Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.3.1999

УДК 681.511.4

Динамика одномерных широтно-импульсных систем управления

Н.А.Антонова

Получены необходимые и достаточные условия для существования и нестабильности периодических колебаний с заданным числом импульсов на периоде в системах управления с широтно-импульсным модулятором первого и второго рода.

В данной работе исследуется задача существования и устойчивости периодических колебаний в широтно - импульсных системах управления первого и второго рода (ШИС-I, ШИС-II) с постоянным внешним возмущением. Эта задача решалась в [1], где были получены достаточные условия существования и устойчивости вынужденных периодических колебаний с произвольным числом импульсов на периоде. Но эти условия мало зависят от свойств широтно - импульсных модуляторов, практически неэффективны для систем первого порядка, и, следовательно, далеки от необходимых. Кроме того, в [1] утверждается, что широтно - импульсные системы при малых периодах модуляции ведут себя как непрерывные системы.

В [2] сообщается о детерминированном хаосе в ШИС-I первого порядка, т.е. о существовании неустойчивых периодических колебаний с заданным числом импульсов на периоде. Автор [2] посредством численных экспериментов строит карты устойчивых периодических режимов с насыщением и зон хаоса. В [3] речь ведется о фрактальных множествах, связанных с ШИС-I, и приводится описание структуры МРП режимов в пространстве параметров системы на языке символической динамики.

В данной работе для одномерных систем управления приводится аналитическое описание областей в пространстве параметров системы, где существуют как устойчивые, так и неустойчивые периодические колебания с любым наперед заданным числом импульсов на периоде.

1. Описание системы

Одномерная широтно-импульсная система управления описывается уравнением вида

$$T_1 \frac{dU}{dt} + U = \varphi, \quad \sigma = \psi - U. \tag{1}$$

Здесь T_1 – положительная постоянная времени управляемого объекта, U – состояние системы управления, φ – сигнал на выходе импульсного элемента, σ – ошибка управления объектом, ψ – постоянное внешнее воздействие на систему. Рассматриваются следующие виды широтно-импульсного управления:

а)широтно-импульсная модуляция первого рода (ШИМ-I), для которой выход φ модулятора определяется как кусочно-постоянная функция вида

$$\varphi(t) = \begin{cases} \operatorname{sign} \sigma(nT), & nT < t \leq nT + \tau_n \\ 0, & nT + \tau_n < t \leq (n+1)T, n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{2}$$

Здесь

$$\tau_n = T \cdot \min\{|\sigma(nT)|/\sigma_*; 1\}, \tag{3}$$

σ_* – порог насыщения импульсного элемента, T – период модуляции импульсного элемента;

б)широтно-импульсная модуляция второго рода (ШИМ-II), для которой $\varphi(t)$ имеет вид (2), а τ_n–первый неотрицательный корень уравнения

$$\kappa \tau_n = T \cdot |\sigma(nT + \tau_n)|, \tag{4}$$

если таковой имеется на $[0, T]$, и $\tau_n = T$ в противном случае. Здесь κ–положительное число.

Введем в рассмотрение величину $\alpha = \frac{T}{T_1}$ – параметр, связывающий характеристики непрерывной линейной части системы и импульсного элемента.

2. Формулировка результатов

Пусть m– заданное натуральное число. Будем исследовать mT–периодические решения уравнения (1), для которых

$$\sigma(t + mT) = \sigma(t) \qquad \text{для всех t} \geq 0, \tag{5}$$

$$\varphi(t + mT) = \varphi(t) \qquad \text{для всех t} \geq 0. \tag{6}$$

Среди периодических решений выделим многотактные релейные периодические (МРП) режимы с насыщенными импульсами, для которых

$$\varphi(t) \neq 0, \quad \text{для всех } t \in [0, mT], \tag{7}$$

и простейшие нетривиальные колебания, для которых

$$\varphi(t) \neq 0, \; t \in [0, \tau]; \quad \varphi(t) = 0, \; t \in (\tau; T); \quad \varphi(t) \neq 0, \; t \in [T, mT]; \tag{8}$$

при этом все значения $\sigma(kT), k = 3, 4, ..., m$ одного знака.

Здесь $\tau \in (0, T)$ – длительность первого ненасыщенного импульса, а остальные импульсы на периоде являются насыщенными.

Последовательность знаков импульсов на исследуемом $mT-$периодическом колебании считается заданной. Нас интересуют условия на параметры системы $\alpha, \psi, \sigma_*, \kappa$, при которых искомое колебание реализуется. Свойство устойчивости периодического колебания будем относить к порядку. Известно, что все МРП режимы в системах с ШИМ-I устойчивые, т. е. это пример порядка. Под хаосом будем понимать существование неустойчивых периодических колебаний с произвольным числом импульсов на периоде.

Теорема 1(ШИС – $I, m = 1$).

1. *Устойчивый однотактный релейный периодический режим существует тогда и только тогда, когда*

$$|\psi| \geq \sigma_* + 1. \tag{9}$$

2. *Простейшее нетривиальное $T-$периодическое колебание существует тогда и только тогда, когда*

$$0 < |\psi| < \sigma_* + 1. \tag{10}$$

Это колебание будет устойчивым, если

$$|\psi| < \frac{\sigma_*}{\alpha} \ln\left(\frac{\sigma_*}{\alpha}(\mathrm{e}^\alpha + 1)\right) + \frac{1}{\mathrm{e}^\alpha - 1}\left(\frac{\sigma_*}{\alpha}(\mathrm{e}^\alpha + 1) - 1\right), \tag{11}$$

и неустойчивым, если

$$|\psi| > \frac{\sigma_*}{\alpha} \ln\left(\frac{\sigma_*}{\alpha}(\mathrm{e}^\alpha + 1)\right) + \frac{1}{\mathrm{e}^\alpha - 1}\left(\frac{\sigma_*}{\alpha}(\mathrm{e}^\alpha + 1) - 1\right). \tag{12}$$

Теорема 2(ШИС – $I, m = 2, m = 3, m = 4$).

