ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (29). 2018

УДК 614.8

СУБОПТИМАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ В МЕТОДЕ АДДИТИВНОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ

А. А. Холопов

Линейное уравнение $x = b - Ax$ в банаховом пространстве решается методом аддитивного расщепления, когда оператор A делится на несколько частей и применяется соответствующая итерационная процедура. Находятся субоптимальные параметры расщепления, которые с точностью до малого параметра максимально расширяют спектральную область сходимости.
Ключевые слова: операторное уравнение, спектральная область сходимости, субоптимальные параметры.

1. Задача оптимизации параметров МАР

Широкий класс задач математической физики и теории упругости сводится к решению операторного уравнения 2-го рода $x = b - Ax$ в банаховом пространстве с ограниченным линейным оператором $A : X \to X$. Обычно обратный оператор A^{-1} неограничен или не существует, а точные формулы для решения отсутствуют, и для нахождения применяют итерационные методы. Хорошо известно, что метод простых итераций $x_{p+1} = b - Ax_p$, $p = 0,\ 1,\ \ldots$ сходится при любых начальных значениях , если спектр оператора содержится в отрытом единичном круге B_1 комплексной плоскости. В общем случае для решения уравнения можно применять многослойные итерационные процедуры, в том числе метод аддитивного расщепления [1–3]:

$$x_{p+n} = b - \alpha_1 \cdot Ax_p - \alpha_2 \cdot Ax_{p+1} - \ldots - \alpha_n \cdot Ax_{p+n-1},\ p = 0, 1, \ldots\ n \in N, \quad (1)$$

где параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ удовлетворяют соотношению

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1. \quad (2)$$

Спектральной областью сходимости процедуры (1) – (2) является односвязное открытое множество (максимальное по отношению включения точек) комплексной плоскости, принадлежность которому спектра оператора A гарантирует сходимость этой процедуры. Для метода простых итераций (случай $n = 1$) спектральной областью сходимости является B_1. Выбор параметров n и $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ позволяет существенно расширить спектральную область сходимости (1) – (2) вдоль вещественной оси. Например, в [1] показано, что при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 1/n$ область сходимости содержит интервал $(-1, M)$ на вещественной оси с наибольшим значением $M = M^* = n$.

В работах [2; 3] для схемы MAP решалась оптимизационная задача о нахождении таких параметров α_i^*, при которых при заданном n спектральная область сходимости (1) – (2) содержала бы интервал $(-1, M)$ на вещественной оси с наибольшим значением $M = M^*$.

В работе [3] было показано, что для параметров α_i^*, и M^* должны быть справедливы формулы:

$$\begin{aligned} &\alpha_p^* = \frac{2p}{n+1} \cdot \sin\frac{p\pi}{n+1} \cdot \mathrm{tg}\frac{\pi}{2(n+1)}, \quad p = 1, \dots, n, \\ &M^* = \mathrm{ctg}^2 \frac{\pi}{2(n+1)}. \end{aligned} \tag{3}$$

При этих параметрах область сходимости представляет собой объединение m дизъюнктных областей G_i, $i = 1, \dots, m$, которые последовательно примыкают друг к другу в точках A_i вещественной оси: $0 < A_1 < A_2 < \dots < A_{m-1}$ (см. рис.1).

Однако точки $A_1, A_2, \dots$ не входят в область сходимости, а принадлежат границе области, поэтому *не весь* интервал $(-1, M^*)$ содержится в ней. Ясно также, что сформулированная в [2; 3] оптимизационная задача не имеет решения в точном смысле, а приведенные в (3) параметры α_i^* и M^* можно назвать лишь *псевдооптимальными.*

В данной работе задача оптимизации (вдоль вещественной оси) параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ставится следующим образом:

Найти $\alpha_1 = \alpha_1^*(\epsilon), \dots, \alpha_n = \alpha_n^*(\epsilon)$, $M^*(\epsilon)$, *зависящие от малого параметра* $\epsilon > 0$, *такие, что:*

1) интервал $(-1, M^*(\epsilon))$ *содержится в области сходимости (1)–(2);*

2) $M^*(\epsilon) = M^* - \epsilon$.

