*Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.3.1999*

УДК 517.987

Неатомичность некоторых конструкций из неатомических векторных мер

И. И. Баженов

Исследуется свойство неатомичности векторных мер. Показано, что сумма (конечная или бесконечная) неатомических банаховозначных мер является неатомической мерой. Аналогичный результат получен для декартовых произведений векторных мер.

1. Постановка задачи. Пусть $(T, \mathcal{A})$ – измеримое пространство, X – топологическое векторное пространство. Как обычно, под векторной мерой понимается счетно-аддитивная функция множества $m : \mathcal{A} \to X$. Множество $E_0 \in \mathcal{A}$ называется атомом меры m, если $m(E_0) \neq \mathbb{O}_X$ и для каждого $E \in \mathcal{A}$, $E \subset E_0$ либо $m(E) = \mathbb{O}_X$, либо $m(E) = m(E_0)$. Мера $m : \mathcal{A} \to X$ называется неатомической, если она не имеет атомов.

В связи с понятием неатомической меры возникают вопросы следующего характера. Пусть $m_1 : \mathcal{A} \to X$, $m_2 : \mathcal{A} \to X$ – две векторные меры. Будет ли неатомической мера $m = m_1 + m_2$ (сумма мер определяется естественным образом), если m_1 и m_2 являются неатомическими? Может ли быть сумма двух атомических мер мерой неатомической? Можно рассматривать и другие конструкции мер и ставить аналогичные вопросы. В частности, представляет интерес вопрос о неатомичности векторной меры $m : \mathcal{A} \to X \times Y$, $m = (m_1, m_2)$ и $m_1 : \mathcal{A} \to X$, $m_2 : \mathcal{A} \to Y$ в зависимости от неатомичности координатных мер m_1 и m_2. Некоторые из этих задач были поставлены в [1]. Здесь мы приводим их подробное решение. Аналогичные задачи рассматривались в [3] для случая скалярных мер.

В предлагаемой общей постановке, когда множество значений меры m является произвольным топологическим пространством, ответы на поставленные вопросы не являются тривиальными. Об этом свидетельствуют два следующих примера.

Пример 1. Пусть $(T, \mathcal{A})$ – измеримое пространство, $t_0 \in T$ и для каждого $E \in \mathcal{A}$ $m_1(E) = K_E(t_0)$, $m_2(E) = -K_E(t_0)$, где $K_E(t)$ – характеристическая функция (индикатор) множества $E \in \mathcal{A}$. Очевидно, что $m_1, m_2 : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ являются скалярными мерами. Каждая из них имеет атомом множество T, но для любого $E \in \mathcal{A}$ $m(E) = m_1(E) + m_2(E) = 0$. Таким образом, сумма двух атомических мер m_1 и m_2 является тривиальной (тождественно равной нулю) и поэтому будет неатомической.

Пример 2. Пусть P – бесконечное и несчетное множество, $\mathcal{B}_P$ – σ-алгебра подмножеств отрезка $[0,1]$ для каждого $p \in P$. Положим $T = [0,1]^p$ и $\mathcal{A} = \bigotimes_{p \in P} \mathcal{B}_p$ – произведение σ-алгебр $\mathcal{B}_p$. Зафиксируем точку $t_0 \in T$ и определим векторные меры $m_0, m_1 : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^T$, задав их формулами

$$m_1(E) = K_E(t), \quad t \in T,$$

$$m_0(E) = K_E(t_0) K_T(t) = K_E(t_0), \quad t \in T,$$

где $K_E(t)$ – индикатор множества $E \in \mathcal{A}$. Обозначим $m_2(E) = m_0(E) - m_1(E)$, $E \in \mathcal{A}$. Мера m_0 имеет атомом множество T, а меры m_1 и m_2 являются неатомическими. Действительно, если $E \neq \emptyset$, $E \neq T$, $E \in \mathcal{A}$, то $m_1(E) \neq \mathbb{O}$ и $m_2(E) = m_0(E) - m_1(E) \neq \mathbb{O}$. Таким образом, хотя мера m_0 является суммой двух неатомических мер, она имеет атом.

