Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.3.1999

УДК 519.717

Инварианты графов, определяемые через оптимальные нумерации вершин и операция соединения графов [1]

П. А. Головач

В работе рассматривается поведение ряда инвариантов графов, определяемых через оптимальные (по различным критериям) нумерации вершин, а также близких численных характеристик графов, при выполнении одной бинарной операции над графами. Речь идет о так называемом соединении графов. В статье приводятся формулы, позволяющие вычислить величину вершинного разделения, профиль, путевую ширину, древесную ширину и поисковое число соединения двух графов, а также оценки ширины ленты и ширины разреза соединения графов через характеристики операндов.

В настоящее время известна и активно изучается целая группа инвариантов графов, определяемых через оптимальные (по различным критериям) нумерации вершин графа, а также близких численных характеристик графов. Это такие величины, как ширина ленты (bandwidth) (после названий инвариантов на русском языке мы приводим их оригинальные названия, поскольку не существует общепринятых переводов), ширина разреза (cutwidth), профиль (profile), величина вершинного разделения (vertex separation number), поисковое число (search number), путевая ширина (pathwidth), древесная ширина (treewidth), а также некоторые другие. Эти характеристики графов представляют интерес как с теоретической точки зрения (особенно такие инварианты, как путевая ширина и древесная ширина графов, введенные и активно исследовавшиеся Робертсоном и Сеймуром (см., в частности, [9, 10, 11, 12, 13, 14])), так и с прикладной точки зрения, поскольку задачи оптимизации, с помощью которых вводятся данные инварианты,

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №96-02-00285

естественным образом возникают в электронике, программировании, биологии и других областях. Более подробную информацию об этих величинах можно получить из обзоров [1, 3, 7].

При исследовании инвариантов графов всегда является интересным вопрос об их поведении при различных операциях над графами. Для большинства операций в случае рассматриваемых нами характеристик графов удается только получить более или менее точные оценки. Однако существует одна бинарная операция, для которой удается получить более точные результаты. Это операция соединения графов. Данная операция интересна тем, что с ее использованием, а также с использованием операции объединения графов, можно охарактеризовать кографы, являющиеся важным и интересным классом графов. В настоящей работе приводятся точные формулы, позволяющие вычислить величину вершинного разделения, профиль, поисковое число, а также путевую ширину и древесную ширину соединения графов через характеристики операндов. Кроме того, приводятся оценки ширины ленты и ширины разреза соединения графов. Используя эти формулы, можно построить эффективные (полиномиальные) точные и приближенные алгоритмы для вычисления перечисленных характеристик графов для кографов. Такой алгоритм, предназначенный для вычисления путевой и древесной ширины кографов, приведен в [2].

Не все результаты, приведенные в работе, являются новыми, однако мы сочли полезным собрать и представить их вместе, так как они, по существу, являются однотипными.

1. Основные понятия

В этой части вводятся основные определения, используемые в данной работе.

Пусть G — граф с n вершинами. Отметим сразу, что мы будем рассматривать только простые графы. Через $V(G)$ будет обозначаться множество вершин графа G, а через $E(G)$ — множество ребер.

Введем теперь инварианты графов, определяемые через оптимальные нумерации вершин, рассматриваемые в данной работе. Все эти определения однотипны.

Нумерацией вершин графа G называется взаимно однозначное отображение $f\colon V(G) \to \{1, \dots, n\}$.

Шириной ленты графа G при нумерации вершин f называется величина

$$bw(G, f) = \max\{|f(u) - f(v)| \colon (u, v) \in E(G)\},$$

а шириной ленты графа G — величина

$$bw(G) = \min\{bw(G, f): f \text{ – нумерация вершин } G\}.$$

Наряду с этой величиной рассматривается также характеристика графов, получающаяся, если в определении ширины ленты поменять максимум и минимум местами. Положим

$$sep(G, f) = \min\{|f(u) - f(v)|: (u, v) \in E(G)\},$$

где f — нумерация вершин графа G. Величина

$$sep(G) = \min\{sep(G, f): f \text{ – нумерация вершин } G\}$$

называется разделительным числом (separation number) графа G.

