Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.3.1999

УДК 519.652

Кардинальная интерполяция дискретными сплайнами [1]

В. А. Желудев, А. Б. Певный

Рассматриваются дискретные сплайны $S(j)$, $j \in \mathbb{Z}$, с равноотстоящими узлами, которые могут расти как $O(|j|^s)$ при $|j| \to \infty$. Такие сплайны интересны с точки зрения цифровой обработки сигналов.

Введение

Большим разделом теории сплайнов является теория кардинальной интерполяции, т.е. интерполяции по бесконечной системе равноотстоящих узлов kh, $k \in \mathbb{Z}$. В работах [1], [5], [6] в качестве интерполирующего агрегата использовались сплайны $S(x)$ вещественного аргумента x. Однако при цифровой обработке сигналов некоторое преимущество имеют дискретные сплайны $S(j)$, заданные на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$. Дискретные сплайны появились в начале семидесятых годов ([7]), а недавно появились вновь как объект интенсивных исследований ([8](глава 6), [2], [4], [3]). Отметим также работу [9], посвященную вейвлетам дискретного аргумента. Большая часть этих работ связана с дискретными периодическими сплайнами. В этой работе исследуются дискретные непериодические сплайны медленного роста. В основном мы следуем работе [6].

В п.1 дается определение B-сплайна B_p порядка p, описываются его свойства. Дискретным сплайном $S(j)$ называется линейная комбинация сдвигов B-сплайна. В п.1.1 вводятся полиномы Эйлера-Фробениуса $T_p(x)$, связанные с B-сплайнами B_p, и доказывается положительность $T_p(x)$ при всех x. В п.2.1 вводятся экспоненциальные сплайны $E(x,j)$, зависящие от вещественного параметра x, а в п.2.2 на основе результата п.1.1 доказывается однозначная разрешимость задачи кардинальной

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 98-01-00196)

интерполяции. Заключительный раздел 3 посвящен самодвойственному сплайну $\varphi(j)$, сдвиги которого образуют ортонормированную систему в $\ell^2(\mathbb{Z})$, и эти же сдвиги образуют базис в пространстве дискретных сплайнов.

1. Дискретные В-сплайны

Дискретные сплайны определим на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$. Зафиксируем натуральные p, n, причем n—нечетное, $n = 2\nu + 1$. Определим дискретные В-сплайны $B_1(j), \dots, B_p(j)$ $(j \in \mathbb{Z})$ следующим образом. Положим

$$B_1(j) = \begin{cases} 1, & j \in -\nu : \nu, \\ 0, & \text{при остальных } j \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $-\nu : \nu$—множество целых чисел $\{-\nu, -\nu + 1, \dots, \nu\}$.

Далее используем рекуррентное определение $B_r = B_1 * B_{r-1}$, $r \in 2 : p$, или

$$B_r(j) = \sum_{k=-\nu}^{\nu} B_{r-1}(j-k), \ j \in \mathbb{Z}, \ r = 2, \dots, p.$$

Нетрудно подсчитать, что

$$B_2(j) = \begin{cases} n - |j|, & j \in -n+1 : n-1, \\ 0, & |j| \geq n. \end{cases} \tag{2}$$

График B_2 представляет собой "домик".

Лемма 1. *В-сплайн B_p и обладает следующими свойствами:*

$$B_p(-j) = B_p(j) \text{ для любого целого } j; \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &B_p(j) > 0 \text{ при } -p\nu \leq j \leq p\nu \text{ и} \\ &B_p(j) = 0 \text{ при остальных } j; \end{aligned} \tag{4}$$

$$B_p(\pm p\nu) = 1; \tag{5}$$

При $p > 1$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &B_p(-p\nu) < B_p(-p\nu + 1) < \ldots < B_p(-1) < B_p(0), \\ &B_p(0) > B_p(1) > \ldots > B_p(p\nu). \end{aligned}$$

Доказательство (3),(4),(5) легко проводится индукцией по p. Последние неравенства также доказываются по индукции. При $p = 2$

неравенства следуют из явной формулы (2). Допустим, что результат верен для B_{p-1}, где $p \geq 3$. При $j \in -p\nu : -(p-2)\nu$

$$B_p(j) = \sum_{i=-(p-1)\nu}^{j+\nu} B_{p-1}(i).$$

Отсюда следует, что $B_p(j)$ строго возрастает на $-p\nu : -(p-2)\nu$.