Устойчивый $m-$тактный релейный периодический режим существует тогда и только тогда, когда

$$\left| |\psi| - 1 + \frac{\mathrm{e}^\alpha - 1}{\mathrm{e}^{m\alpha} - 1}(\mathrm{e}^\alpha + 1) \right| \leq \frac{(\mathrm{e}^\alpha - 1)^2}{\mathrm{e}^{m\alpha} - 1} - \sigma_*. \tag{13}$$

Теорема 3(ШИС $-I, m \geq 5$).

Если выполняется условие

$$\left| |\psi| - 1 + \frac{e^{\alpha} - 1}{e^{m\alpha} - 1}\left(1 + \frac{e^{\alpha}}{e^{k\alpha} - 1}\left(2e^{(m-1)\alpha} - e^{k\alpha} - 1\right)\right) \right| \leq \frac{(e^{\alpha} - 1)^2}{e^{m\alpha} - 1} - \sigma_*, \tag{14}$$

где $k-$ делитель числа $(m-1)$, причем $k \geq 2$, то в системе существует устойчивый $m-$тактный релейный периодический режим.

Теорема 4(ШИС $-I, m \geq 2$).

Простейшее нетривиальное $mT-$периодическое колебание существует тогда и только тогда, когда точка $(\psi; \sigma_*)$ является внутренней точкой одной из областей:

а)*ограниченной линиями*

$$|\psi| = \sigma_* + 1, \qquad |\psi| = 1 - \sigma_* - 2\frac{e^{\alpha} - 1}{e^{m\alpha} - 1}, \tag{15}$$

причем

$$|\psi| \neq 1 - \frac{e^{\alpha} - 1}{e^{m\alpha} - 1}, \tag{16}$$

и кривой, заданной в параметрическом виде,

$$\sigma_* = \frac{\alpha(e^{\alpha} - 1)\left(\frac{e^{\alpha} - 1}{e^{m\alpha} - 1} - t\right)}{\alpha - \operatorname{sign}(t)\ln(1 + (e^{m\alpha} - 1)|t|)}, \tag{17}$$

$$|\psi| = 1 + \sigma_* - e^{\alpha}\frac{e^{\alpha} - 1}{e^{m\alpha} - 1} + te^{\alpha}, \tag{18}$$

где

$$-\frac{e^{\alpha} - 1}{e^{m\alpha} - 1} < t < \frac{e^{\alpha} - 1}{e^{m\alpha} - 1}; \tag{19}$$

б)*либо ограниченной линиями*

$$|\psi| = \sigma_* + 1 - 2e^{\alpha}\frac{e^{\alpha} - 1}{e^{m\alpha} - 1}, \tag{20}$$

и кривой, заданной в параметрическом виде,

$$\sigma_* = \frac{\alpha\left((e^{(m-1)\alpha} - 1)t - (e^{(m-1)\alpha} - 2e^{\alpha} + 1)\frac{e^{\alpha} - 1}{e^{m\alpha} - 1}\right)}{\alpha + \ln(1 + (e^{m\alpha} - 1)t)}, \tag{21}$$

$$|\psi| = 1 - \sigma_* - (e^{(m-1)\alpha} + 2)\frac{e^{\alpha} - 1}{e^{m\alpha} - 1} + te^{(m-1)\alpha}, \tag{22}$$

где

$$\frac{(e^{(m-1)\alpha}-2e^{\alpha}+1)}{(e^{(m-1)\alpha}-1)}\frac{(e^{\alpha}-1)}{(e^{m\alpha}-1)} < t < \frac{e^{\alpha}-1}{e^{m\alpha}-1}. \quad (23)$$

Это колебание будет устойчивым, если

$$\left||\psi|-1+\frac{e^{\alpha}-1}{e^{m\alpha}-1}\right| < \frac{\sigma_*}{\alpha}\ln(\frac{\sigma_*}{\alpha}(e^{m\alpha}+1))+\frac{1}{e^{m\alpha}-1}(\frac{\sigma_*}{\alpha}(e^{m\alpha}+1)-1), \quad (24)$$

и неустойчивым, если

$$\left||\psi|-1+\frac{e^{\alpha}-1}{e^{m\alpha}-1}\right| > \frac{\sigma_*}{\alpha}\ln(\frac{\sigma_*}{\alpha}(e^{m\alpha}+1))+\frac{1}{e^{m\alpha}-1}(\frac{\sigma_*}{\alpha}(e^{m\alpha}+1)-1), \quad (25)$$

Теорема 5(ШИС $- II, m \geq 2$).

Простейшее нетривиальное mT−периодическое колебание существует тогда и только тогда, когда точка $(\psi;\kappa)$ является внутренней точкой области, ограниченной линиями

$$|\psi| = \kappa + 1, \qquad \kappa = 0, \quad (26)$$

и кривой, заданной в параметрическом виде,

$$\kappa = \frac{-\alpha t}{\ln(1-(e^{m\alpha}-1)e^{-\alpha}t)}\frac{(e^{\alpha}-1-t(e^{m\alpha}-1))}{(e^{\alpha}-t(e^{m\alpha}-1))}, \quad (27)$$

$$|\psi| = 1+\kappa-t, \quad (28)$$

где

$$0 < t < \frac{e^{\alpha}-1}{e^{m\alpha}-1}; \quad (29)$$

Это колебание будет устойчивым, если

$$|\psi| < \frac{1}{1+e^{-m\alpha}}+\kappa(1+\frac{1}{\alpha})-\frac{\kappa}{\alpha}\ln(1+(e^{m\alpha}-1)(\frac{1}{e^{m\alpha}+1}-\frac{\kappa}{\alpha})), \quad (30)$$

и неустойчивым, если

$$|\psi| > \frac{1}{1+e^{-m\alpha}}+\kappa(1+\frac{1}{\alpha})-\frac{\kappa}{\alpha}\ln(1+(e^{m\alpha}-1)(\frac{1}{e^{m\alpha}+1}-\frac{\kappa}{\alpha})). \quad (31)$$

Первое утверждение теоремы 1 общеизвестно. Теоремы 2 и 3 дают аналитическое описание областей существования устойчивых m−тактных релейных периодических режимов, экспериментально построенных в [2,3]. В теореме 3 сформулировано только достаточное условие, но в некоторых случаях оно может быть и необходимым. Действительно, обозначим через p число делителей натурального числа $(m-1)$, за исключением делителя, равного 1, а через q обозначим значение теоретико-числовой функции Эйлера от аргумента m. В [3] сообщается, что общее количество МРП режимов в исследуемой системе равно q. Поэтому, в случае $q = 2p$, условие (13) теоремы 3 позволяет описать все области существования устойчивых $m-$тактных релейных периодических режимов и является необходимым условием их существования. В теоремах 4 и 5 описаны области существования простейших нетривиальных $mT-$ периодических колебаний в системах с ШИМ-I или ШИМ-II, а также выделены зоны существования как устойчивых, так и неустойчивых периодических колебаний.