Шириной разреза графа G при нумерации вершин f называется величина

$$cw(G, f) = \max_{i \in \overline{1,n}} |\{(u, v) \in E(G): f(u) \leq i, f(v) > i\}|,$$

а шириной разреза графа G — величина

$$cw(G) = \min\{cw(G, f): f \text{ – нумерация вершин } G\}.$$

Величиной вершинного разделения графа G при нумерации вершин f называется величина

$$vs(G, f) = \max_{i \in \overline{1,n}} |\{u \in V(G): f(u) \leq i, \text{ и существует}$$

$$\text{ребро } (u, v) \text{ такое, что } f(v) > i\}|,$$

а величиной вершинного разделения графа G — величина

$$vs(G) = \min\{vs(G, f): f \text{ – нумерация вершин } G\}.$$

Для того чтобы определить профиль графа, введем следующее обозначение. Если u, v — вершины графа, то будем писать $u \cong v$ в том случае, если либо $u = v$, либо вершины u и v являются смежными. Профилем графа G при нумерации вершин f называется величина

$$p(G, f) = \sum_{u \in V(G)} (f(u) - \min\{f(v): v \in V, v \cong u\}),$$

а профилем графа G — величина

$$p(G) = \min\{p(G, f) \colon f - \text{нумерация вершин } G\}.$$

Как легко видеть, все эти инварианты различаются только критерием, по которому проводится оптимизация. Этим численным характеристикам близки некоторые другие, определяемые с помощью иных задач оптимизации. В частности, это такие величины, как путевая ширина и древесная ширина графов, введенные Сеймуром и Робертсоном.

Для того чтобы ввести путевую ширину графа, необходимо сначала определить путевую декомпозицию. Путевой декомпозицией графа G называется путь P, каждой вершине которого v сопоставлено некоторое множество $X_v \subseteq V(G)$ таким образом, что выполнены следующие условия:

1. каждое ребро G имеет оба конца в некотором множестве X_v,

2. для любых $u, v, w \in V(P)$, таких, что вершина v лежит на пути P между вершинами u и w, $X_u \cap X_w \subseteq X_v$,

3. $\bigcup\limits_{v \in V(P)} X_v = V(G)$.

Шириной путевой декомпозиции называется величина

$$\max\{|X_v| \colon v \in V(P)\} - 1.$$

Путевая ширина графа определяется как минимальная ширина путевых декомпозиций. Путевая ширина графа G обозначается через $pw(G)$.

Заметим сразу (см. [5]), что для любого графа G $pw(G) = vs(G)$.

Древесная ширина графа определяется аналогично, только вместо пути в определении фигурирует дерево. Древесной декомпозицией графа G называется дерево T, каждой вершине которого v сопоставлено некоторое множество $X_v \subseteq V(G)$ таким образом, что выполнены следующие условия:

1. каждое ребро G имеет оба конца в некотором множестве X_v,

2. для любых $u, v, w \in V(T)$, таких, что вершина v лежит на пути в дереве T, соединяющем вершины u и w, $X_u \cap X_w \subseteq X_v$,

3. $\bigcup\limits_{v \in V(T)} X_v = V(G)$.

Шириной древесной декомпозиции называется величина

$$\max\{|X_v| : v \in V(T)\} - 1.$$

Соответственно, древесная ширина графа определяется как минимальная ширина древесных декомпозиций. Древесная ширина графа G обозначается через $tw(G)$.

Еще одним инвариантом графов, тесно связанным с характеристиками графов, определяемыми через оптимальные нумерации вершин, является поисковое число графа, введенное Т.Д.Парсонсом и (независимо от него) Н.Н.Петровым (см. [8, 18]). Здесь мы ограничимся неформальным описанием задачи, с помощью которой определяется поисковое число.