2. Неатомичность меры со значениями в декартовом произведении пространств. Пусть X, Y – банаховы пространства и $m_1 : \mathcal{A} \to X$, $m_2 : \mathcal{A} \to Y$ две векторные меры. В этом параграфе мы исследуем вопрос о неатомичности меры $m : \mathcal{A} \to X \times Y$, задаваемой формулой $m(E) = (m_1(E), m_2(E))$, $E \in \mathcal{A}$, в зависимости от неатомичности координатных мер m_1 и m_2. Сформулируем сначала несколько вспомогательных утверждений, доказательство которых непосредственно вытекает из определений.

Лемма 1. Пусть $m : \mathcal{A} \to X$ – векторная мера и $E_0 \in \mathcal{A}$ является атомом m. Пусть далее $E \subset E_0$ и $E \in \mathcal{A}$. Тогда

1) если $m(E) \neq \mathbb{O}$, то E также является атомом меры m;

2) если $m(E) = \mathbb{O}$, то множество $E_0 \setminus E$ – атом меры m, причем $m(A) = \mathbb{O}$ для любого измеримого множества $A \subset E$.

Лемма 2. Пусть $m : \mathcal{A} \to X$ неатомическая векторная мера, не равная тождественно нулю. Тогда существует последовательность измеримых множеств (E_n) такая, что $E_n \supset E_{n+1}$, $m(E_n) \neq \mathbb{O}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $m(E_n) \to \mathbb{O}$ при $n \to \infty$.

Лемма 3. Пусть $m_1 : \mathcal{A} \to X$, $m_2 : \mathcal{A} \to Y$ две векторные меры, E_1 и E_2 являются атомами мер m_1 и m_2, соответственно. Тогда выполнено одно из утверждений:

1) существует измеримое множество $E \subset E_1 \cap E_2$ такое, что E является атомом мер m_1 и m_2 одновременно;

2) существуют дизъюнктные измеримые множества $A_1 \subset E_1$ и $A_2 \subset E_2$ такие, что A_1 – атом меры m_1, A_2 – атом меры m_2.

Лемма 4. Пусть $m = (m_1, m_2) : \mathcal{A} \to X \times Y$ векторная мера, задаваемая координатными мерами $m_1 : \mathcal{A} \to X$, $m_2 : \mathcal{A} \to Y$. Если множество $E_0 \in \mathcal{A}$ является атомом m_1 и m_2 одновременно, то существует $E \subset E_0$, $E \in \mathcal{A}$, являющееся атомом меры m.

Теорема 1. *Пусть $m_1 : \mathcal{A} \to X$ и $m_2 : \mathcal{A} \to Y$ – векторные меры, множество $E_0 \in \mathcal{A}$ является атомом меры m_1, а мера m_2 не имеет атомов, содержащихся во множестве E_0. Тогда существует измеримое множество $A \subset E_0$ такое, что $m_1(A) \neq \mathbb{O}_X$ и $m_2(E) = \mathbb{O}_Y$ для всех $E \subset A$.*

Доказательство. Пусть множество $E_0 \in \mathcal{A}$ удовлетворяет условиям теоремы. Предположим, что существует $E \subset E_0$, $E \in \mathcal{A}$ такое, что $m_2(E) \neq \mathbb{O}_Y$. В противном случае само множество E_0 удовлетворяет утверждению теоремы.

