МАТЕМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (29). 2018

УДК 517.977

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ С АКУСТИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ

С. Э. Исаева

В данной работе рассматривается смешанная задача для системы гиперболических уравнений с акустическими условиями сопряжения. Доказана теорема о существовании слабого решения для рассматриваемой задачи. Использован метод Галеркина.
Ключевые слова: акустические условия сопряжения, граничное условие Дирихле, смешанная задача, слабое решение, метод Галеркина.

1. Введение

Акустические граничные условия были введены в работе [1] (см. также [2] — [6]). В работе [1] авторы выводят уравнения

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, \infty)\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \delta_t \quad \text{на} \quad \Gamma \times (0, \infty)\,,$$

$$m\delta_{tt} + d\delta_t + k\delta = -\rho_0 u_t \quad \text{на} \quad \Gamma \times (0, \infty)$$

как теоретическую модель, описывающую акустическое волновое движение жидкости; здесь $\rho_0 = \rho_0\,(x)\,,\ m = m\,(x)\,,\ d = d\,(x)\,,\ k = k\,(x)$ — физически известные величины, $u\,(x,t)$ — потенциал скоростей жидкости и $\delta\,(x,t)$ — перемещение точки $x \in \Gamma$ в момент времени t в направлении нормали границы Γ в этой точке. Для получения этой модели предположено, что каждая точка поверхности Γ реагирует как струна на избыточное давление акустической волны и что разные точки Γ не взаимодействуют друг с другом.

Задачи сопряжения возникают в некоторых приложениях физики и биологии. В данной работе рассматривается смешанная задача для системы гиперболических уравнений с акустическими условиями сопряжения, которая моделирует поперечные акустические колебания мембраны, состоящей из двух разных материалов. С помощью метода Галеркина доказана теорема о существовании слабого решения для рассматриваемой задачи.

2. Постановка задачи и основные результаты

Пусть $\Omega \subset R^N\,(N \geqslant 1)$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ_1, $\Omega_2 \subset \Omega$ — ограниченная подобласть с достаточно гладкой границей Γ_2 и $\Omega_1 = \Omega \backslash (\Omega_2 \bigcup \Gamma_2)$ — с границей $\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, причем $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \varnothing$. Рассмотрим систему

$$u_{tt} - \Delta u = f_1\,, \qquad (x,t) \in \Omega_1 \times (0,T)\ , \tag{1}$$

$$\upsilon_{tt} - \Delta \upsilon = f_2\,, \qquad (x,t) \in \Omega_2 \times (0,T) \tag{2}$$

с граничными условиями

$$u = 0, \qquad (x,t) \in \Gamma_1 \times (0,T)\,, \tag{3}$$

$$m\delta_{tt} + d\delta_t + k\delta = -\rho_0 u_t, \quad (x,t) \in \Gamma_2 \times (0,T)\,, \tag{4}$$

$$\delta_t = \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial \upsilon}{\partial \nu},\ \ u = \upsilon\,, \quad (x,t) \in \Gamma_2 \times (0,T) \tag{5}$$

и с начальными условиями

$$u\,|_{t=0} = u_0\,, u_t\,|_{t=0} = u_1\ , \quad x \in \bar{\Omega}_1, \tag{6}$$

$$\upsilon\,|_{t=0} = \upsilon_0\,, \upsilon_t\,|_{t=0} = \upsilon_1\ , \quad x \in \bar{\Omega}_2, \tag{7}$$

$$\delta\,|_{t=0} = \delta_0\,,\ \delta_t\,|_{t=0} = \frac{\partial u_0}{\partial \nu} - \frac{\partial \upsilon_0}{\partial \nu} \equiv \delta_1, \quad x \in \bar{\Gamma}_2, \tag{8}$$