3. Доказательства

3.1. Вывод основных формул

Введем обозначения

$$u_n = u(nT),\ \sigma_n = \sigma(nT) = \psi - u_n.$$

Для систем с ШИМ-I решение уравнения (1) с функцией $\varphi(t)$, определяемой (2), примет вид

$$\sigma(nT+t) = \begin{cases} \psi - \mathrm{e}^{-\alpha t/T}[\psi - \sigma_n + (\mathrm{e}^{\alpha t/T} - 1)\mathrm{sign}\sigma_n], & \text{если } t \in [0, \tau_n], \\ \psi - \mathrm{e}^{-\alpha t/T}[\psi - \sigma_n + (\mathrm{e}^{\alpha \tau_n/T} - 1)\mathrm{sign}\sigma_n], & \text{если } t \in [\tau_n, T]. \end{cases} \tag{32}$$

Отсюда выводим формулу одномерного отображения [4]

$$\sigma_{n+1} = f(\sigma_n), \tag{33}$$

где

$$f(\sigma) = \sigma\mathrm{e}^{-\alpha} + \psi(1 - \mathrm{e}^{-\alpha}) - \mathrm{e}^{-\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha\tau/T} - 1)\mathrm{sign}\sigma.$$

Величина τ, в соответствии с (3), определяется формулой

$$\tau = T\min\{|\sigma|/\sigma_*, 1\}.$$

Циклы периода m отображения (33) дают mT - периодические колебания в исследуемой системе. В случае многотактного релейного периодического режима с m импульсами на периоде зависимость между сигналами в тактовые моменты имеет вид

$$\begin{cases} \sigma_{s+1} = \sigma_s\mathrm{e}^{-\alpha} + (\psi - \lambda_s)(1 - \mathrm{e}^{-\alpha}), \lambda_s = \mathrm{sign}\sigma_s, (s = 1, 2, ..., m), \\ \sigma_{m+1} = \sigma_1 \end{cases}$$

Введем обозначения

$$x = \mathrm{e}^{\alpha}, \Delta = \frac{x^m - 1}{x - 1}. \tag{34}$$

Тогда решение последней системы уравнений относительно σ_s можно записать следующим образом

$$\sigma_s = \psi - \frac{1}{\Delta}\left(\sum_{i=1}^{s-1} \lambda_i x^{m+i-s} + \lambda_s + \sum_{i=s+1}^{m} \lambda_i x^{i-s}\right), s = 1, 2, ..., m.$$

На исследуемом МРП режиме в соответствии с формулами (7), (2), (3) имеем

$$\lambda_s \sigma_s \geq \sigma_*, s = 1, 2, ..., m.$$

Поэтому существование МРП режима возможно в том и только том случае, когда совместна следующая система из m неравенств

$$\sigma_* \leq \lambda_s \left[\psi - 1 + \frac{2}{\Delta}\left(\sum_{i=1}^{s-1} \beta_i x^{m+i-s} + \beta_s + \sum_{i=s+1}^{m} \beta_i x^{i-s}\right)\right], \tag{35}$$

$$\beta_s = \frac{1 - \lambda_s}{2}, s = 1, 2, ..., m.$$

В случае простейшего нетривиального периодического колебания с m импульсами на периоде длительностями $\tau_1 = \tau, \tau_s = T, s = 2, 3, ..., m$ и знаками $\mathrm{sign}\sigma_1 = \lambda_1, \mathrm{sign}\sigma_2 = \lambda_2, \mathrm{sign}\sigma_s = \lambda, s = 3, 4, ..., m$ зависимость между сигналами в тактовые моменты имеет вид

$$\begin{cases} \sigma_2 = \sigma_1 \mathrm{e}^{-\alpha} + \psi(1 - \mathrm{e}^{-\alpha}) - \lambda_1 \mathrm{e}^{-\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha\tau/T} - 1), \\ \sigma_3 = \sigma_2 \mathrm{e}^{-\alpha} + (\psi - \lambda_2)(1 - \mathrm{e}^{-\alpha}), \\ \sigma_{s+1} = \sigma_s \mathrm{e}^{-\alpha} + (\psi - \lambda)(1 - \mathrm{e}^{-\alpha}), s = 3, 4, ..., m, \\ \sigma_{m+1} = \sigma_1 \end{cases}$$

Введем обозначения

$$y = \frac{\alpha\tau}{T}, P(y) = \frac{\mathrm{e}^{y} - 1}{x^m - 1}, 0 < y < \alpha. \tag{36}$$

Тогда, учитывая (34), решение последней системы уравнений относительно σ_s можно записать следующим образом

$$\begin{cases} \sigma_1 = \psi - \frac{1}{\Delta}\left(\lambda_1 \Delta P(y) + \lambda_2 x + \lambda(\Delta - 1 - x)\right), \\ \sigma_2 = \psi - \frac{1}{\Delta}\left(\lambda_1 \Delta P(y) x^{m-1} + \lambda_2 + \lambda(\Delta - x^{m-1} - 1)\right), \\ \sigma_s = \psi - \frac{1}{\Delta}\left(\lambda_1 \Delta P(y) x^{m-s+1} + \lambda_2 x^{m-s+2} + \lambda(\Delta - x^{m-s+1} - x^{m-s+2})\right), \\ s = 3, 4, ..., m. \end{cases} \tag{37}$$