Предположим, что на связном графе G (удобно считать этот граф топологическим графом в $\mathbf{R}^3$) находится убегающий и группа преследователей, которые могут перемещаться по вершинам и ребрам графа непрерывным образом. Считается, что преследователи не располагают никакой информацией о положении и действиях убегающего. Убегающий считается пойманным преследователем, если они оказываются в одной точке. Поисковым числом графа G называется минимальная численность команды преследователей такая, что они могут действовать так, чтобы гарантировать поимку убегающего при любом его поведении. Поисковое число графа G обозначается через $s(G)$. Говоря о связях поискового числа с упомянутыми выше инвариантами можно отметить, в частности, что для любого графа G $vs(G) \leq s(G) \leq vs(G) + 2$.

Определим теперь операцию соединения графов G_1, G_2. Пусть $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$ (в дальнейшем мы будем считать, что это свойство всегда выполняется). Соединением графов G_1 и G_2 (см. [19]) называется граф с множеством вершин $V(G_1) \cup V(G_2)$ и множеством ребер $E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(u,v) : u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$. Обозначается соединение графов G_1 и G_2 через $G_1 + G_2$.

Напомним, что объединением графов G_1 и G_2 (см. [19]) называется граф с множеством вершин $V(G_1) \cup V(G_2)$ и множеством ребер $E(G_1) \cup E(G_2)$. Обозначается объединение графов G_1 и G_2 через $G_1 + G_2$.

Граф G называется кографом, если у него нет порожденных подграфов, слвпадающих с путем с четырьмя вершинами.

Известно, что кографы можно определить иначе, используя операции соединения и объединения графов. Граф G является кографом, если выполнено одно из следующих утверждений:

1. $|V(G)| = 1$;

2. Существуют кографы $G_1, G_2, \ldots, G_k$ такие, что $G = G_1 + G_2 + \ldots + G_k$;

3. Существуют кографы $G_1, G_2, \ldots, G_k$ такие, что $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_k$.

В [4] приведен эффективный алгоритм (с временной сложностью $O(n+m)$, где n — число вершин, а m — число ребер графа), позволяющий в соответствии с приведенным определением строить последовательно разбиения кографа на "составляющие" его кографы. Это позволяет (см. [2]) получать полиномиальные точные и приближенные алгоритмы для вычисления численных характеристик кографов, для которых удается получить формулы, связывающие значения этих величин соединение и объединения графов и характеристики операндов. Легко видеть, что вычислить рассматриваемые нами величины для объединения не представляет труда. Если G_1, G_2 — графы, то

$$bw(G_1 + G_2) = \max bw(G_1), bw(G_2),$$

$$cw(G_1 + G_2) = \max cw(G_1), cw(G_2),$$

$$vs(G_1 + G_2) = \max vs(G_1), vs(G_2),$$

$$pw(G_1 + G_2) = \max pw(G_1), pw(G_2),$$

$$tw(G_1 + G_2) = \max tw(G_1), tw(G_2),$$

$$s(G_1 + G_2) = \max s(G_1), s(G_2),$$

$$p(G_1 + G_2) = p(G_1) + p(G_2).$$

Таким образом, главная трудность заключается в получении формул для соединения графов.

2. Точные формулы

В этом разделе приводятся формулы, позволяющие определить значения величины вершинного разделения, профиля, путевой ширины, древесной ширины и поискового числа соединения графов через характеристики операндов. Данная часть работы носит обзорный характер, поскольку в ней приводятся уже известные результаты.

Начнем с величины вершинного разделения графа. Мы приведем полностью рассуждения, с помощью которых доказывается соответствующая формула, поскольку подобные рассуждения используются и при вычислении профиля соединения графов.

Пусть G — граф с n вершинами, f — нумерация вершин G. Положим

$$d_i(G,f) = |\{u \in V(G)\colon f(u) \le i \text{ и существует}$$
$$\text{ребро } (u,v) \text{ такое, что } f(v) > i\}|,$$

при $i \in \overline{0,n}$. Очевидно, что $vs(G,f) = \max_{i\in\overline{1,n}} d_i(G,f)$.