где $m = m\,(x)\,,\,d = d\,(x)\,,\,k = k\,(x)\,, \rho_0 = \rho_0\,(x)\ :\ \Gamma_2 \to R$ — известные функции, $\nu\,(x)$ — внешний единичный вектор границы Γ_2. Граничные условия (4) — (5) на части Γ_2 границы Γ называются акустическими условиями сопряжения. Введем подпространство $H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)$ пространства $H^1(\Omega_1)$:

$$H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1) = \left\{\, u \in H^1(\Omega_1) :\ \gamma_0\,(u) = 0 \ \text{ п.в. на } \Gamma_1 \right\},$$

где $\gamma_0: \ H^1(\Omega_1) \to H^{\frac{1}{2}}(\Omega_1)$ — оператор следа нулевого порядка (см. [7]). Предполагается, что

$$\begin{gathered} u_0 \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1), \ u_1 \in L^2(\Omega_1), \\ \upsilon_0 \in H^1(\Omega_2), \upsilon_1 \in L^2(\Omega_2), \delta_0, \delta_1 \in L^2(\Gamma_2), \end{gathered} \tag{9}$$

$$f_1 \in L^2(\Omega_1 \times (0,T)) \ , \ f_2 \in L^2(\Omega_2 \times (0,T)) \ . \tag{10}$$

Определение. Семейство функций $(u(x,t), \upsilon(x,t), \delta(x,t))$, таких, что

$$u \in L^\infty\left(0,T; H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)\right), u_t \in L^\infty\left(0,T; L^2(\Omega_1)\right),$$

$$\upsilon \in L^\infty\left(0,T; H^1(\Omega_2)\right), \upsilon_t \in L^\infty\left(0,T; L^2(\Omega_2)\right),$$

$$\delta, \ \delta_t \in L^\infty\left(0,T; L^2(\Gamma_2)\right)$$

и для которых удовлетворяются равенства

$$\frac{d}{dt}(u_t, \varphi)_1 + (\nabla u, \nabla\varphi)_1 - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, \gamma_0(\varphi)\right)_{\Gamma_2} =$$

$$= (f_1, \varphi)_1 \text{ для } \ \forall \varphi \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1), \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt}(\upsilon_t, \psi)_2 + (\nabla \upsilon, \nabla\psi)_2 + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial \nu}, \gamma_0(\psi)\right)_{\Gamma_2} =$$

$$= (f_2, \psi)_2 \text{ для } \ \forall \psi \in H^1(\Omega_2), \tag{12}$$

$$\frac{d}{dt}(m\delta_t, e)_{\Gamma_2} + (\rho_0\gamma_0(u_t), e)_{\Gamma_2} +$$

$$+ (d\delta_t + k\delta, e)_{\Gamma_2} = 0 \ \text{ для } \ \forall e \in L^2(\Gamma_2) \tag{13}$$

(в смысле распределений в $D'(0,T)$),

$$\delta_t = \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial \upsilon}{\partial \nu}, \ \ u_t = \upsilon_t\,, \quad (x,t) \in \Gamma_2 \times]0,T[\,, \tag{14}$$

$$u\,|_{t=0} = u_0\,, u_t\,|_{t=0} = u_1\,,\ x \in \Omega_1, \tag{15}$$

$$\upsilon\,|_{t=0} = \upsilon_0\,, \upsilon_t\,|_{t=0} = \upsilon_1\,,\ x \in \Omega_2, \tag{16}$$

$$\delta\,|_{t=0} = \delta_0\,, \ \ \delta_t\,|_{t=0} = \delta_1\,,\ x \in \Gamma_2, \tag{17}$$

называется слабым решением задачи (1) — (8).

Отметим, что через $(\cdot\,,\,\cdot)_1\,,\,(\cdot\,,\,\cdot)_2$ обозначены скалярные произведения в $L^2(\Omega_1),\ L^2(\Omega_2)$ соответственно.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (9) — (10) *и*

$$m,\,d,\,k,\rho_0\,\in C\left(\,\bar{\Gamma}_2\right)\,,\ m\geqslant 0,\ d>0,\ k\geqslant 0,\rho_0>0$$

для $\forall x\in\bar{\Gamma}_2$. *Тогда задача* (1) — (8) *имеет слабое решение* (u,υ,δ).