На простейшем нетривиальном периодическом колебании в соответствии с описанием системы с ШИМ-I и обозначением (36) выполняются соотношения

$$\lambda_1\sigma_1 = \frac{\sigma_* y}{\alpha}, \lambda_2\sigma_2 \geq \sigma_*, \lambda\sigma_s \geq \sigma_*, s = 3, 4, ...m.$$

Поэтому в системе с ШИМ-I существование исследуемого колебания возможно в том и только том случае, когда совместна следующая система из одного уравнения и $m-1$ неравенства

$$\begin{cases} \frac{\sigma_* y}{\alpha} + P(y) = \lambda\lambda_1(\lambda\psi - 1) + \frac{\lambda\lambda_1}{\Delta}\left(x(1-\lambda\lambda_2)+1\right), y \in (0;\alpha), \\ \sigma_* + \lambda_1\lambda_2 P(y)x^{m-1} \leq \lambda\lambda_2(\lambda\psi - 1) - \frac{1}{\Delta} + \lambda\lambda_2\frac{x^{m-1}+1}{\Delta}, \\ \sigma_* \leq (\lambda\psi - 1) + x^{m-s+1}\left[\frac{1}{\Delta} + \frac{x(1-\lambda\lambda_2)}{\Delta} - \lambda\lambda_1 P(y)\right] s = 3, 4, ..., m. \end{cases}$$

Так как

$$\frac{1}{\Delta} - P(y) \geq 0, 1 - \lambda\lambda_2 \geq 0, x > 1,$$

то последние $m-2$ неравенства, т.е. для $s = 3, 4, ..., m$, выполняются тогда и только тогда, когда имеет место неравенство при $s = m$. Следовательно, приходим к условиям

$$\begin{cases} \frac{\sigma_* y}{\alpha} + P(y) = \lambda\lambda_1(\lambda\psi - 1) + \frac{\lambda\lambda_1}{\Delta}\left(x(1-\lambda\lambda_2)+1\right), \\ \sigma_* + \lambda_1\lambda_2 P(y)x^{m-1} \leq \lambda\lambda_2(\lambda\psi - 1) - \frac{1}{\Delta} + \lambda\lambda_2\frac{x^{m-1}+1}{\Delta}, \\ \sigma_* + \lambda_1\lambda P(y)x \leq (\lambda\psi - 1) - \frac{\lambda\lambda_2 x^2}{\Delta} + \frac{x+x^2}{\Delta}. \end{cases} \tag{38}$$

3.2. Доказательство теоремы 1 Здесь эта теорема приведена для полноты изложения результатов. Ее полное доказательство опубликовано в [5].

3.3. Доказательство теоремы 2 На МРП режиме с двумя импульсами ($m = 2$) противоположных знаков $(-\lambda, \lambda)$ на периоде неравенства (35) примут вид

$$\begin{cases} \sigma_* \leq -\lambda\left[\psi - 1 + \frac{2}{\Delta}(\frac{1+\lambda}{2} + \frac{1-\lambda}{2}x)\right], \\ \sigma_* \leq \lambda\left[\psi - 1 + \frac{2}{\Delta}(\frac{1+\lambda}{2}x + \frac{1-\lambda}{2})\right] \end{cases}$$

Здесь $\lambda = 1$ либо $\lambda = -1$. После преобразований приходим к соотношению

$$-(\frac{x-1}{\Delta} - \sigma_*) \leq \lambda\psi \leq \frac{x-1}{\Delta} - \sigma_*,$$

которое,с учетом (34), эквивалентно (13).

Если же число импульсов на МРП режиме три или четыре на периоде, то их знаки $(-\lambda, \lambda, \lambda)$ для $m = 3$ либо $(-\lambda, \lambda, \lambda, \lambda)$ для $m = 4$.

Тогда неравенства (35) удовлетворяются в том и только том случае, когда имеют место оценки

$$\begin{cases} \sigma_* \leq -\lambda\psi + 1 - \frac{2}{\Delta}, \\ \sigma_* \leq \lambda\psi - 1 + \frac{2}{\Delta}x. \end{cases}$$

Из (34) следует, что $\frac{2}{\Delta}x - 1 < 0$. Поэтому последнее неравенство предполагает, что $\lambda\psi > 0$, значит $\lambda\psi = |\psi|$. Несложные преобразования приводят нас к неравенству

$$\left| |\psi| - 1 + \frac{x+1}{\Delta} \right| \leq \frac{x-1}{\Delta} - \sigma_*.$$

После подстановки (34) получаем (13). Теорема 2 доказана.

3.4. Доказательство теоремы 3 Пусть $k \geq 2$ - делитель числа $(m-1)$. Тогда $m = kp+1, m \geq 5, p \geq 1$. Нас интересует проблема существования МРП режима с m импульсами на периоде, знаки которых имеют вид

$$\lambda_{sk+1} = -\lambda, \lambda_{sk+l} = \lambda, s = 0, 1, ..., p-1, l = 2, 3, ..., k, \lambda_m = \lambda,$$

т.е. на периоде МРП режима выделяется p групп по k импульсов в каждой с фиксированными знаками. Неравенства (35) преобразуются к виду

$$\begin{cases} \sigma_* \leq -(\lambda\psi - 1) - \frac{2}{\Delta}\left(\frac{x^m - x^{m-sk}}{x^k - 1} + \frac{x^{(p-s)k} - 1}{x^k - 1}\right), \\ \sigma_* \leq \lambda\psi - 1 + \frac{2x^{1-l}}{\Delta}\left(\frac{x^{m+k} - x^{m-sk}}{x^k - 1} + \frac{x^{(p-s)k} - x^k}{x^k - 1}\right), \\ s = 0, 1, ..., p-1, l = 2, 3, ..., k, \\ \sigma_* \leq \lambda\psi - 1 + \frac{2x}{\Delta}\frac{x^{m-1} - 1}{x^k - 1}. \end{cases}$$