Пусть теперь $j, j+1 \in -(p-2)\nu : 0$. Тогда

$$\begin{aligned} B_p(j+1) &= B_{p-1}(j+1-\nu) + \ldots + B_{p-1}(j+\nu) + B_{p-1}(j+1+\nu) \\ &= B_p(j) + [B_{p-1}(j+1+\nu) - B_{p-1}(j-\nu)]. \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках положительно (например, при $j = -1$ имеем $B_{p-1}(\nu) - B_{p-1}(-1-\nu) = B_{p-1}(\nu) - B_{p-1}(\nu+1) > 0$). Поэтому $B_p(j+1) > B_p(j)$. Строгое возрастание B_p на $-p\nu : 0$ доказано. Убывание на $0 : p\nu$ следует из (3). ■

Отметим, что в силу определения и леммы B-сплайн B_p принимает только целые неотрицательные значения. Для нас главным свойством B-сплайна будет свойство (4): носителем B_p является целочисленный отрезок $-p\nu : p\nu$. Следует также заметить, что B-сплайн $B_p(j)$ не является следом непрерывного B-сплайна на $\mathbb{Z}$, а является самостоятельным объектом, достойным изучения.

Формула (2) показывает, что $B_2(j)$ является кусочно-полиномиальной функцией первой степени. На самом деле каждый B-сплайн B_p является кусочно-полиномиальной функцией степени $p-1$. Чтобы доказать это используем z-преобразование [10].

Пусть $f = \{f(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ —последовательность такая, что $f(k) = 0$ для всех $k < -k_0$. Тогда z-преобразованием f называется функция переменной z:

$$\zeta[f] = F(z) = \sum_{k=-k_0}^{\infty} f(k)\, z^k, \quad 0 < |z| < \rho, \tag{6}$$

где ρ—радиус сходимости ряда.

Для нас важно свойство, связанное с дискретной сверткой :

$$\zeta[f * g] = \zeta[f]\, \zeta[g], \tag{7}$$

и сдвиговое свойство :

$$z^l\, \zeta[f(\cdot)] = \zeta[f(\cdot - l)]. \tag{8}$$

Через $k_+^{(l)}$ будем обозначать усеченный факториальный полином:

$$k_+^{(l)} = \begin{cases} k(k+1)\dots(k+l-1), & k \in 1:\infty, \\ 0, & k \le 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{9}$$

В частности, $k_+^{(0)} = 1$ при $k > 0$ и $k_+^{(0)} = 0$ при $k \le 0$. Имеем

$$\zeta[k_+^{(l)}] = \frac{l!z}{(1-z)^{l+1}}. \tag{10}$$

Легко видеть, что

$$\zeta[B_1] = \sum_{j=-\nu}^{\nu} z^j = z^{-\nu}(1 + z + \ldots + z^{n-1}).$$

Используя свойство (7), получаем следующее утверждение.

Лемма 2. *Z-преобразование от B-сплайна дается формулой*

$$\zeta[B_p] = \sum_{j=-p\nu}^{p\nu} B_p(j)z^j = z^{-p\nu}(1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1})^p.$$

Таким образом, $B_p(j)$ есть коэффициент при $z^{j+p\nu}$ в полиноме $(1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1})^p$. Теперь можно получить кусочно-полиномиальное представление B-сплайна.

Теорема 1. *B-сплайн B_p есть кусочно-полиномиальная функция степени $p-1$:*

$$B_p(j) = \frac{1}{(p-1)!}\sum_{r=0}^{p}(-1)^r \binom{p}{r} (j + p\nu + 1 - rn)_+^{(p-1)}. \tag{11}$$

Доказательство. По лемме 2

$$\zeta[B_p] = \frac{(1-z^n)^p}{z^{p\nu}(1-z)^p} = \frac{\sum_{r=0}^{p}(-1)^r\binom{p}{r}z^{rn}}{z^{p\nu}(1-z)^p} = \sum_{r=0}^{p}(-1)^r\binom{p}{r}\frac{z^{rn-p\nu-1}}{(p-1)!}\zeta[j_+^{(p-1)}]. \tag{12}$$

Отсюда следует (11). ■

Из теоремы следует, что при $j \in -p\nu + rn : -p\nu + (r+1)n - 1$ B-сплайн B_p совпадает с некоторым полиномом степени $p-1$. Поэтому точки вида $-p\nu + kn$, $k \in 0 : p$, можно назвать узлами сплайна B_p.