Рассмотрим семейство множеств

$$\mathcal{N}_1 = \{E \in \mathcal{A} : \ E \subset E_0, \ m_2(E) \neq \mathbb{O}_Y \text{ и } m_1(E) = \mathbb{O}_X\}$$

и заметим, что $\mathcal{N}_1 \neq \emptyset$. Действительно, если $m_2(E) \neq \mathbb{O}_Y$ и $m_1(E) \neq \mathbb{O}_X$, то в силу леммы 1 множество E будет атомом меры m_1. В силу неатомичности меры m_2 найдется $B \subset E$, такое, что $m_2(B) \neq \mathbb{O}_Y$ и $m_2(B) \neq m_2(E)$. Тогда, если $m_1(B) = \mathbb{O}_X$, то $B \in \mathcal{N}_1$. Если же $m_1(B) \neq \mathbb{O}$, то $m_1(E \setminus B) = m_1(E) - m_1(B) = \mathbb{O}_X$ в силу того, что E атом m_1. При этом $m_2(E \setminus B) = m_2(E) - m_2(B) \neq \mathbb{O}_Y$ и, следовательно, $E \setminus B \in \mathcal{N}_1$.

Пусть теперь

$$k_1 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists E \in \mathcal{N}_1 : \|m_2(E)\| \geqslant \frac{1}{n}\}$$

и $E_1 \in \mathcal{N}_1$ такое, что $\|m_2(E_1)\| \geqslant \frac{1}{k_1}$. Рассмотрим множество $E_0 \setminus E_1 \in \mathcal{A}$. Так как $E_1 \in \mathcal{N}_1$, то $m_1(E_0 \setminus E_1) = m_1(E_0) - m_1(E_1) = m_1(E_0)$ и, стало быть, множество $E_0 \setminus E_1$ является атомом меры m_1. Если теперь $m_2(E_0 \setminus E_1) \equiv \mathbb{O}_Y$, то есть $m_2(B) = 0_Y$ для любого $B \subset E_0 \setminus E_1$, то множество $E_0 \setminus E_1$ удовлетворяет утверждению теоремы. В противном случае мы можем построить семейство множеств

$$\mathcal{N}_2 = \{E \in \mathcal{A} : \ E \subset E_0 \setminus E_1, \ m_2(E) \neq \mathbb{O}_Y \text{ и } m_1(E) = \mathbb{O}_X\},$$

которое также будет непустым. Обозначим

$$k_2 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists E \in \mathcal{N}_2 : \|m_2(E)\| \geqslant \frac{1}{n}\}$$

и положим $E_2 \in \mathcal{N}_2$ таким, что $\|m_2(E_2)\| \geqslant \dfrac{1}{k_2}$. Заметим, что $E_2 \subset E_0 \setminus E_1$, $m_1(E_2) = \mathbb{O}_X$ и $k_2 \geqslant k_1$.

Далее рассуждаем по индукции. Пусть построена последовательность попарно дизъюнктных множеств $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A}$ таких, что

1) $E_i \subset E_0 \setminus \left(\bigcup\limits_{k=1}^{i-1} E_k\right)$, $2 \leqslant i \leqslant n$,

2) $m_1(E_i) = \mathbb{O}_X$, $1 \leqslant i \leqslant n$,

3) $\|m_2(E_i)\| \geqslant \dfrac{1}{k_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $k_i \in \mathbb{N}$ и $k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_n$.

Рассмотрим множество $E_0 \setminus \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k\right)$ и заметим, что $m_1\left(E_0 \setminus \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k\right)\right) = m_1(E_0) - \sum\limits_{k=1}^{n} m_1(E_k) = m_1(E_0) - \mathbb{O}_X \neq \mathbb{O}_X$. Если теперь $m_2\left(E_0 \setminus \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k\right)\right) \equiv \mathbb{O}_Y$, то множество $E_0 \setminus \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k\right)$ удовлетворяет утверждению теоремы. В противном случае будет построено непустое семейство множеств

$$\mathcal{N}_{n+1} = \{E \in \mathcal{A} : E \subset E_0 \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right), \ m_2(E) \neq \mathbb{O}_Y \text{ и } m_1(E) = \mathbb{O}_X\},$$

а также найдены число

$$k_{n+1} = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists E \in \mathcal{N}_{n+1} : \|m_2(E)\| \geqslant \frac{1}{n}\}$$

и множество $E_{n+1} \in \mathcal{N}_{n+1}$ со свойством $\|m_2(E_{n+1})\| \geqslant \dfrac{1}{k_{n+1}}$.