Доказательство. Пусть $\{\,\varphi_j\}\,,\ \{\,\psi_j\}$ и $\{\,e_j\}\,(j\in N)$ — ортогональные системы в пространствах $H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)\,,H^1(\Omega_2)$ и $L^2(\Gamma_2)$ соответственно. Так как $\Gamma_1\,,\,\Gamma_2$ являются достаточно гладкими, то $\varphi_j\ \in\ H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)\bigcap L^\infty(\Omega_1)$ и $\psi_j\ \in\ H^1(\Omega_2)\bigcap L^\infty(\Omega_2)$. Рассмотрим функции

$$u_m:\ \ \Omega_1\times[0,T_m]\,\to\,R,$$

$$\upsilon_m:\ \ \Omega_2\times[0,T_m]\,\to\,R,$$

$$\delta_m:\ \ \Gamma_2\times[0,T_m]\,\to\,R$$

для любого $m\in N$, такие, что

$$u_m(x,t)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{jm}(t)\ \varphi_j(x)\ ,$$

$$\upsilon_m(x,t)=\sum_{j=1}^{m}\beta_{jm}(t)\ \psi_j(x)\ ,$$

$$\delta_m(x,t)=\sum_{j=1}^{m}\eta_{jm}(t)\ e_j(x)$$

и которые являются решениями следующей задачи (т. е. коэффициенты $\alpha_{jm}(t)\ ,\ \beta_{jm}(t)\ ,\ \eta_{jm}(t)$ удовлетворяют следующей системе):

$$(u_{mtt},\,\varphi_j)_1+(\nabla u_m,\,\nabla\varphi_j)_1-\left(\frac{\partial u_m}{\partial\nu},\,\gamma_0(\varphi_j)\right)_{\Gamma_2}=(f_1,\,\varphi_j)_1\,, \tag{18}$$

$$(\upsilon_{mtt},\,\psi_j)_2+(\nabla\upsilon_m,\,\nabla\psi_j)_2+\left(\frac{\partial\upsilon_m}{\partial\nu},\,\gamma_0(\psi_j)\right)_{\Gamma_2}=(f_2,\,\psi_j)_2\,, \tag{19}$$

$$(m\delta_{mtt}+\rho_0\gamma_0(u_{mt})+d\delta_{mt}+k\delta_m,\,e_j)_{\Gamma_2}=0, \tag{20}$$

$$\delta_{mt}=\frac{\partial u_m}{\partial\nu}-\frac{\partial\upsilon_m}{\partial\nu},\ \ u_m=\upsilon_m\,,\quad(x,t)\in\Gamma_2\times(0,T)\,, \tag{21}$$

$$u_m(x,0)=u_{0m}(x)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{jm}(0)\ \varphi_j(x)\ \ \Rightarrow\ \ \alpha_{jm}(0)=(u_0,\,\varphi_j)_1\,,\qquad(22)$$

$$u_{m_t}(x,0)=u_{1m}(x)=\sum_{j=1}^{m}\alpha'_{jm}(0)\ \varphi_j(x)\ \ \Rightarrow\ \ \alpha'_{jm}(0)=(u_1,\,\varphi_j)_1\,,\qquad(23)$$

$$\upsilon_m(x,0)=\upsilon_{0m}(x)=\sum_{j=1}^{m}\beta_{jm}(0)\ \psi_j(x)\ \ \Rightarrow\ \ \beta_{jm}(0)=(\upsilon_0,\,\psi_j)_2\,,\qquad(24)$$

$$\upsilon_{m_t}(x,0)=\upsilon_{1m}(x)=\sum_{j=1}^{m}\beta'_{jm}(0)\ \psi_j(x)\ \ \Rightarrow\ \ \beta'_{jm}(0)=(\upsilon_1,\,\psi_j)_2\,,\qquad(25)$$

$$\delta_m(x,0)=\delta_{0m}(x)=\sum_{j=1}^{m}\eta_{jm}(0)\ e_j(x)\ \ \Rightarrow\ \ \eta_{jm}(0)=(\delta_0,\,e_j)_{\Gamma_2}\,,\qquad(26)$$

$$\delta_{mt}(x,0)=\delta_{1m}(x)=\sum_{j=1}^{m}\eta'_{jm}(0)\ e_j(x)\ \ \Rightarrow\ \ \eta'_{jm}(0)=(\delta_1,\,e_j)_{\Gamma_2}\,.\qquad(27)$$