Рассмотрим два графа G_1 и G_2, имеющие n_1 и n_2 вершины соответственно, и f — нумерацию вершин графа G_1+G_2. Выберем минимальное натуральное число k, для которого либо для любой вершины $v \in V(G_1)$ $f(v) \le k$, либо для любой вершины $v \in V(G_2)$ $f(v) \le k$. Не умаляя общности будем считать, что $f(v) \le k$ для всех вершин $v \in V(G_1)$ $f(v) \le k$. Отметим, что в этом случае $k \le n_1$. Введем в рассмотрение g — нумерацию вершин графа G_2 такую, что для любых $u, v \in V(G_2)$ $g(u) < g(v)$ тогда и только тогда, когда $f(u) < f(v)$. Легко убедиться в выполнении следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 1. *$d_i(G_1+G_2,f) = i$ при $i \in \overline{1,n_1}$,*
$d_i(G_1+G_2,f) \ge n_1 + d_{i-n_1}$ при $i \in \overline{n_1+1, n_1+n_2-1}$.

Для этого достаточно заметить, что по определению соединения графов $d_i(G_1+G_2,f) = i$ при $i \in \overline{1,k-1}$, а при $i \in \overline{k,n_1+n_2-1}$ $d_i(G_1+G_2,f) = n_1 + d_{i-n_1}(G_2,g)$. Учитывая, что для любого $j \in \overline{1,n_2}$ $j \ge d_j(G_2,g)$, получаем, что в случае, если $n_1 < k$, то при $i \in \overline{n_1,k-1}$ $d_i(G_1+G_2,f) = i = n_1 + (i-n_1) \ge n_1 + d_{i-n_1}(G_2,g)$.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть G_1 и G_2 — графы, имеющие n_1 и n_2 вершины соответственно. Тогда*

$$vs(G_1+G_2) = \min\{n_1+vs(G_2), n_1+vs(G_2)\}.$$

Если f — оптимальная нумерация вершин G_1+G_2 (т.е. $vs(G_1+G_2) = vs(G_1+G_2,f)$), то из леммы 1 немедленно вытекает, что $vs(G_1+G_2) = vs(G_1+G_2,f) \ge \min\{n_1+vs(G_2), n_1+vs(G_2)\}$.

Для того чтобы получить обратную оценку предположим, что $n_1 + vs(G_2) \le n_2 + vs(G_1)$. Пусть g_1 — произвольная нумерация вершин графа G_1, g_2 — оптимальная нумерация вершин G_2. Построим f — нумерацию вершин графа G_1+G_2. Если v вершина G_1+G_2, то положим

$$f(v) = \begin{cases} g_1(v), & \text{если } v \in V(G_1),\\ n_1 + g_2(v), & \text{если } v \in V(G_2).\end{cases}$$

Остается заметить, что $vs(G_1+G_2) \le vs(G_1+G_2,f) = n_1 + vs(G_2,g_2)$.

Теорема доказана.

Перейдем теперь к профилю графов. Для получения формулы для профиля соединения графов удобно воспользоваться следующим утверждением ([17]).

Лемма 2. *Для любого графа G с n вершинами*

$$p(G) = \min\{\sum_{i=1}^{n} d_i(G, f) \colon f - f - \text{нумерация вершин } G\}.$$

С помощью этого утверждения, а также рассуждений, близких использованным выше для величины вершинного разделения графа, получается следующее утверждение ([17]).

Теорема 2. *Пусть G_1 и G_2 — графы, имеющие n_1 и n_2 вершины соответственно. Тогда*

$$p(G_1 + G_2) = \min\{\frac{1}{2}n_1(n_1 - 1) + p(G_2), \frac{1}{2}n_2(n_2 - 1) + p(G_1)\} + n_1 n_2.$$

Формулы для путевой ширины и древесной ширины соединения графов полностью аналогичны формуле для величины вершинного разделения.