Первое из последней системы неравенств выполняется при всех допустимых значениях $s = 0, 1, ..., p-1$, если оно справедливо для наибольшего значения $s = p-1$ т.е., если

$$\sigma_* \leq -(\lambda\psi - 1) - \frac{2}{\Delta}\left(\frac{x^m - x^{k+1}}{x^k - 1} + \frac{x^k - 1}{x^k - 1}\right).$$

Второе из последней системы неравенств выполняется при всех допустимых значениях $s = 0, 1, ..., p-1$ и $l = 2, 3, ..., k$, если оно справедливо для наименьшего значения $s = 0$ и наибольшего значения $l = k$ т.е., если

$$\sigma_* \leq \lambda\psi - 1 + \frac{2x}{\Delta x^k}\left(\frac{x^{m+k} - x^m}{x^k - 1} + \frac{x^{m-1} - x^k}{x^k - 1}\right).$$

Поскольку
$$x^{m-1}-1<\frac{1}{x^k}(x^{m+k}-x^m+x^{m-1}-x^k)$$

для всех $x>1, k\geq 2$, то самое последнее неравенство из последней системы неравенств гарантирует предшествующую оценку для σ_*.

Таким образом, приходим к системе из двух неравенств, обеспечивающих существование МРП режима с m импульсами на периоде,в виде

$$\begin{cases} \sigma_*\leq -(\lambda\psi-1)-\frac{2}{\Delta}\left(\frac{x^m-x^{k+1}}{x^k-1}+1\right), \\ \sigma_*\leq \lambda\psi-1+\frac{2x}{\Delta}\frac{x^{m-1}-1}{x^k-1}, \end{cases}$$

После замены (34) и некоторых преобразований они переписываются в форме (14). Теорема 3 доказана.

3.5. Доказательство теоремы 4 Для доказательства существования простейшего нетривиального mT–периодического колебания нам следует выяснить условия разрешимости системы (38). Уравнение в (38) имеет в левой части монотонно возрастающую функцию аргумента $y\in(0;\alpha)$ с наименьшим значением 0 и наибольшим $\sigma_*+\frac{1}{\Delta}$. Поэтому это уравнение имеет единственное решение на интервале $(0;\alpha)$ в том и только том случае, когда его правая часть удовлетворяет неравенствам

$$0<\lambda\lambda_1\left(\lambda\psi-1+\frac{1+x(1-\lambda\lambda_2)}{\Delta}\right)<\sigma_*+\frac{1}{\Delta}. \tag{39}$$

Осталось выяснить вопрос о совместности неравенств, входящих в (38), на решении уравнения из (38). Сделаем ряд преобразований. Из уравнения (38) выразим

$$P(y)=-\frac{\sigma_*}{\alpha}y+\lambda\lambda_1\left(\lambda\psi-1+\frac{1+x(1-\lambda\lambda_2)}{\Delta}\right). \tag{40}$$

Вначале допустим, что совпадают знаки $\lambda=\lambda_2$. Тогда из (38) и (40) находим

$$\begin{cases} P(y)=-\frac{\sigma_*}{\alpha}y+\lambda\lambda_1(\lambda\psi-1+\frac{1}{\Delta}), \\ x^{m-1}\left(\frac{1}{\Delta}-\lambda\lambda_1P(y)\right)\geq\sigma_*-\lambda\psi+1, \\ x\left(\frac{1}{\Delta}-\lambda\lambda_1P(y)\right)\geq\sigma_*-\lambda\psi+1. \end{cases} \tag{41}$$

Поскольку $x>1$ и $\frac{1}{\Delta}-\lambda\lambda_1P(y)>0$, то приходим к эквивалентной системе

$$\begin{cases} \frac{\sigma_*}{\alpha}y+P(y)=\lambda\lambda_1(\lambda\psi-1+\frac{1}{\Delta}), \\ \lambda\lambda_1P(y)\leq\frac{1}{\Delta}+\frac{\lambda\psi-1-\sigma_*}{x}. \end{cases} \tag{42}$$

В случае $\lambda\lambda_1 = 1$, учитывая обозначение (36), неравенство из системы (42) записывается в виде

$$y \le \ln\left(1 + (x^m - 1)(\frac{1}{\Delta} + \frac{\lambda\psi - 1 - \sigma_*}{x})\right).$$

Поэтому система (42), состоящая из уравнения и неравенства, имеет решение относительно переменной $y \in (0; \alpha)$ тогда и только тогда, когда справедливы неравенства

$$\begin{cases} 0 < \lambda\psi - 1 + \frac{1}{\Delta} < \sigma_* + \frac{1}{\Delta}, \\ \lambda\psi - 1 + \frac{1}{\Delta} < \frac{\sigma_*}{\alpha}\ln\left(1 + (x^m - 1)(\frac{1}{\Delta} + \frac{\lambda\psi-1-\sigma_*}{x})\right) + \frac{1}{\Delta} + \frac{\lambda\psi-1-\sigma_*}{x}. \end{cases} \tag{43}$$

В случае $\lambda\lambda_1 = -1$ неравенство из системы (42) сводится к оценке

$$y \ge \ln\left(1 - (x^m - 1)(\frac{1}{\Delta} + \frac{\lambda\psi - 1 - \sigma_*}{x})\right).$$

Следовательно, система (42) имеет решение тогда и только тогда, когда справедливы соотношения

$$\begin{cases} 0 < -(\lambda\psi - 1 + \frac{1}{\Delta}) < \sigma_* + \frac{1}{\Delta}, \\ -(\lambda\psi - 1 + \frac{1}{\Delta}) > \frac{\sigma_*}{\alpha}\ln\left(1 - (x^m - 1)(\frac{1}{\Delta} + \frac{\lambda\psi-1-\sigma_*}{x})\right) - \frac{1}{\Delta} - \frac{\lambda\psi-1-\sigma_*}{x}. \end{cases} \tag{44}$$

На плоскости параметров (ψ, σ_*) границы областей (43) и (44) описываются уравнениями (15) и (16), а также кривой в параметрическом виде (17),(18), если в качестве параметра выбрать

$$t = \frac{1}{\Delta} + \frac{\lambda\psi - 1 - \sigma_*}{x}, t \in (-\frac{1}{\Delta}; \frac{1}{\Delta}).$$