Таким образом, либо на каком-то шаге мы обнаружим множество, удовлетворяющее утверждению теоремы, либо построим последовательность множеств (E_n) со свойствами 1)–3), справедливыми для любого номера $n \in \mathbb{N}$.

Поскольку построенная последовательность (E_n) состоит из попарно дизъюнктных множеств, то $m_2(E_n) \to \mathbb{O}_Y$ и, следовательно, $\dfrac{1}{k_n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим множество $A = E_0 \setminus \left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k \right)$. Очевидно, что $m_1(A) = m_1(E_0) - \sum\limits_{k=1}^{\infty} m_1(E_k) = m_1(E_0) \neq \mathbb{O}_X$ и A является атомом меры m_1. Покажем, что A искомое множество, то есть $m_2(A) \equiv \mathbb{O}_Y$.

Пусть $B \subset A$, $B \in \mathcal{A}$ и $m_2(B) \neq \mathbb{O}_Y$. Рассмотрим произвольное $C \subset B$, $C \in \mathcal{A}$. Если $m_1(C) = \mathbb{O}_X$, то в силу свойств последовательности (k_n) будем иметь $\|m_2(C)\| \leqslant \dfrac{1}{k_n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. А это означает, что $m_2(C) = \mathbb{O}_Y$. Если же $m_1(C) \neq \mathbb{O}_X$, то тогда $m_1(C) = m_1(A)$, и $m_1(A \setminus C) = m_1(A) - m_1(C) = \mathbb{O}_X$. Так как $A \setminus C \supset B \setminus C$, то в силу второго пункта леммы 1 будем иметь равенство $m_1(B \setminus C) = \mathbb{O}_X$. Но в этом случае, как мы только что показали, $m_2(B \setminus C) = \mathbb{O}_Y$, то есть $m_2(B) = m_2(C)$. Таким образом, множество B в этом случае будет являться атомом меры m_2, чего быть не может. Итак, для любого $B \in \mathcal{A}$, $B \subset A$ значение меры m_2 равно $\mathbb{O}_Y$, и множество A удовлетворяет утверждению теоремы.

Заметим, что множество A, существование которого устанавливает теорема, будет являться атомом меры m_1 в силу леммы 1.

Следующее утверждение является основным результатом настоящего параграфа.

Теорема 2. *Пусть X, Y – банаховы пространства и $m_1 : \mathcal{A} \to X$, $m_2 : \mathcal{A} \to Y$ - векторные меры. Мера $m : \mathcal{A} \to X \times Y$, определяемая формулой*

$$m(E) = (m_1(E), m_2(E)), \;\; E \in \mathcal{A},$$

является неатомической тогда и только тогда, когда являются неатомическими ее координатные меры m_1 и m_2.

Доказательство. Неатомичность меры m при условии неатомичности координатных мер m_1 и m_2 получается непосредственно из определения атома меры.

Проверим обратное утверждение. Рассмотрим неатомическую меру $m = (m_1, m_2)$ и предположим вначале, что мера m_1 имеет атомом множество $E_1 \in \mathcal{A}$, а у меры m_2 нет атомов среди измеримых подмножеств из E_1. Тогда по теореме 1 существует измеримое множество $E_0 \subset E_1$ такое, что $m_1(E) \neq \mathbb{O}_X$ и $m_2(E) \equiv \mathbb{O}_Y$. Легко понять, что в этом случае множество E_0 будет являться атомом меры m, что противоречит условию.

Пусть теперь $E_1 \in \mathcal{A}$ атом меры m_1 и существует множество $E_2 \in \mathcal{A}$, $E_2 \subset E_1$, являющееся атомом меры m_2. Если при этом $m_1(E_2) = \mathbb{O}_X$, то в силу леммы 1 $m_1(E_2) \equiv \mathbb{O}_X$. Тогда, очевидно, множество E_2 будет атомом меры m, чего быть не может. Наконец, пусть $m_1(E_2) \neq \mathbb{O}_X$. По лемме 1 множество E_2 будет являться атомом меры m_1. Итак, множество E_2 является атомом мер m_1 и m_2 одновременно. По лемме 4 найдется множество $E_0 \subset E_2$, которое будет атомом меры m, и мы опять пришли к противоречию. Следовательно, из неатомичности меры m вытекает неатомичность координатных мер m_1 и m_2. Теорема доказана.