Отметим также свойство

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} B_p(j) = n^p. \tag{13}$$

которое следует из леммы 2 при $z = 1$.

Лемма 3. *Для всех целых k, q справедливо соотношение*

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} B_p(j-kn)B_p(j-qn) = B_{2p}((k-q)n). \tag{14}$$

Доказательство основано на свойстве $B_p * B_p = B_{2p}$. ■

1.1. Полиномы Эйлера - Фробениуса

Определим четный тригонометрический полином, который будет играть важную роль в дальнейшем. Положим $b_p(k) = B_p(kn)$. Напомним, что $b_p(-k) = b_p(k)$ и $b_p(k)$ отлично от нуля, если $|k| \le \mu = \left[\frac{p\nu}{n}\right] = \left[\frac{p(n-1)}{2n}\right]$. Здесь $[\alpha]$ означает целую часть α.

Четный тригонометрический полином

$$T_p(x) = \sum_{k=-\mu}^{\mu} b_p(k)e^{ikx} = b_p(0) + 2\sum_{k=1}^{\mu} b_p(k)\cos kx \tag{15}$$

называется полиномом Эйлера-Фробениуса (см.[5]).

Основное свойство этих полиномов—положительность дл всех x. Чтобы установить это, понадобится следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть m—четное. Для всех $\lambda \in 1 : m/2$ и любого натурального p функция*

$$G(\lambda,p) := \sum_{s=0}^{n-1} \left(\frac{(-1)^s}{\sin\frac{\pi(sm+\lambda)}{mn}}\right)^p \tag{16}$$

строго положительна и справедливы неравенства

$$G(\lambda,p) \ge \begin{cases} 1, & p\text{—нечетное} \\ \left(\sin\frac{\pi\lambda}{mn}\right)^{-p}, & p\text{—четное} \end{cases} \tag{17}$$

Доказательство. Оценка для четных p устанавливается легко, так как в этом случае все члены суммы $G(\lambda,p)$ положительны и, поэтому, значение суммы превосходит первый член $\left(\sin\frac{\pi\lambda}{mn}\right)^{-p}$. Для нечетных p ситуация более сложная.

Функция $q_\lambda(x) = \sin\frac{\pi(xm+\lambda)}{mn}$ имеет единственный максимум на отрезке $[0, n-1]$ в точке $x_0 = n/2 - \lambda/m$. На отрезках $[0, x_0]$ и $[x_0, n-1]$ функция строго монотонна. Поэтому минимальный член в положительной последовательности

$$h_\lambda(s) = \left(\sin\frac{\pi(sm+\lambda)}{mn}\right)^{-1}, \quad s \in 0 : n-1,$$

есть $h_\lambda(\nu)$, где $\nu = \frac{n-1}{2}$ и подпоследовательности $\{h_\lambda(s)\}_{s=0}^{\nu}$ and $\{h_\lambda(s)\}_{s=\nu+1}^{n-1}$ строго монотонны.

Вернемся к сумме $G(\lambda, p)$. Случаи четного и нечетного ν слегка различаются.

1. В случае когда ν—четное, запишем сумму так:

$$\begin{aligned} G(\lambda,p) &= \sum_{s=0}^{n-1}\Big((-1)^s h_\lambda(s)\Big)^p \\ &= \sum_{s=0}^{\nu-1}\Big((-1)^s h_\lambda(s)\Big)^p + h_\lambda(\nu)^p + \sum_{s=\nu+1}^{n-1}\Big((-1)^s h_\lambda(s)\Big)^p. \quad (18)\end{aligned}$$

Благодаря монотонности суммы в (18) положительны. Получаем

$$G(\lambda,p) > h_\lambda(\nu)^p \geq 1. \quad (19)$$

2. Когда ν—нечетное, имеем

$$G(\lambda,p) = \sum_{s=0}^{\nu}\Big((-1)^s h_\lambda(s)\Big)^p + h_\lambda(\nu+1)^p + \sum_{s=\nu+2}^{n-1}\Big((-1)^s h_\lambda(s)\Big)^p.$$

Отсюда выводим неравенство

$$G(\lambda,p) > h_\lambda(\nu+1)^p > h_\lambda(\nu)^p \geq 1. \quad (20)$$

■

Теперь можно установить основное свойство полиномов Эйлера-Фробениуса.