Теперь предположим, что знаки $\lambda = -\lambda_2$. Тогда из (38) придем к системе

$$\begin{cases} P(y) = -\frac{\sigma_*}{\alpha}y + \lambda\lambda_1(\lambda\psi - 1 + \frac{2x+1}{\Delta}), \\ -\lambda\lambda_1 x^{m-1}P(y) + \sigma_* \le -(\lambda\psi - 1) - \frac{1}{\Delta} - \frac{x^{m-1}+1}{\Delta}, \\ \lambda\lambda_1 xP(y) + \sigma_* \le \lambda\psi - 1 + \frac{2x^2+x}{\Delta}, \end{cases}$$

что, в свою очередь, равносильно системе

$$\begin{cases} P(y) = -\frac{\sigma_*}{\alpha}y + \lambda\lambda_1(\lambda\psi - 1 + \frac{2x+1}{\Delta}), \\ \lambda\lambda_1 x^{m-1}P(y) \ge \sigma_* + \lambda\psi - 1 + \frac{2}{\Delta} + \frac{x^{m-1}}{\Delta}, \\ \lambda\lambda_1 xP(y) \le -\sigma_* + \lambda\psi - 1 + \frac{2x^2+x}{\Delta}. \end{cases} \tag{45}$$

Если $\lambda = \lambda_1$,то придем к системе

$$\begin{cases} P(y) = -\frac{\sigma_*}{\alpha}y + \lambda\psi - 1 + \frac{2x+1}{\Delta}, \\ P(y) \geq \frac{\sigma_*+\lambda\psi-1+\frac{2}{\Delta}}{x^{m-1}} + \frac{1}{\Delta}, \\ P(y) \leq \frac{\lambda\psi-1-\sigma_*}{x} + \frac{2x+1}{\Delta}. \end{cases}$$

Эта система имеет решение в том и только том случае, когда выполняются следующие оценки

$$\begin{cases} 0 < \lambda\psi - 1 + \frac{2x+1}{\Delta} < \sigma_* + \frac{1}{\Delta}, \\ \lambda\psi - 1 + \frac{2x+1}{\Delta} > \frac{\sigma_*+\lambda\psi-1+\frac{2}{\Delta}}{x^{m-1}} + \frac{1}{\Delta} + \frac{\sigma_*}{\alpha}\ln\left[1 + (x^m - 1)\left(\frac{\sigma_*+\lambda\psi-1+\frac{2}{\Delta}}{x^{m-1}} + \frac{1}{\Delta}\right)\right], \\ \lambda\psi - 1 + \frac{2x+1}{\Delta} < \frac{\lambda\psi-1-\sigma_*}{x} + \frac{2x+1}{\Delta} + \frac{\sigma_*}{\alpha}\ln\left[1 + (x^m - 1)\left(\frac{\lambda\psi-1-\sigma_*}{x} + \frac{2x+1}{\Delta}\right)\right] \end{cases}$$

На плоскости параметров (ψ, σ_*) границы этой области описываются уравнением (20) и кривой в параметрическом виде (21),(22), (23), если в качестве параметра выбрать

$$t = \frac{1}{\Delta} + \frac{\sigma_* + \lambda\psi - 1 + \frac{2}{\Delta}}{x^{m-1}}, t \in \left(\frac{x^{m-1} - 2x + 1}{\Delta(x^{m-1} - 1)}; \frac{1}{\Delta}\right).$$

Если же в (45) положить $\lambda = -\lambda_1$,то придем к системе

$$\begin{cases} P(y) = -\frac{\sigma_*}{\alpha}y - (\lambda\psi - 1 + \frac{2x+1}{\Delta}), \\ P(y) \leq \frac{\sigma_*+\lambda\psi-1+\frac{2}{\Delta}}{x^{m-1}} - \frac{1}{\Delta}, \\ P(y) \geq -\frac{\lambda\psi-1-\sigma_*}{x} - \frac{2x+1}{\Delta}. \end{cases}$$

Эта система имеет решение в том и только том случае, когда выполняются следующие оценки

$$\begin{cases} 0 < -(\lambda\psi - 1 + \frac{2x+1}{\Delta}) < \sigma_* + \frac{1}{\Delta}, \\ -(\lambda\psi - 1 + \frac{2x+1}{\Delta}) < \frac{\sigma_*+\lambda\psi-1+\frac{2}{\Delta}}{x^{m-1}} - \frac{1}{\Delta} + \frac{\sigma_*}{\alpha}\ln\left[1 + (x^m - 1)\left(\frac{\sigma_*+\lambda\psi-1+\frac{2}{\Delta}}{x^{m-1}} - \frac{1}{\Delta}\right)\right], \\ -(\lambda\psi - 1 + \frac{2x+1}{\Delta}) > -\frac{\lambda\psi-1-\sigma_*}{x} - \frac{2x+1}{\Delta} + \frac{\sigma_*}{\alpha}\ln\left[1 - (x^m - 1)\left(\frac{\lambda\psi-1-\sigma_*}{x} + \frac{2x+1}{\Delta}\right)\right]. \end{cases}$$

На плоскости параметров (ψ, σ_*) это пустая область.

Для доказательства устойчивости простейшего нетривиального периодического колебания нам следует проверить, что

$$\left|\frac{df(\sigma_1)}{d\sigma}\frac{df(\sigma_2)}{d\sigma}\cdots\frac{df(\sigma_m)}{d\sigma}\right| < 1,$$

где $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m$ элементы исследуемого цикла. Поскольку первый импульс ненасыщенный, а остальные импульсы насыщенные, то из (33)находим

$$\frac{df(\sigma_1)}{d\sigma} = \mathrm{e}^{-\alpha}(1 - \frac{\alpha}{\sigma_*}\mathrm{e}^{y}), \quad \frac{df(\sigma_s)}{d\sigma} = \mathrm{e}^{-\alpha}, s = 2, 3, ..., m.$$

Перемножаем и приходим к неравенству

$$\mathrm{e}^{-m\alpha}|1 - \frac{\alpha}{\sigma_*}\mathrm{e}^{y}| < 1,$$

которое эквивалентно следующей оценке для y

$$y < \ln(\frac{\sigma_*}{\alpha}(x^m + 1)). \tag{46}$$

Напомним, что y - это решение уравнения (40). Если положить $\lambda = \lambda_2$, то решение уравнения (40) с оценкой (46) существует тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$0 < \lambda\lambda_1(\lambda\psi - 1 + \frac{1}{\Delta}) < \frac{\sigma_*}{\alpha}\ln(\frac{\sigma_*}{\alpha}(x^m + 1)) + \frac{\frac{\sigma_*}{\alpha}(x^m + 1) - 1}{x^m - 1},$$

Последнее легко преобразуется в условие (24).