Существование локальных решений $(u_m,\upsilon_m,\delta_m)_{m\in N}$ очевидно, так как (18) — (27) является задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (теорема Пеано). Умножая (18), (19), (20) на $\alpha_{jm}(t)$, $\beta_{jm}(t)$, $\eta_{jm}(t)$ соответственно и суммируя по $j=1,...,m$, получаем

$$(u_{mtt},\,\varphi)_1+(\nabla u_m,\,\nabla\varphi)_1-\left(\frac{\partial u_m}{\partial\nu},\,\gamma_0(\varphi)\right)_{\Gamma_2}=(f_1,\,\varphi)_1\ ,\qquad(28)$$

$$(\upsilon_{mtt},\,\psi)_2+(\nabla\upsilon_m,\,\nabla\psi)_2+\left(\frac{\partial\upsilon_m}{\partial\nu},\,\gamma_0(\psi)\right)_{\Gamma_2}=(f_2,\,\psi)_2\ ,\qquad(29)$$

$$(m\delta_{mtt}+\rho_0\gamma_0(u_{mt})+d\delta_{mt}+k\delta_m,\,e)_{\Gamma_2}=0\qquad(30)$$

для $\forall\varphi\in Span\ \{\varphi_1,\,\varphi_2,...,\,\varphi_m\,,...\}$, $\forall\psi\in Span\ \{\psi_1,\,\psi_2,...,\,\psi_m\,,...\}$, $\forall e\in Span\ \{e_1,\,e_2,...,\,e_m\,,...\}$. Полагая $\varphi=2u_{mt}$, $\psi=2\upsilon_{mt}$, $e=2\delta_{mt}$ в (28) — (30), получаем

$$\tfrac{d}{dt}\left\|u_{mt}\right\|_1^2+\tfrac{d}{dt}\left\|\nabla u_m\right\|_1^2-\left(\frac{\partial u_m}{\partial\nu},\,\gamma_0(2u_{mt})\right)_{\Gamma_2}=(f_1,\,2u_{mt})_1\ ,$$

$$\tfrac{d}{dt}\left\|\upsilon_{mt}\right\|_2^2+\tfrac{d}{dt}\left\|\nabla\upsilon_m\right\|_2^2+\left(\frac{\partial\upsilon_m}{\partial\nu},\,\gamma_0(2\upsilon_{mt})\right)_{\Gamma_2}=(f_2,\,2\upsilon_{mt})_2\ ,$$

$$\tfrac{d}{dt}\left\|\sqrt{\frac{m}{\rho_0}}\delta_{mt}\right\|^2_{\Gamma_2}+2\left\|\sqrt{\frac{d}{\rho_0}}\delta_{mt}\right\|^2_{\Gamma_2}+\tfrac{d}{dt}\left\|\sqrt{\frac{k}{\rho_0}}\delta_{m}\right\|^2_{\Gamma_2}+\left(\gamma_0\left(u_{mt}\right),\,2\delta_{mt}\right)_{\Gamma_2}=0$$