Теорема 2. *Полином $T_p(x)$ строго положителен для всех x.*

Доказательство. Возьмем любое четное m, удовлетворяющее неравенству $m \geq 2\mu + 2$. Обозначим $\omega_m = e^{2\pi i/m}$. Тогда

$$T_p\left(\frac{2\pi l}{m}\right) = \sum_{k=-\mu}^{\mu} b_p(k)\omega_m^{-kl} = \sum_{k=-m/2}^{m/2-1} b_p(k)\omega_m^{-kl} = F_m(b_p)(l).$$

Здесь $F_m(b_p)$ обозначает m-точечное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) последовательности b_p. Представим его в явном виде. Для этого положим $N = mn$ и найдем N-точечное ДПФ последовательности $\{B_p(j)\}_{j=-N/2}^{N/2-1}$. Для B-сплайнов первого порядка и $l \in -N/2 : N/2-1$ имеем:

$$u(l) := F_N(B_p)(l) = \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} M_1(j)\omega_N^{-jl} = \sum_{j=-\nu}^{\nu} 1\cdot\omega_N^{-jl} = \begin{cases} 2\nu+1 = n, & l = 0, \\ \dfrac{\sin \pi l/m}{\sin \pi l/N}, & l \neq 0. \end{cases}$$

По сверточному свойству

$$F_N(B_p)(l) = [F_N(M_1)(l)]^p = u^p(l).$$

Продолжим периодически последовательность $u(l)$ с периодом N. Тогда $u(sm) = 0$ при $s \in 1 : n-1$ и

$$B_p(j) = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} u^p(l)\omega_N^{lj}, \quad j \in -N/2 : N/2-1. \tag{21}$$

Отсюда для $k \in -\mu : \mu$

$$b_p(k) = B_p(kn) = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} u^p(l)\omega_m^{lk}.$$

Представляя l в виде $l = sm + r$, $s \in 0 : n-1$, $r \in 0 : m-1$, приходим к соотношению

$$b_p(k) = \frac{1}{m}\sum_{r=0}^{m-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} u^p(sm+r)\right]\omega_m^{rk}. \tag{22}$$

Для четных p равенство (22) установлено в [4]. Из (22) следует, что

$$\begin{aligned} T_p\left(\frac{2\pi\lambda}{m}\right) &= F_m(b_p)(\lambda) = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} u^p(sm+\lambda) = \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{n}(\sin \lambda\pi/m)^p\, G(\lambda, p), & \lambda \in 1 : m-1, \\ n^{p-1}, & \lambda = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{23}$$

Функция $G(\lambda, p)$ определена в (16).

Достаточно вычислить $T_p\left(\frac{2\pi\lambda}{m}\right)$ для $\lambda \in 1 : m/2$. В интервале $(0, \frac{\pi}{2})$ справедливы неравенства $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$. В результате получаем оценки

$$\left(\frac{2\lambda}{m}\right)^p < \left(\sin\frac{\lambda\pi}{m}\right)^p, \quad \left(\frac{mn}{\lambda\pi}\right)^p < \left(\sin\frac{\lambda\pi}{mn}\right)^{-p}. \tag{24}$$

Снова рассмотрим случаи четного и нечетного p .

1. Для четного p оценки (19) и (17) прямо приводят к неравенству

$$T_p\left(\frac{2\pi\lambda}{m}\right) \geq \frac{1}{n}\left(\frac{2n}{\pi}\right)^p > 0. \tag{25}$$

2. Для нечетного p справедлива только оценка $G(\lambda, p) \geq 1$. Имеем

$$T_p\left(\frac{2\pi\lambda}{m}\right) \geq \frac{1}{n}\left(\frac{2\lambda}{m}\right)^p > 0. \tag{26}$$

При неграниченном возрастании m в пределе получаем оценки

$$T_p(x) \geq \frac{1}{n}\left(\frac{2n}{\pi}\right)^p, \ x \in (-\infty, \infty)$$

при p четном и $T_p(x) \geq \frac{1}{n}(x/\pi)^p \ \forall x \in [0, \pi]$ при p нечетном. Поскольку $T_p(0) = n^{p-1} > 0$ и $T_p(2\pi - x) = T_p(x)$ получаем, что $T_p(x) > 0 \ \forall x$. ■

2. Дискретные сплайны и кардинальная интерполяция

В этом разделе также считаем n нечетным, $n = 2\nu+1$. Это позволяет рассматривать центральные В-сплайны $B_p(j)$, введенные в разделе 1.