Такие параметры в дальнейшем будем называть *субоптимальными*, или ϵ-оптимальными. Условие 2) показывает близость субоптимальных параметров к псевдооптимальным. Условие 1) гарантирует сходимость

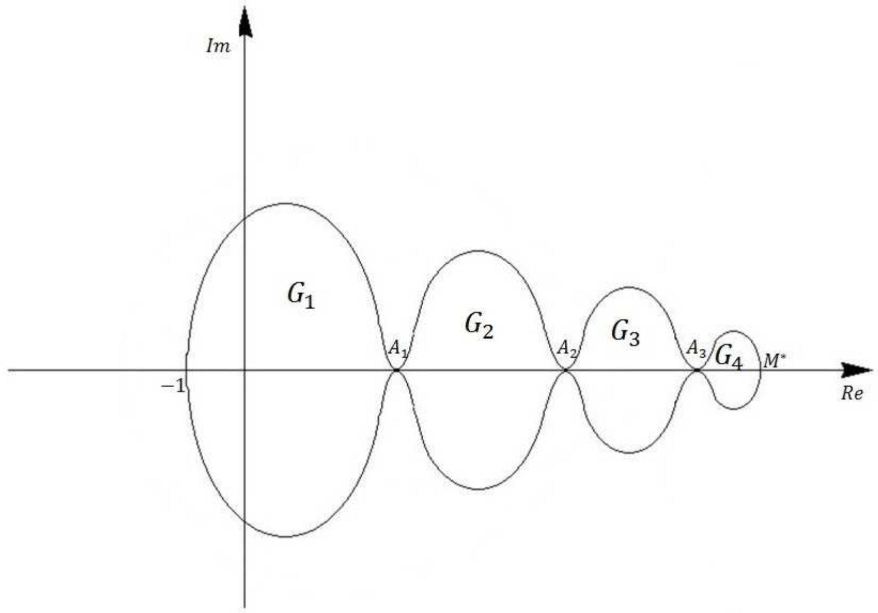

Рис. 1. Спектральная область сходимости (1) при $n = 8$

МАР в случае, когда оператор является самосопряженным и, следовательно, его спектр (вещественнозначный) лежит в указанном интервале.

2. Нахождение псевдооптимальных параметров МАР

Для изложения метода нахождения субоптимальных параметров необходимо вкратце пояснить вывод (3), так как способы получения субоптимальных и псевдооптимальных параметров вполне аналогичны.

Запишем МАР (1) в виде процедуры простых итераций. Пусть X^n — пространство вектор-столбцов из элементов X, I — тождественный оператор из $L(X)$, E — тождественный оператор из $L(X^n)$. Тогда из (1) следует

$$z_{p+1} = \begin{pmatrix} x_{p+1} \\ \dots \\ x_{p+n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & I \\ -\alpha_1 A & -\alpha_2 A & \dots & -\alpha_n A \end{pmatrix} \cdot \tag{4}$$
$$\cdot \begin{pmatrix} x_p \\ \dots \\ x_{p+n-1} \end{pmatrix} = \overline{b} + D \cdot z_p,$$

где линейный матричный оператор D действует из X^n в X^n. Так как (4) является методом простых итераций, то процедура МАР (1) – (2) сходится тогда и только тогда, когда все точки спектра D находятся в открытом единичном круге B_1.

Между спектром $\sigma(A)$ оператора A и спектром $\sigma(D)$ оператора D в [1; 2] установлена следующая связь:

$\mu \in \sigma(A) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(D)$, где комплексные числа μ, λ связаны формулой

$$\mu = -\frac{\lambda^n}{\alpha_n \lambda^{n-1} + \alpha_{n-1}\lambda^{n-} + \dots + \alpha_2 \lambda + \alpha_1} = f(\lambda). \tag{5}$$