3. Неатомичность контролирующей меры. Пусть X – банахово пространство и $m : \mathcal{A} \to X$ – произвольная векторная мера. Говорят, что конечная положительная скалярная мера $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ контролирует меру m, если условие $\lambda(E_n) \to 0$ влечет $m(E_n) \to \mathbb{O}_X$. В этом случае также говорят, что мера m абсолютно непрерывна относительно меры λ. Для банаховозначной меры $m : \mathcal{A} \to X$ свойство контролируемости может быть сформулировано в следующей форме: мера $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ контролирует меру $m : \mathcal{A} \to X$, если из условия $\lambda(E) = 0$ следует равенство $m(E) = \mathbb{O}_X$. Тот факт, что мера m абсолютно непрерывна относительно меры λ, будем обозначать символом $m << \lambda$.

В силу теоремы Бартла-Данфорда-Шварца (см., например, [2], с.14) любая банаховозначная мера $m : \mathcal{A} \to X$ контролируется некоторой скалярной мерой $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$. Ясно, что контролирующая мера для данной векторной меры определяется неоднозначно. Несложно показать (см., например,[4]), что контролирующую меру $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ для векторной меры $m : \mathcal{A} \to X$ можно построить так, чтобы она удовлетворяла дополнительному условию:

$$\lambda(E) \leqslant \sup\{\|m(A)\| : A \subset E,\ A \in \mathcal{A}\},\ E \in \mathcal{A}. \tag{1}$$

В дальнейшем меру $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$, контролирующую меру $m : \mathcal{A} \to X$ и удовлетворяющую дополнительному условию (1), будем называть эквивалентной скалярной мерой и обозначать этот факт символом $m \sim \lambda$. Заметим, что, если $m \sim \lambda$, то $m << \lambda$ и $\lambda << m$.

В этом параграфе мы исследуем свойство неатомичности векторной меры и контролирующей ее скалярной меры.

Теорема 3. *Пусть $m : \mathcal{A} \to X$ векторная мера со значениями в банаховом пространстве X и $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ эквивалентная ей скалярная мера. Мера m является неатомической тогда и только тогда, когда λ – неатомическая мера.*

Доказательство. Если предположить, что мера m имеет атомом множество $E_0 \in \mathcal{A}$, а мера λ является неатомической, то в силу теоремы 1 можно найти атом $A \subset E_0$ меры m такой, что $\lambda(A) \equiv 0$. Но это противоречит условию $m << \lambda$, так как $m(A) \neq \mathbb{O}_X$.

Если же предположить, что мера λ имеет атом $E_0 \in \mathcal{A}$, а мера m – неатомическая, то в силу теоремы 1 найдется атом $A \subset E_0$ меры λ такой: что $m(A) \equiv \mathbb{O}_X$. Последнее противоречит условию (1) эквивалентной меры λ, так как $\lambda(A) \neq 0$. Теорема доказана.

Замечание 1. В доказательстве неатомичности меры m при условии неатомичности λ мы использовали лишь свойство абсолютной непрерывности m относительно λ. Таким образом, векторная мера m является неатомической, если хотя бы одна контролирующая ее скалярная мера λ является неатомической.

Замечание 2. В доказательстве неатомичности меры λ при условии неатомичности меры m мы существенно использовали свойство (1) эквивалентной меры. Следующий пример показывает, что утверждение теоремы в этой части не будет выполнено, если заменить условие $m \sim \lambda$ более слабым $m << \lambda$.