2.1. Экспоненциальные сплайны Сначала рассмотрим экспоненциальные сплайны

$$E(x, j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-ilx} B_p(j - ln). \tag{1}$$

При каждом $j \in \mathbb{Z}$ в сумме (1) конечное число слагаемых, поэтому при фиксированном j функция $E(x, j)$ является тригонометрическим полиномом от x. Аналогичные сплайны рассматривались в [5, с.17] и [6]. Имеем с учетом результатов раздела 1.1

$$E(x, 0) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_p(-l) e^{-ilx} = T_p(x) > 0, \tag{2}$$

$$E(x, j - kn) = e^{ikx}E(x, j). \tag{3}$$

При $j = 0$ получим

$$E(x, kn) = e^{-ikx}T_p(x). \tag{4}$$

. Отсюда следует, что функция $S(j) = E(x,j)/T_p(x)$ решает интерполяционную задачу $S(kn) = e^{-ikx}, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Кроме свойств (2)-(3) отметим также следующее равенство

$$B_p(j) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} E(x,j)\,dx, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Действительно, пусть $j \in kn : (k+1)n - 1$. Тогда

$$E(x,j) = \sum_{l=k-\mu}^{k+\mu+1} e^{-ilx}B_p(j - ln), \tag{6}$$

где, как и раньше, $\mu = [p\nu/n]$. Действительно, при $l \notin k - \mu : k + \mu + 1$ точки $j - ln$ не принадлежат $\operatorname{supp} B_p = -p\nu : p\nu$ и поэтому $B_p(j - ln) = 0$. Отсюда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} E(x,j)\,dx = \sum_{l=k-\mu}^{k+\mu+1} \delta(l)B_p(j - ln) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(l)B_p(j - ln) = B_p(j).$$

Здесь $\delta(0) = 1$, $\delta(l) = 0$ при $l \neq 0$. Из (6) следует неравенство $|E(x,j)| \leq C_p$, где $C_p = (2\mu + 2)B_p(0)$.

2.2. Задача кардинальной интерполяции Дискретные сплайны удобно определить, используя язык теории 2π-периодических распределений. Пусть $\mathcal{D}$—пространство бесконечно дифференцируемых 2π-периодических функций, а $\mathcal{D}'$— пространство распределений на $\mathcal{D}$.

Определение. Дискретным сплайном порядка p назовем функцию

$$S(j) = \frac{1}{2\pi}\langle C, E(\cdot, j)\rangle, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{7}$$

где $C \in \mathcal{D}'$. Множество всех сплайнов порядка p обозначим $\mathcal{S}_p$.

Это определение оправдано. При фиксированном j в ряде (1) только конечное число слагаемых отлично от нуля. Почленно применяя функционал C, получаем

$$S(j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c(l)B_p(j - ln), \tag{8}$$

где $c(l) = \frac{1}{2\pi}\langle C, e^{-ilx}\rangle$—коэффициенты Фурье распределения C.

Нас будет интересовать задача кардинальной интерполяции. Дана последовательность $z = \{z(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$, удовлетворяющая условию

$$|z(k)| \leq M(1+|k|)^s, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

при некоторых M, s. Требуется найти сплайн $S \in \mathbb{S}_p$ такой, что

$$S(kn) = z(k), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

Эта задача легко решается. Действительно, в силу (4) уравнение (10) переписывается в виде

$$S(kn) = \frac{1}{2\pi}\langle C, T_p(x)e^{-ikx}\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle CT_p, e^{-ikx}\rangle = z(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Итак, распределение CT_p имеет коэффициенты Фурье $z(k)$, т.е.

$$CT_p = Z, \quad \text{где} \quad Z(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z(k)e^{ikx}.$$

В силу (9) $Z \in \mathcal{D}'$. Отсюда $C = VZ$, где $V(x) = 1/T_p(x)$ (по теореме 2 функция $V \in \mathcal{D}$). Тем самым задача (10) имеет решение и оно единственно.

Коэффициенты $c = \{c(k)\}$ получаются в виде свертки $c = v * z$, где $v = \{v(k)\}$—последовательность коэффициентов Фурье функции V.