Рассмотрим функцию $g(\omega) = f(e^{-i\omega})$, $\omega \in (-\pi, \pi]$, отображающую границу области сходимости (4), т. е. единичную окружность в кривую (годограф) на комплексной плоскости, которая может иметь в силу многозначности (5) несколько точек самопересечения и разбивает комплексную плоскость на несколько областей. При этом спектральной областью сходимости (1) – (2) будет та область, которая содержит точку $\mu = 0$. Кривая $g(\omega)$ симметрична относительно вещественной оси: $Img(-\omega) = -Img(\omega)$, $\omega \in [0, \pi]$ и имеет вид:

$$g(\omega) = -\frac{R(\omega) + i \sin\omega \cdot Q(t)}{R^2(\omega) + \sin^2\omega \cdot Q^2(t)},$$

$$R(\omega) = \alpha_n \cos\omega + \alpha_{n-1}\cos 2\omega + \dots + \alpha_2 \cos(n-1)\omega + \alpha_1 \cos n\omega, \tag{6}$$
$$Q(t) = \alpha_1 \cdot U_{n-1}(t) + \alpha_2 \cdot U_{n-2}(t) + \dots + \alpha_n U_0(t),$$

где $t = \cos\omega$; $U_n(t) = \frac{\sin(n+1)\omega}{\sin\omega}$ — полиномы Чебышева II рода.

Кривая $g(\omega) = f(e^{-i\omega})$, $\omega \in (-\pi, \pi]$ пересекает вещественную ось при $\omega = 0$, $t = 1$ в точке $g(0) = f(1) = -\alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_n = -1$ и при $\omega = \pi$, $t = -1$ в точке $g(\pi) = f(-1) = \frac{1}{\alpha_n - \alpha_{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}\alpha_1} = M$.

Если предположить, что других точек пересечения кривой $g(\omega) = f(e^{-i\omega})$, $\omega \in (-\pi, \pi]$ с вещественной осью нет, что означает выполнение системы строгих неравенств $Q(t) > 0$, $t \in (-1, 1)$, то весь интервал $(-1, M)$ с положительными M будет находиться в области сходимости (1) – (2). Задача максимизации M в [2; 3] сведена к анализу возможных решений оптимизационной задачи с несчетным числом условий относительно неизвестных $\alpha_1, \dots, \alpha_n$:

$$M = (\alpha_n - \alpha_{n-1} + \dots + (-1)^n \alpha_1)^{-1} \to \sup,$$

$$Q(t) = \alpha_1 \cdot U_{n-1}(t) + \alpha_2 \cdot U_{n-2}(t) + \ldots + \alpha_n U_0(t) > 0 \quad \forall t = \cos\omega,\ \omega \in (0, \pi), \tag{7}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1.$$

Заметим, что условие положительности M будет выполнено, так как есть допустимое решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$, $\alpha_n = 1$, при котором $M > 0$.

Так как обычно оптимизационные задачи с условиями строгого неравенства не имеют оптимальных решений, то условия $Q(t) > 0$, $t \in (-1, 1)$ в [2; 3] были заменены на условия $Q(t) \geq 0$, $t \in (-1, 1)$. Было показано, что решение задачи (7) возможно лишь в случае, когда корни $Q(t)$ имеют кратность 2 (за исключением корня $t = -1$ кратности 1 в случае четного n). Тогда несчетное число условий в (7) можно заменить конечным числом условий $Q(t_i) \geq 0$, $t_i \in (-1, 1)$ и решить соответствующую задачу линейного программирования, используя теорию двойственности ЗЛП. Решение приведено выше в виде формул (3). Тот факт, что полученные параметры являются лишь псевдооптимальными, заключается в том, что в точках $t_j = \cos\frac{(2j+1)\pi}{n+1}$, $j = 1, \ldots, k$, являющихся корнями «оптимального» полинома $Q^*(t)$, происходит касание кривой $g(\omega)$ вещественной оси во внутренних точках интервала $(-1, M)$, и эти точки *не входят* в область сходимости (1) – (2).