Пусть $T = [0,1] \cup \{2\}$, $\mathcal{A}$ – σ-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств множества T, $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ – мера Лебега на T. Рассмотрим меру $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, задав ее формулой

$$\mu(E) = \lambda(E) + K_E(2), \quad E \in \mathcal{A}.$$

Очевидно, что $\lambda << \mu$, мера λ является неатомической, а мера μ имеет атомом множество $\{2\}$.

4. Неатомичность суммы векторных мер. Пусть $m_1 : \mathcal{A} \to X$ и $m_2 : \mathcal{A} \to X$ – две векторных меры со значениями в банаховом пространстве X. Пусть далее $\lambda_1 : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$, $\lambda_2 : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ скалярные меры, эквивалентные мерам m_1 и m_2, соответственно. Если m_1 и m_2 являются неатомическими, то в силу теоремы 3 меры λ_1 и λ_2 также не имеют атомов. Покажем, что в этом случае их сумма $\lambda(E) = \lambda_1(E) + \lambda_2(E)$, $E \in \mathcal{A}$ также будет неатомической мерой.

Если $E_0 \in \mathcal{A}$ атом меры λ и $\lambda_1(E_0) = 0$ или $\lambda_2(E_0) = 0$, то множество E_0 будет атомом меры λ_2 и λ_1, соответственно. Если же $\lambda_1(E_0)\lambda_2(E) \neq 0$, то E_0 будет атомом мер λ_1 и λ_2 одновременно. В этих рассуждениях существенно используется свойство монотонности положительной скалярной меры.

Теперь заметим, что λ контролирует сумму векторных мер $m(E) = m_1(E) + m_2(E)$, $E \in \mathcal{A}$. Действительно, если $\lambda(E) = 0$, то $\lambda_1(E) =$

$\lambda_2(E) = 0$ и $m_1(E) = m_2(E) = \mathbb{O}_X$, так как $\lambda_1 >> m_1$ и $\lambda_2 >> m_2$. Учитывая замечание 1 к теореме 3, мы можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $m_1 : \mathcal{A} \to X$, $m_2 : \mathcal{A} \to X$ – неатомические векторные меры со значениями в банаховом пространстве X. Тогда мера $m = m_1 + m_2$ является также неатомической.*

Последнее утверждение может быть обобщено на случай счетного числа слагаемых. Пусть $m_n : \mathcal{A} \to X$ – некоторая последовательность векторных мер, обладающая тем свойством, что для произвольной последовательности (x_n), $x_n \in \overline{co}\{m_n(E) : E \in \mathcal{A}\}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится в X. Такую последовательность векторных мер называют контрольной системой или системой управления. Любая контрольная система определяет новую векторную меру $m : \mathcal{A} \to X$, задаваемую формулой $m(E) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n(E)$, $E \in \mathcal{A}$.

Теорема 5. *Если контрольная система $m_n : \mathcal{A} \to X$, $n \in \mathbb{N}$ состоит из неатомических векторных мер со значениями в банаховом пространстве X, то векторная мера $m : \mathcal{A} \to X$, определяемая равенством $m(E) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n(E)$, $E \in \mathcal{A}$, также является неатомической.*

Доказательство. В силу теоремы Бартла-Данфорда-Шварца существует последовательность скалярных положительных мер $\lambda_n : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ таких, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\lambda_n \sim m_n$. Более того, если контрольная система состояла из неатомических векторных мер, то в силу теоремы 3 каждая мера λ_n также является неатомической. Очевидно, что функция $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$, определяемая равенством

$$\lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\lambda_n(E)}{\lambda_n(T)}, \quad E \in \mathcal{A},$$

является скалярной положительной мерой.

Заметим, что если $\lambda(E) = 0$, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\lambda_n(E) = 0$ и, стало быть, $m_n(E) = \mathbb{O}_X$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, мера $\lambda >> m$. В силу замечания 1 к теореме 3 осталось проверить неатомичность меры λ.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ равенство $\mu_n(E) = \dfrac{1}{2^n}\dfrac{\lambda_n(E)}{\lambda_n(T)}$, $E \in \mathcal{A}$, задает неатомическую положительную меру. Покажем, что мера $\lambda(E) \equiv$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_n(E)$ является неатомической, при условии, что меры μ_n не имеют атомов.