Теорема 3. *Пусть G_1 и G_2 — графы, имеющие n_1 и n_2 вершины соответственно. Тогда*

$$pw(G_1 + G_2) = \min\{pw(G_1) + n_2, pw(G_2) + n_1\}, \tag{1}$$

$$tw(G_1 + G_2) = \min\{tw(G_1) + n_2, tw(G_2) + n_1\}. \tag{2}$$

Доказательство этого утверждения можно найти в работах [16, 2]

Приведем теперь формулы для поискового числа соединения двух графов, опубликованные в [15].

Пусть G — граф с n вершинами, k — натуральное число. Обозначим через G^k граф, полученный из G присоединением k висячих ребер (и соответствующих вершин) к каждой вершине G.

Теорема 4. *Пусть G_1 и G_2 — графы, имеющие n_1 и n_2 вершины соответственно, такие, что пара $\{G_1, G_2\}$ не совпадает ни с одной из пар $\{E_i, E_j\}$ при $i, j = 1, 2$, $\{E_2, K_r\}$ при $r = 3, 4, \ldots$, где через E_i обозначается пустой граф с i вершинами, а через K_r — полный граф с r вершинами. Тогда*

$$s(G_1 + G_2) = \min\{n_1 + s(G_2^{n_1}), n_1 + s(G_2^{n_1})\}.$$

Рассмотрим в качестве примера полный двудольный граф $K_{m,n}$. Очевидно, что $K_{m,n} = E_m + E_n$. Легко видеть, что

$$vs(K_{m,n}) = pw(K_{m,n}) = tw(K_{m,n}) = \min\{m, n\},$$

$$p(K_{m,n}) = \frac{1}{2}\min\{m(m-1), n(n-1)\} + mn,$$

а если $m, n > 2$, то

$$s(K_{m,n}) = \min\{m, n\} + 2.$$

Этот результат можно упростить, перейдя от точного равенства к оценке.

Следствие 1. *Пусть G_1 и G_2 — графы, имеющие n_1 и n_2 вершины соответственно, такие, что пара $\{G_1, G_2\}$ не совпадает ни с одной из пар $\{E_i, E_j\}$ при $i, j = 1, 2$. Положим $m = \min\{n_1 + s(G_2), n_1 + s(G_2)\}$. Тогда*

$$m \leq s(G_1 + G_2) \leq m + 1.$$

Также более простое утверждение получается в случае, если графы не имеют вершин малой степени.

Следствие 2. *Пусть G_1 и G_2 — графы, имеющие n_1 и n_2 вершины соответственно, все вершины которых имеют степени, не меньшие трех. Тогда*

$$s(G_1 + G_2) = \min\{n_1 + s(G_2), n_1 + s(G_2)\}.$$

3. Оценки

В этом разделе приводятся оценки ширины ленты и ширины разреза соединения графов. Мы начнем с ширины ленты.

Теорема 5. *Пусть G_1 и G_2 — графы, имеющие n_1 и n_2 вершины соответственно. Положим*

$$m_1 = n_1 + \left\lceil \frac{n_2}{2} \right\rceil - 1, \quad m_2 = n_2 + \left\lceil \frac{n_1}{2} \right\rceil - 1.$$

Тогда

$$\min\{m_1, m_2\} \leq bw(G_1 + G_2) \leq$$
$$\leq \min\{\max\{m_1, bw(G_2) + n_1\}, \max\{m_2, bw(G_1) + n_2\}\}.$$

Докажем, что $\min\{m_1, m_2\} \le bw(G_1 + G_2)$.

Пусть f — оптимальная (для ширины ленты) нумерация вершин графа $G_1 + G_2$. Положим $u = f^{-1}(1)$, а $v = f^{-1}(n_1 + n_2)$. Если либо $u \in V(G_1)$ и $v \in V(G_2)$, либо $u \in V(G_1)$ и $v \in V(G_2)$, то $bw(G_1 + G_2) = bw(G_1 + G_2, f) \ge n_1 + n_2 - 1 \ge \min\{m_1, m_2\}$.