В случае $\lambda = -\lambda_2$, неравенства в (45) и оценка (46) оказываются несовместными, поэтому область устойчивости отсутствует.

Для доказательства неустойчивости простейшего нетривиального периодического колебания нам следует показать, что

$$\left|\frac{df(\sigma_1)}{d\sigma}\frac{df(\sigma_2)}{d\sigma}...\frac{df(\sigma_m)}{d\sigma}\right| > 1,$$

которое эквивалентно следующей оценке

$$y > \ln(\frac{\sigma_*}{\alpha}(x^m + 1)).$$

Несложные рассуждения позволяют прийти к условию неустойчивости (25). Теорема 4 доказана.

3.6. Доказательство теоремы 5 Из (32) находим

$$\sigma(nT+\tau) = (\psi - \mathrm{sign}\sigma_n)(1 - \mathrm{e}^{-\alpha\tau/T}) + \sigma_n \mathrm{e}^{-\alpha\tau/T}.$$

В ШИС-II в соответствии с (4) функция $\sigma(nT+\tau)$ не меняет знак для $\tau \in (0;T)$. Поэтому $\mathrm{sign}\sigma(nT+\tau_n) = \mathrm{sign}\sigma_n$ для всех n. Если все импульсы будут насыщенные, т.е. $\tau_n = T$ при всех n, то все они будут иметь один и тот же знак. Следовательно, МРП режимы в ШИС-II отсутствуют. Простейшие нетривиальные mT—периодические колебания возможны, но с импульсами одинаковых знаков, т.е.

$$\mathrm{sign}\sigma_1 = \mathrm{sign}\sigma_2 = ...\mathrm{sign}\sigma_n = \lambda.$$

Значения сигналов в тактовые моменты $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m$ на периоде нетрудно вычислить из (37)

$$\begin{cases} \sigma_1 = \psi - \lambda(P(y) + 1 - \frac{1}{\Delta}), \\ \sigma_s = \psi - \lambda(P(y)x^{m-s+1} + 1 - \frac{x^{m-s+1}}{\Delta}), s = 2,3,...,m. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} |\sigma_1| - \lambda\psi + 1 = \frac{1}{\Delta} - P(y), \\ |\sigma_s| - \lambda\psi + 1 = (\frac{1}{\Delta} - P(y))x^{m-s+1}, s = 2,3,...,m. \end{cases} \tag{47}$$

На исследуемом режиме первый импульс ненасыщенный, его длина τ связана с переменной y формулой $y = \frac{\alpha\tau}{T}$. В соответствии с (4) y определяется как первый корень уравнения

$$\frac{\kappa y}{\alpha} = (\lambda\psi - 1)(1 - \mathrm{e}^{-y}) + |\sigma_1|\mathrm{e}^{-y}. \tag{48}$$

Если $|\sigma_1|$ заменить выражением из первого уравнения системы (47), сделать необходимые преобразования, то получим

$$\frac{\kappa y}{\alpha} - \lambda\psi + 1 - \mathrm{e}^{-y}(\frac{1}{\Delta} - P(y)) = 0, \tag{49}$$

где $P(y)$ определяется в (36).

Все импульсы, кроме первого, на искомом режиме являются насыщенными. Поэтому для всех $\tau \in (0;T)$ уравнение (4) не имеет корня, т.е. выполняется неравенство

$$\frac{\kappa\tau}{T} < (\lambda\psi - 1)(1 - \mathrm{e}^{-\alpha\tau/T}) + |\sigma_s|\mathrm{e}^{-\alpha\tau/T}, \quad s = 2,3,...,m, \tau \in (0;T).$$

Теперь переобозначим $z = \frac{\alpha\tau}{T}$, заменим $|\sigma_s|$ выражением из второго уравнения системы (47), получим неравенства

$$\frac{\kappa z}{\alpha} < \lambda\psi - 1 + x^{m-s+1}(\frac{1}{\Delta} - P(y))\mathrm{e}^{-z}, s = 2,3,...,m,$$

для всех $z \in (0;\alpha)$. Поскольку

$$\frac{1}{\Delta} - P(y) > 0, y \in (0;\alpha),$$

то все из $m-1$ неравенств для $s = 2,3,...,m$ последнего набора удовлетворяются, как только выполняется неравенство с наибольшим значением $s = m$

$$\frac{\kappa z}{\alpha} < \lambda\psi - 1 + x(\frac{1}{\Delta} - P(y))e^{-z}, z \in (0;\alpha).$$

В силу монотонности по переменной z левой и правой частей этого неравенства необходимым и достаточным условием для его выполнения является обепечение этого неравенства при $z = \alpha$, т.е. соотношение

$$\kappa < \lambda\psi - 1 + \frac{1}{\Delta} - P(y),$$

которое эквивалентно оценке

$$y < \ln\left(x - (x^m - 1)(\kappa + 1 - \lambda\psi)\right). \tag{50}$$

Таким образом, в ШИС-II существование нетривиального mT–периодического колебания с одинаковыми знаками импульсов на периоде возможно в том и только том случае, когда существует на интервале $(0;\alpha)$ решение уравнения (49), удовлетворяющее оценке (50). Необходимыми и достаточными условиями разрешимости уравнения (49) с оценкой (50) являются соотношения

$$\begin{cases} -\lambda\psi + 1 - \frac{1}{\Delta} < 0, \\ \kappa - \lambda\psi + 1 > 0, \\ x - (x^m - 1)(\kappa + 1 - \lambda\psi) > 1, \\ \frac{\kappa}{\alpha}\ln\left(x - (x^m - 1)(\kappa + 1 - \lambda\psi)\right) - \lambda\psi + 1 - \frac{x}{x^m - 1}\frac{1}{x - (x^m - 1)(\kappa + 1 - \lambda\psi)} + \frac{1}{x^m - 1} > 0. \end{cases}$$