3. Отцовские сплайн-вейвлеты

Рассмотрим сплайн вида

$$\varphi(j) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi(x)E(x,j)dx, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где функция ξ предполагается бесконечно-дифференцируемой и 2π-периодической, т.е. $\xi \in\mathcal{D}$. Как отмечалось выше, функция φ представляется в виде

$$\varphi(j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \xi_l B_p(j - ln), \tag{2}$$

где $\xi_l = \frac{1}{2\pi}\langle \xi, e^{-ilx}\rangle$—коэффициенты Фурье функции $\xi(x)$. Поскольку $\xi \in\mathcal{D}$, то коэффициенты ξ_l убывают при $l \to \infty$ быстрее любой степени $1/l$, а тогда и $\varphi(j)$ убывает при $j \to \infty$ быстрее любой степени $1/j$.

Определение. Сплайн φ называется отцовским вейвлетом (ОВ), если сдвиги $\{\varphi(\cdot - kn)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образуют базис в пространстве сплайнов $\mathcal{S}_p$, т.е. всякий сплайн $S \in \mathcal{S}_p$ разлагается в ряд

$$S(j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k)\varphi(j - kn),$$

сходящийся для каждого $j \in \mathbb{Z}$.

Теорема 3. *Если $\xi(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, то сплайн φ является ОВ.*

Доказательство. Ввиду свойства (3) в разделе 2.1

$$\varphi(j - kn) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikx}\xi(x)E(x,j)dx, \qquad (3)$$

т.е. $\varphi(j + kn)$ является коэффициентом Фурье функции $\xi(x)E(x,j)$, поэтому

$$\xi(x)E(x,j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\varphi(j - kn), \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (4)$$

Пусть $\xi(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Тогда для произвольного сплайна $S(j) = \langle C, E(\cdot, j)\rangle$, где $C \in \mathcal{D}'$, имеем

$$S(j) = \langle C/\xi, \xi(x)E(x,j)\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle C/\xi, e^{-ikx}\rangle\varphi(j - kn), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку любой сплайн разлагается по системе сдвигов $\{\varphi(\cdot - kn)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, то φ—ОВ. ∎

Пусть кроме ОВ φ есть также ОВ

$$\psi(j) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \eta(x)E(x,j)dx, \qquad (6)$$

где $\eta \in \mathcal{D}$, $\eta(x) \neq 0$ для всех x.

Определение. ОВ φ и ψ называются двойственными, если

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi(j - kn)\overline{\psi(j - qn)} = \delta(k - q), \quad k, q \in \mathbb{Z}, \qquad (7)$$

где черта обозначает комплексное сопряжение.

Установим равенство типа Парсеваля.

Теорема 4. *Для вейвлетов (1) и (6) справедливо равенство*

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi(j)\overline{\psi(j)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi(x)\overline{\eta(x)}T_{2p}(x)dx. \tag{8}$$

Доказательство. Имеем из (6)

$$\varphi(j)\overline{\psi(j)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{\eta(x)}[\overline{E(x,j)}\varphi(j)]dx. \tag{9}$$

Рассмотрим сумму

$$\sigma(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \overline{E(x,j)}\varphi(j). \tag{10}$$

В силу (2)

$$\overline{E(x,j)}\varphi(j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \xi_l \overline{E(x,j)}B_p(j-ln). \tag{11}$$

Имеем

$$\overline{E(x,j)}B_p(j-ln) = \sum_{k=l-p}^{l+p} e^{ikx}B_p(j-kn)B_p(j-ln). \tag{12}$$

Отметим, что $B_p(j-kn)B_p(j-ln) = 0$ при $|kn-ln| > p(n-1)$. Это выполняется .при $|k-l| > p$. Поэтому в (12) суммируем только по $k \in l-p : l+p$.

Просуммируем (12) по $j \in \mathbb{Z}$. По лемме 3

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \overline{E(x,j)}B_p(j-ln) = \sum_{k=l-p}^{l+p} e^{ikx}b_{2p}(k-l) = e^{ilx}T_{2p}(x).$$

Суммируя (11) по всем $j \in \mathbb{Z}$, получаем

$$\sigma(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \xi_l e^{ilx}T_{2p}(x).$$

Ряд (10) сходится равномерно по x. Суммируя (9) по всем $j \in \mathbb{Z}$, получаем (8). ■

Теперь можно сформулировать критерий двойственных ОВ.