Предположим, что $u, v \in V(G_1)$. **Обозначим** через w вершину G_2, имеющую минимальный номер (согласно нумерации f), а через z — максимальный номер. Ясно, что $f(z) - f(w) \ge n_2 - 1$. Если $f(z) - f(u) < \left\lceil \frac{n_1}{2} \right\rceil + n_2 - 1$, то

$$
\begin{aligned}
f(v) - f(w) &= n_1 + n - 2 - f(w) \ge n_1 + n_2 - (f(z) - n_2 + 1) = \\
&= n_1 + 2n_2 - 2 - (f(z) - 1) = n_1 + 2n_2 - (f(z) - f(u)) > \\
&> n_1 + 2n_2 - 2 - \left\lceil \frac{n_1}{2} \right\rceil - n_2 + 1 \ge n_2 + \left\lceil \frac{n_1}{2} \right\rceil - 2
\end{aligned}
$$

и $f(v) - f(w) \ge n_2 + \left\lceil \frac{n_1}{2} \right\rceil - 1$. Легко видеть, что

$$bw(G_1 + G_2, f) \ge \max\{f(z) - f(u), f(v) - f(w)\} \ge \left\lceil \frac{n_1}{2} \right\rceil + n_2 - 1.$$

Если $u, v \in V(G_2)$, то с помощью аналогичных рассуждений получаем, что

$$bw(G_1 + G_2, f) \ge \left\lceil \frac{n_2}{2} \right\rceil + n_1 - 1.$$

Следовательно,

$$bw(G_1 + G_2) = bw(G_1 + G_2, f) \ge \min\{m_1, m_2\}.$$

Докажем теперь выполнение верхней оценки. Пусть g_1 и g_2 — оптимальные нумерации вершин графов G_1 и G_2 соответственно. Построим f_1 и f_2 — две нумерации вершин $G_1 + G_2$. Положим для вешрины v графа $G_1 + G_2$

$$
f_1(v) = \begin{cases}
g_1(v), & \text{если } v \in V(G_1) \text{ и } g_1(v) \le \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor, \\
g_2(v) + \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor, & \text{если } v \in V(G_2), \\
g_1(v) + n_1, & \text{если } v \in V(G_1) \text{ и } g_1(v) > \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor;
\end{cases}
$$

$$
f_2(v) = \begin{cases}
g_2(v), & \text{если } v \in V(G_2) \text{ и } g_2(v) \le \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor, \\
g_1(v) + \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor, & \text{если } v \in V(G_1), \\
g_2(v) + n_2, & \text{если } v \in V(G_2) \text{ и } g_2(v) > \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor.
\end{cases}
$$

Легко видеть, что

$$bw(G_1 + G_2, f_1) \le \max\{m_1, bw(G_2) + n_1\},$$

$$bw(G_1 + G_2, f_1) \le \max\{m_2, bw(G_1) + n_2\}.$$

Следовательно,

$$bw(G_1 + G_2) \le \min\{\max\{m_1, bw(G_2) + n_1\}, \max\{m_2, bw(G_1) + n_2\}\}.$$

Теорема доказана.

Если ширина ленты графа G_1 и ширина ленты G_2 невелики, то можно получить точное выражение.

Следствие 3. *Пусть G_1 и G_2 — графы, имеющие n_1 и n_2 вершины соответственно,*

$$bw(G_1) \le \left\lceil \frac{n_1}{2} \right\rceil - 1, \quad bw(G_2) \le \left\lceil \frac{n_2}{2} \right\rceil - 1.$$

Тогда

$$bw(G_1 + G_2) = \min\{n_1 + \left\lceil \frac{n_2}{2} \right\rceil, n_2 + \left\lceil \frac{n_1}{2} \right\rceil\} - 1.$$

В частности, $bw(K_{m,n} = \min\{m + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, n + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil\} - 1.$

Отметим, что близкие результаты были, по-видимому, получены в работе [6]. Однако мы приводим их здесь полностью, поскольку данные результаты были получены нами независимо и нам не удалось ознакомиться с упомянутой работой.

