987. 491с.

8. **Мержанов А. Г., Барзыкин В. В., Абрамов В. Г.** Теория теплового взрыва от Н.Н. Семенова до наших дней //*Химич.физика. 1996. Т.15. №6. С.3–44.*

9. **Худяев С. И.** Некоторые оценки собственных значений сферически-симметричных задач // *Численные методы решения*

задач математической физики. Сб. статей. М.Наука, 1966. С.68–74.

10. **Вольперт А. И., Худяев С. И.** Анализ в классах разрывных функций и уравнения матем.физики. М.:Наука, 1975. 394с.

11. **Янке Е., Эмде Ф.** Таблицы функций с формулами и кривыми. М.:Физматгиз, 1959. 420с.

12. **Boddington T., Gray P., Harvey D.I.** Thermal theory of spontaneous ignition: criticality in bodies of arbitrary shape//*Phil. trans. royal soc. London. 1971. V.270. №1207. P.467–506.*

Summary

Kasev D. W., Khudyaev S. I. Analysis of spontaneous ignition conditions for cylinder with thermal insulated hole

The paper is devoted to the culculations for the critical conditions of the thermal ignition of the cylinder with the canal in terms of the ratio of radii of the cylinder and the canal. The obtained result was compared with the theoretical upper limit.

Сыктывкарский университет *Поступила 25.09.98*