Теорема 5. *Сплайны (1) и (6) являются двойственными ОВ* $\Leftrightarrow$ *выполнено соотношение* $\xi(x)\overline{\eta(x)}T_{2p}(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Сдвиги $\varphi_1(j) = \varphi(j - kn)$ и $\psi_1(j) = \psi(j - qn)$ являются ОВ, соответствующими функциям $\xi_1(x) = e^{ikx}\xi(x)$ и $\eta_1(x) = e^{iqx}\eta(x)$ (см. формулу (3)). По теореме 4

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi(j - kn)\overline{\psi(j - qn)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-q)x}\xi(x)\overline{\eta(x)}T_{2p}(x)dx.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.■

Доказанная теорема позволяет легко строить пары двойственнных ОВ. Рассмотрим два важнейших случая.

1.*Самодвойственный вейвлет.* Получается при $\xi(x) = \eta(x) = 1/\sqrt{T_{2p}(x)}$. Тогда

$$\varphi(j) = \psi(j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{E(x,j)}{\sqrt{T_{2p}(x)}}dx.$$

Функции E и T_{2p} обладают свойствами: $E(x,-j) = \overline{E(x,j)} = E(-x,j)$, $T_{2p}(-x) = T_{2p}(x)$. Отсюда $\varphi(-j) = \varphi(j)$ и φ вещественно для всех $j \in \mathbb{Z}$. Сдвиги $\{\varphi(\cdot - kn)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образуют ортонормированную систему в $\ell^2(\mathbb{Z})$. В непрерывном случае самодвойственый вейвлет исследовали Battle[11], Lemarié[12] и V.A.Zheludev[6].

2. *Вейвлет, двойственный B-сплайну.* Согласно формуле (5) раздела 2 при $\xi(x) \equiv 1$ получаем $\varphi(j) = B_p(j)$. Двойственный вейвлет ψ определяется формулой

$$\psi(j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{E(x,j)}{T_{2p}(x)}dx.$$

Здесь также ψ веществен и четен.

Литература

1. **Schoenberg I. J.** Cardinal interpolation and spline functions //*J. Approx. Theory. 1969. V.2. №2. P.167–206.*

2. **Малоземов В.Н., Певный А.Б.** Дискретные периодические B-сплайны // *Вестник СПб. ун-та. Сер.1. 1997. №4. С. 14–19.*

3. **Певный А.Б.** Дискретные периодические сплайны и решение задачи о бесконечной цилиндрической оболочке //*Вестник Сыкт. ун-та. Сер.1. 1996. Вып.2. С.187–200.*

4. **Малоземов В.Н., Певный А.Б.** Дискретные периодические сплайны и их вычислительные приложения // *Ж. вычисл. мат. и матем. физ. 1998. Т.38. №9.*

5. **Schoenberg I. J.** Cardinal spline interpolation. *Regional Conf. Monogr. №12. Philadelphia: SIAM. 1973.*

6. **Zheludev V.A.** Integral representation of slowly growing equidistant splines and spline wavelets. Technical Report 5-96. Tel Aviv University. School of Math. Sciences. Tel Aviv, 1996.

7. **Schumacker L.L.** Constructive aspects of discrete polynomial spline functions // *In: Approximation Theory, G.G.Lorentz ed. 1973. P.469–476.*

8. **de Boor C., Höllig K., Riemenschneider S.** Box splines. New York: Springer-Verlag, 1994.

9. **Петухов А.П.** Дисретные периодические всплески // *Алгебра и анализ. 1996. Т.8. Вып.3. С. 151–183.*

10. **Jury E.I.** Theory and application of the Z-transform method. New York: John Wiley & Sons. 1964.

11. **Battle G.** A block spin construction of ondelettes. Part I. Lemarié functions // *Comm. Math. Phys. 1987. V.110. P. 601–615.*

12. **Lemarié P.G.** Ondelettes à localization exponentielle // *J. de Math. Pures et Appl. 1988. V.67. P. 227–236.*

Summary

Zheludev V.A., Pevnyi A. B. On the cardinal interpolation by discrete splines

In this paper we consider equidistant discrete splines $S(j)$, $j \in \mathbb{Z}$, which may grow as $O(|j|)$ as $|j| \to \infty$. Such splines are of intrest for the purposes of digital signal processing. We give the definition of the B-spline of the order p and describe their properties. We define the discrete spline as a linear combination of shifts of the B-spline. It is shown that the problem of the cardinal interpolation has the unique solution.

Тель-Авивский университет
Сыктывкарский университет

Поступила 20.09.98