Прежде чем перейти к оценке ширины разреза, отметим, что если рассмотреть разделительное число графа — величину "двойственную" ширине ленты, то результат оказывается тривиальным.

Теорема 6. *Пусть G_1 и G_2 — графы. Тогда $sep(G_1 + G_2) = 1$.*

Для доказательства достаточно заметить, что для любой f — нумерации вершин графа $G_1 + G_2$ найдутся вершины $v \in V(G_1)$ и $u \in V(G_2)$ такие, что $|f(v) - f(u)| = 1$. Из этого сразу следует, что $sep(G_1 + G_2, f) = 1$.

Из этой теоремы вытекает, что если G — связный кограф, то $sep(G) = 1$.

Оценим теперь ширину разреза соединения графов.

Теорема 7. *Пусть G_1 и G_2 — графы, имеющие n_1 и n_2 вершины соответственно. Положим $m = \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor n_1 + \left\lceil \frac{n_2}{2} \right\rceil n_1 - 2\left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n_2}{2} \right\rceil$. Тогда*

$$m \le cw(G_1 + G_2) \le m + cw(G_1) + cw(G_2).$$

Оценим сначала ширину разреза соединения графов снизу. Рассмотрим f — оптимальную (для ширины разреза) нумерацию вершин графа $G_1 + G_2$. Пусть $i \in \overline{1, n_1 + n_2}$ максимальное число, для которого либо $|\{v \in V(G_1)\colon f(v) \le i\}| = \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor$, либо $|\{v \in V(G_2)\colon f(v) \le i\}| = \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor$. Пусть, для определенности, $|\{v \in V(G_1)\colon f(v) \le i\}| = \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor$. Положим $r = |\{v \in V(G_1)\colon f(v) \le i\}|$. Нетрудно видеть, что

$$cw(G_1 + G_2) = cw(G_1 + G_2, f) \ge \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor (n_2 - r) + (n_1 - \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor) r =$$

$$= \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor n_2 + (\left\lceil \frac{n_1}{2} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor) r.$$

Если n_1 — четное число, то

$$\left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor n_2 + (\left\lceil \frac{n_1}{2} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor) r = \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor n_2 = m.$$

Если же n_1 — нечетное число, то

$$\left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor n_2 + (\left\lceil \frac{n_1}{2} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor) r \ge$$

$$\ge \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor n_2 + \left\lceil \frac{n_2}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor n_1 + \left\lceil \frac{n_2}{2} \right\rceil n_1 - 2\frac{n_1 - 1}{2} \left\lceil \frac{n_2}{2} \right\rceil = m.$$

Доказывая выполнение верхней оценки мы ограничимся тем, что приведем f — нумерацию вершин графа $G_1 + G_2$, гарантирующую ее выполнение. Пусть g_1 и g_2 — оптимальные нумерации вершин графов G_1 и G_2 соответственно. Положим для вешрины v графа $G_1 + G_2$

$$f(v) = \begin{cases} g_1(v), & \text{если } v \in V(G_1) \text{ и } g_1(v) \le \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor, \\ g_2(v) + \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor, & \text{если } v \in V(G_2) \text{ и } g_2(v) \le \left\lceil \frac{n_2}{2} \right\rceil, \\ g_1(v) + \left\lceil \frac{n_2}{2} \right\rceil, & \text{если } v \in V(G_1) \text{ и } g_1(v) > \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor, \\ g_2(v) + n_1, & \text{если } v \in V(G_2) \text{ и } g_2(v) > \left\lceil \frac{n_2}{2} \right\rceil. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что

$$cw(G_1 + G_2) \le cw(G_1 + G_2, f) \le m + cw(G_1) + cw(G_2).$$

Теорема доказана.