Пусть $E_0 \in \mathcal{A}$ и $\lambda(E_0) \neq 0$, следовательно, найдется номер n_0 такой, что $\mu_{n_0}(E_0) \neq 0$. Так как мера μ_{n_0} является неатомической, то существует множество $E \subset E_0$, $E \in \mathcal{A}$ такое, что $0 < \mu_{n_0}(E) < \mu_{n_0}(E_0)$. При этом в силу монотонности мер μ_n для каждого $n \neq n_0$ $0 \leqslant \mu_n(E) \leqslant \mu_n(E_0)$. Таким образом,

$$0 < \sum_{n=1, n\neq n_0}^{\infty} \mu_n(E) + \mu_{n_0}(E) < \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(E_0)$$

и, следовательно, $0 < \lambda(E) < \lambda(E_0)$. Последнее означает, что мера λ не имеет атомов. Теорема доказана.

4. Скалярно неатомические меры. В этом параграфе мы приводим еще одно приложение теоремы 3 к исследованию класса скалярно неатомических векторных мер.

Будем говорить, что векторная мера $m : \mathcal{A} \to X$ является скалярно неатомической, если для любого линейного непрерывного функционала $f \in X^*$ скалярная мера $f_m : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, определяемая формулой $f_m(E) = f(m(E)), E \in \mathcal{A}$, является неатомической. Если $E_0 \in \mathcal{A}$ является атомом меры m, то легко построить функционал $f \in X^*$ такой, что множество E_0 будет атомом скалярной меры f_m. Таким образом, скалярно неатомическая мера всегда является неатомической.

Когда X является произвольным локально выпуклым пространством, обратное утверждение, вообще говоря, неверно (см.[5], пример 1). Однако для векторных мер со значениями в банаховых пространствах семейства неатомических и скалярно неатомических мер совпадают. Это непосредственно вытекает из следующего более общего утверждения.

Теорема 6. *Пусть X, Y - банаховы пространства и $F : X \to Y$ линейный ограниченный оператор. Если векторная мера $m : \mathcal{A} \to X$ является неатомической, то мера $m_F : \mathcal{A} \to Y$, определяемая формулой $m_F(E) = F(m(E)), E \in \mathcal{A}$, также является неатомической.*

Доказательство. Пусть $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ скалярная мера, эквивалентная мере $m : \mathcal{A} \to X$. В силу теоремы 3 она является неатомической. Если $\lambda(E) = 0$, то $m(E) = \mathbb{O}_X$ и $m_F(E) = F(\mathbb{O}_X) = \mathbb{O}_Y$. Следовательно, $\lambda >> m_F$ и в силу замечания 1 к теореме 3 мера m_F не будет иметь атомов.

Литература

1. **Баженов И.И.** О некоторых проблемах, связанных с понятием неатомической векторной меры //*Тезисы докладов Международной конференции по комплексному анализу и смежным вопросам. Нижний Новгород. 1997. С. 12–13.*

2. **Diestal J., Uhl J.J.** Vector measures. Providence, 1977. 322 pp.

3. **Capek P.** The atoms of a countable sum set functions // *Math. Slovaca. 1989. V.39. №1. P. 81–89.*

4. **Порошкин А.Г.** Векторные меры. Учебное пособие по спецкурсу. Сыктывкар: Сыктывкарский ун-т, 1990. 52 с.

5. **Kluvanek I.** The range of vector-valued measure //*Math. Systems Theory. 1973. V.7.*

Summary

Bazhenov I. I. The property of nonatomicity under some constractions of nonatomic vector measures

Various properties of nonatomic and atomic measures are considered. It is proved that every measure obtained by a sum or a product from nonatomic measures with values in the Banach space is nonatomic.

Сыктывкарский университет

Поступила 15.09.98