или учитывая (21):

$$\begin{gathered}\tfrac{d}{dt}\left(\|u_{mt}\|_1^2+\|\nabla u_m\|_1^2+\|\upsilon_{mt}\|_2^2+\|\nabla\upsilon_m\|_2^2\right)-\left(\tfrac{\partial u_m}{\partial\nu}-\tfrac{\partial\upsilon_m}{\partial\nu},\,\gamma_0\left(2u_{mt}\right)\right)_{\Gamma_2}=\\=\left(f_1,\,2u_{mt}\right)_1+\left(f_2,\,2\upsilon_{mt}\right)_2\,,\end{gathered}$$

$$\tfrac{d}{dt}\left(\left\|\sqrt{\frac{m}{\rho_0}}\delta_{mt}\right\|^2_{\Gamma_2}+\left\|\sqrt{\frac{k}{\rho_0}}\delta_{m}\right\|^2_{\Gamma_2}\right)+2\left\|\sqrt{\frac{d}{\rho_0}}\delta_{mt}\right\|^2_{\Gamma_2}+\left(\gamma_0\left(u_{mt}\right),\,2\delta_{mt}\right)_{\Gamma_2}=0.$$

Суммируя последние равенства и учитывая (21), имеем

$$\begin{gathered}\tfrac{d}{dt}\left(\|u_{mt}\|_1^2+\|\nabla u_m\|_1^2+\|\upsilon_{mt}\|_2^2+\|\nabla\upsilon_m\|_2^2+\left\|\sqrt{\tfrac{m}{\rho_0}}\delta_{mt}\right\|^2_{\Gamma_2}+\left\|\sqrt{\tfrac{k}{\rho_0}}\delta_{m}\right\|^2_{\Gamma_2}\right)+\\+2\left\|\sqrt{\tfrac{d}{\rho_0}}\delta_{mt}\right\|^2_{\Gamma_2}=\left(f_1,\,2u_{mt}\right)_1+\left(f_2,\,2\upsilon_{mt}\right)_2\,,\end{gathered}$$

откуда, интегрируя от 0 до t ($t\leqslant T_m$), получаем

$$\begin{gathered}\|u_{mt}\|_1^2+\|\nabla u_m\|_1^2+\|\upsilon_{mt}\|_2^2+\|\nabla\upsilon_m\|_2^2+\left\|\sqrt{\frac{k}{\rho_0}}\delta_{m}\right\|^2_{\Gamma_2}+\left\|\sqrt{\frac{m}{\rho_0}}\delta_{mt}\right\|^2_{\Gamma_2}-\\-\left(\|u_{1m}\|_1^2+\|\nabla u_{0m}\|_1^2+\|\upsilon_{1m}\|_2^2+\|\nabla\upsilon_{0m}\|_2^2+\left\|\sqrt{\frac{k}{\rho_0}}\delta_{0m}\right\|^2_{\Gamma_2}+\left\|\sqrt{\frac{m}{\rho_0}}\delta_{1m}\right\|^2_{\Gamma_2}\right)+\\+2\int_0^t\left\|\sqrt{\frac{d}{\rho_0}}\delta_{mt}\right\|^2_{\Gamma_2}d\tau=\int_0^t\left(f_1,\,2u_{mt}\right)_1d\tau+\int_0^t\left(f_2,\,2\upsilon_{mt}\right)_2d\tau.\end{gathered}$$

Отсюда в силу (9), (10) имеем

$$\begin{gathered}\|u_{mt}\|_1^2+\|\nabla u_m\|_1^2+\|\upsilon_{mt}\|_2^2+\|\nabla\upsilon_m\|_2^2+\left\|\sqrt{\frac{k}{\rho_0}}\delta_{m}\right\|^2_{\Gamma_2}+\left\|\sqrt{\frac{m}{\rho_0}}\delta_{mt}\right\|^2_{\Gamma_2}+\\+2\int_0^t\left\|\sqrt{\frac{d}{\rho_0}}\delta_{mt}\right\|^2_{\Gamma_2}d\tau\leqslant C_1+\int_0^t\left(\|u_{mt}\|_1^2+\|\upsilon_{mt}\|_2^2\right)d\tau,\end{gathered}$$

где C_1 — положительная константа, не зависящая от m. Применяя лемму Гронуолла в последнем неравенстве, можем получить, что

$$\|u_{mt}\|_1^2+\|\nabla u_m\|_1^2+\|\upsilon_{mt}\|_2^2+\|\nabla \upsilon_m\|_2^2+\|\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2+\|\delta_m\|_{\Gamma_2}^2+\int_0^t \|\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2 \, d\tau \ \leqslant C \ ,$$

где C — положительная константа не зависящая от m. Поэтому переходя к пределу в (28) — (30), (21) — (27) при $m \to \infty$, получаем (11) — (17).