Отметим в заключение, что эта оценка является точной для полного двудольного графа: $cw(K_{m,n}) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor n + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil m - 2\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Литература

1. **Bienstock D.** Graph searching, path-width, tree-width and related problems (a survey)//*DIMACS ser. in discr. math. and theor. comp. sci. 1991. V.5. P.33–49.*

2. **Bodlaender H.L.** The pathwidth and treewidth of cographs// *SIAM J. Disc. Math. 1993. V.8. P.181–188.*

3. **Chinn P.Z.,Chvatalova J.,Dewdney A.K.,Gibbs N.E.** The bandwidth problem for graphs and matrices — a survey// *J. of Graph Theory. 1982. V.6. P.223–254.*

4. **Corneil D.G., Perl Y., Stewart L.** A linear recognition algorithm for cographs// *SIAM J. Comput. 1985. V.5. P.926–934.*

5. **Kinnersly N.G.** The vertex separation number of a graph equals its pathwidth//*Inform. Process Lett. 1992. V.42. P.345–350.*

6. **Lai Y-L., Liu J., Willians K.** Bandwidth for the sum of k graphs//*Ars. Combin. 1994. V.37. P.149–155.*

7. **Möhring R.H.** Graph problems related to gate matrix layout and PLA folding, *in: G. Tinhofer et al., eds., Computional Graph Theoty, Computing Supplementum 7. Wien.Springer. 1990. P.17–51.*

8. **Parsons T.D.** Pursuit-evasion in a Graph//*Lecture Notes in Math. 1978. V.642. P.426–441.*

9. **Robertson N., Seymour P.D.** Graph minors.I. Excluding a forest// *J. of Comb. Theor. Ser.B. 1983. V.35. P.39–61.*

10. **Robertson N., Seymour P.D.** Graph minors.II. Algorithmic aspects of three-width//*J. of algorithms. 1986. V.7. P.309–322.*

11. **Robertson N., Seymour P.D.** Graph minors.III. Planar tree-width//*J. of Comb. Theor. Ser.B. 1984. V.36. P.49–64.*

12. **Robertson N., Seymour P.D.** Graph minors.IV. Tree-width and well-quasi-ordering//*J. of Comb. Theor. Ser.B. 1984. V.48. P.227–254.*

13. **Robertson N., Seymour P.D.** Graph minors.V. Excluding a planar graph//*J. of Comb. Theor. Ser.B. 1986. V.41. P.92–114.*

14. **Robertson N., Seymour P.D.** Graph minors.X. Obstructions to tree-decomposition//*J. of Comb. Theor. Ser.B. 1991. V.52. P.153–190.*

15. **Головач П.А.** Вершинно-поисковое и поисковое число соединения графов//*Вестник ЛГУ. Сер.1. 1990. Вып.2.*

16. **Головач П.А.** Путевая ширина и древесная ширина соединения графов//*Вестник Сыкт. ун-та. Сер.1. 1996. Вып.2. С.135–142.*

17. **Головач П.А., Фомин Ф.В.** Суммарная величина вершинного разделения и профиль графов//*Дискр. матем. 1998. Т.10. №1. С.87–94.*

18. **Петров Н.Н.** Задачи преследования при отсутствии информации об убегающем//*Дифференциальные уравнения. 1982. Т.18. №8. С. 1345–1352.*

19. **Харари Ф.** Теория графов. М.:Мир, 1973.

Summary

Golovach P. A. Invariants of graphs defined through optimal numbering of vertexes and the operation of join of graphs

The behaviour of a number of invariants determined through optimal (by various criteria) numbering of vertexes under operation of join of graphs is considered. Exact formuli for vertex separation number, profile, pathwidth, treewidth and search number, and evaluations for bandwidth and cutwidth of join of two graphs are given.

Сыктывкарский университет *Поступила 1.09.98*