Введение параметра $t = \kappa + 1 - \lambda\psi$ позволяет перейти к системе неравенств

$$\begin{cases} t < \kappa + \frac{1}{\Delta}, \\ t > 0, \\ t < \frac{1}{\Delta}, \\ \kappa(1 - \frac{\ln(x - t(x^m - 1))}{\alpha} < t\left(1 - \frac{1}{x - t(x^m - 1)}\right). \end{cases}$$

На плоскости параметров (ψ, κ) это область, ограниченная прямыми (26), а также кривой, заданной в параметрическом виде (27), (28).

Теперь найдем достаточные условия устойчивости и неустойчивости простейшего нетривиального mT–периодического колебания. Из (33) вычисляем

$$\frac{df(\sigma_1)}{d\sigma} = \mathrm{e}^{-\alpha}(1 - \lambda\frac{\alpha}{T}\mathrm{e}^{y}\frac{d\tau}{d\sigma}), y = \frac{\alpha\tau}{T}, \frac{df(\sigma_s)}{d\sigma} = \mathrm{e}^{-\alpha}, s = 2, 3, ..., m.$$

Дифференцируем уравнение (49), получаем

$$\frac{\kappa}{\alpha}\frac{d\tau}{d\sigma} = (\lambda\psi - 1)\mathrm{e}^{-y}\frac{\alpha}{T}\frac{d\tau}{d\sigma} + \lambda\mathrm{e}^{-y} - |\sigma_1|\mathrm{e}^{-y}\frac{\alpha}{T}\frac{d\tau}{d\sigma}.$$

Принимая во внимание первое уравнение из (47), находим

$$\frac{\alpha}{T}\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{\lambda\mathrm{e}^{-y}}{\frac{\kappa}{\alpha} + \frac{\kappa y}{\alpha} - \lambda\psi + 1}.$$

Следовательно,

$$\frac{df(\sigma_1)}{d\sigma} = \mathrm{e}^{-\alpha}\left(1 - \frac{\alpha}{\kappa + \kappa y - \alpha(\lambda\psi - 1)}\right).$$

Неравенство, обусловливающее устойчивость исследуемого колебания,

$$\left|\frac{df(\sigma_1)}{d\sigma}\frac{df(\sigma_2)}{d\sigma}...\frac{df(\sigma_m)}{d\sigma}\right| < 1,$$

эквивалентно следующей оценке

$$\mathrm{e}^{-m\alpha}\left|1 - \frac{\alpha}{\kappa + \kappa y - \alpha(\lambda\psi - 1)}\right| < 1.$$

Из (49) и (36) выводим, что

$$\frac{\kappa y}{\alpha} - \lambda\psi + 1 = \frac{x\mathrm{e}^{-y} - 1}{x^m - 1},$$

что позволяет последнее неравенство записать как

$$\frac{x\mathrm{e}^{-y} - 1}{x^m - 1} > \frac{1}{x^m + 1} - \frac{\kappa}{\alpha},$$

или

$$y < \alpha - \ln\left[1 + (x^m - 1)(\frac{1}{x^m + 1} - \frac{\kappa}{\alpha})\right]. \qquad (51)$$

Решение уравнения (49) будет удовлетворять оценке (51), если потребовать выполнения неравенства

$$\frac{\kappa}{\alpha}\left(\alpha - \ln\left[1 + (x^m - 1)(\frac{1}{x^m + 1} - \frac{\kappa}{\alpha})\right]\right) - \lambda\psi + 1 - \frac{1}{x^m + 1} + \frac{\kappa}{\alpha} > 0.$$

Это неравенство равносильно (30).

Неравенство, обеспечивающее неустойчивость исследуемого колебания,

$$\left|\frac{df(\sigma_1)}{d\sigma}\frac{df(\sigma_2)}{d\sigma}\cdots\frac{df(\sigma_m)}{d\sigma}\right| > 1,$$

эквивалентно следующей оценке

$$y > \alpha - \ln\left[1 + (x^m - 1)(\frac{1}{x^m + 1} - \frac{\kappa}{\alpha})\right].$$

Решение уравнения (49) будет удовлетворять последней оценке, как только

$$\frac{\kappa}{\alpha}\left(\alpha - \ln\left[1 + (x^m - 1)(\frac{1}{x^m + 1} - \frac{\kappa}{\alpha})\right]\right) - \lambda\psi + 1 - \frac{1}{x^m + 1} + \frac{\kappa}{\alpha} < 0,$$

что сводится к (31). Теорема 5 доказана.

Литература

1. **Гелиг А.Х., Чурилов А.Н.** Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. СПб: Изд-во С.-Пб. ун-та, 1993. 268с.

2. **Кипнис М.М.** Хаотические явления в детерминированной широтно-импульсной системе управления// *Техническая кибернетика. 1992. №1. С. 108–112.*

3. **Кипнис М.М.** Символическая и хаотическая динамика широтно-импульсной системы управления// *Доклады Академии наук. 1992. Т. 324. №2. С. 272–274.*

4. **Шарковский А.,Н., Коляда С.,Ф., Сивак А.,Г., Федоренко В.В.** Динамика одномерных отображений. Киев: Наук. думка, 1989.

5. **Антонова Н.А.** Хаос и порядок в широтно-импульсных системах управления//*Вестник Сыкт. ун-та. Сер.1. 1995. Вып.1. С.111–118.*

Summary

Antonova N.A. Dynamic of one dimentional pulse-width modulated control systems

Nesessary and sufficient conditions are obtained for existence and instability of T-periodic modes in control systems employing pulse-width modulation of the first and the second kinds.

Сыктывкарский университет *Поступила 15.09.98*