Теорема доказана.

3. Заключение

В работе рассмотрена смешанная задача для системы гиперболических уравнений с акустическими условиями сопряжения, которая моделирует поперечные акустические колебания мембраны, состоящей из двух разных материалов Ω_1 и Ω_2. Доказана теорема о существовании слабого решения для рассматриваемой задачи.

Список литературы

1. **Beale J. T., Rosencrans I.** Acoustic boundary conditions // *Bull. Amer. Math.Soc. 1974. 80. Pp. 1276–1278.*

2. **Beale J. T.** Spectral properties of an acoustic boundary condition // *Indiana Univ. Math. J. 1976. 25. Pp. 895–917.*

3. **Beale J. T.** Acoustic scattering from locally reating surfaces // *Indiana Univ. Math. J. 1977. 26. Pp. 199–222.*

4. **Cousin A. T., Frota C. L., Larkin N. A.** On a system of Klein-Gordon type equations with acoustic boundary conditions // *J. Math. Appl. 2004. 293. Pp. 293–309.*

5. **Frota C. L., Cousin A. T., Larkin N. A.** Global solvability and asymptotic behaviour of a hyperbolic problem with acoustic boundary conditions // *Funkcial. Ekvac. 2001, vol. 44, n. 3. Pp. 471–485.*

6. **Jeong J. M., Park J. Y., Kang Y. H.** Global nonexistence of solutions for a quasilinear wave equation with acoustic boundary conditions // *Jeong et al. Boundary Value Problems. 2017. 42. Pp. 1–10.*

7. **Лионс Ж. Л., Мадженес Э.** Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 357 с.

Summary

Isayeva S. E. The initial boundary value problem for one system with acoustic transmission conditions

In this work we consider the initial-boundary value problem for one system of hyperbolic equations with acoustic transmission conditions. We prove the existence of weak solutions for this problem. Faedo-Galerkin method is used.
Keywords: acoustic transmission conditions, Dirichlet boundary condition, initial-boundary value problem, weak solution, Faedo-Galerkin method.

References

1. **Beale J. T., Rosencrans I.** Acoustic boundary conditions, *Bull. Amer. Math.Soc.*, 1974, 80, pp. 1276–1278.

2. **Beale J. T.** Spectral properties of an acoustic boundary condition, *Indiana Univ. Math. J.*, 1976, 25, pp. 895–917.

3. **Beale J. T.** Acoustic scattering from locally reating surfaces, *Indiana Univ. Math. J.*, 1977, 26, pp. 199–222.

4. **Cousin A. T., Frota C. L., Larkin N. A.** On a system of Klein-Gordon type equations with acoustic boundary conditions, *J. Math. Appl.*, 2004, 293, pp. 293–309.

5. **Frota C. L., Cousin A. T., Larkin N. A.** Global solvability and asymptotic behaviour of a hyperbolic problem with acoustic boundary conditions, *Funkcial. Ekvac.*, 2001, vol. 44, no. 3, pp. 471–485.

6. **Jeong J. M., Park J. Y., Kang Y. H.** Global nonexistence of solutions for a quasilinear wave equation with acoustic boundary conditions, *Jeong et al. Boundary Value Problems*, 2017, 42, pp. 1–10.

7. **Lions J. L., Magenes E.** *Neodnorodnyye granichnyye zadachi i ikh prilozheniya* (Inhomogeneous boundary value problems and their applications). Moscow, World Publ., 1971, 357 p.

Для цитирования: Исаева С. Э. Смешанная задача для одной системы с акустическими условиями сопряжения // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 4 (29). С. 34–42.*

For citation: Isayeva S. E. The initial boundary value problem for one system with acoustic transmission conditions, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2018, 4 (29), pp. 34–42.

Бакинский государственный университет *Поступила 15.01.2019*