3. Нахождение субоптимальных параметров MAP

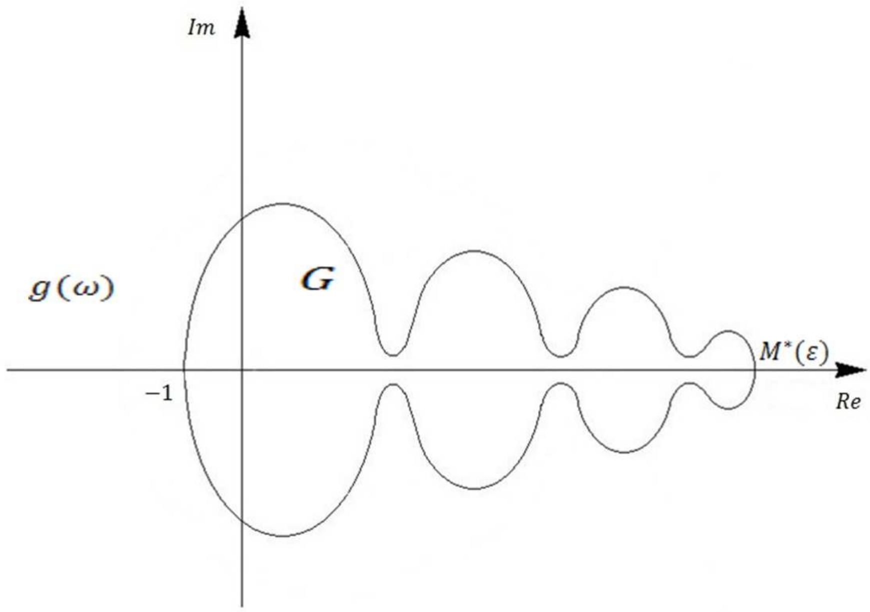

Рис. 2. Вид спектральной области сходимости при субоптимальных параметрах

Пусть $\delta > 0$, $\epsilon > 0$ — некоторые малые параметры. Зависимость их друг от друга будет приведена позже. Поставим оптимизационную задачу, заменив в (7) условия $Q(t) \geq 0$ на $Q(t) \geq \delta$. Таким образом, мы отодвигаем кривую $g(\omega)$ от вещественной оси на небольшое, но положительное при $\omega \neq 0, \pi$ расстояние (см. рис. 2).

Новая оптимизационная задача, так же как и (7), сводится к паре двойственных ЗЛП, одна из которых относительно переменных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ имеет вид

$$M^{-1} = \alpha_n - \alpha_{n-1} + \cdots + (-1)^n \alpha_1 \to \min$$

$$\begin{aligned}
&Q(t_1) = \alpha_1 \cdot U_{n-1}(t_1) + \alpha_2 \cdot U_{n-2}(t_1) + \cdots + \alpha_n \cdot U_0(t_1) \geq \delta \sim W_1 \\
&Q(t_2) = \alpha_1 \cdot U_{n-1}(t_2) + \alpha_2 \cdot U_{n-2}(t_2) + \cdots + \alpha_n \cdot U_0(t_2) \geq \delta \sim W_2 \\
&\ldots \\
&Q(t_m) = \alpha_1 \cdot U_{n-1}(t_m) + \alpha_2 \cdot U_{n-2}(t_m) + \cdots + \alpha_n \cdot U_0(t_m) \geq \delta \sim W_m \\
&\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1 \sim s,
\end{aligned} \tag{8}$$

а двойственная к ней ЗЛП с двойственными переменными W_j, s имеет вид

$$H = s + \delta \cdot (W_1 + \cdots + W_m) \to \max \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&U_{n-1}(t_1) \cdot W_1 + U_{n-1}(t_2) \cdot W_2 + \cdots + U_{n-1}(t_m) \cdot W_m + s = (-1)^{n-1} \sim \alpha_1 \\
&U_{n-2}(t_1) \cdot W_1 + U_{n-2}(t_2) \cdot W_2 + \ldots + U_{n-2}(t_m) \cdot W_m + s = (-1)^{n-2} \sim \alpha_2 \\
&\ldots \\
&U_0(t_1) \cdot W_1 + U_0(t_2) \cdot W_2 + \ldots + U_0(t_m) \cdot W_m + s = 1 \sim \alpha_n \\
&W_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, m.
\end{aligned} \tag{10}$$

Новая задача решается вполне аналогично методом, данным в [2; 3]. Суть этого метода состоит в том, что система (10) *при произвольном* $m \geq n/2$ имеет *единственное* решение с точностью до нулевых значений W_j. Пусть $W_j^* > 0$, $j = 1, \ldots, k$, s^* — это ненулевые решения. Заметим, что решение системы $(9-10)$ и значения соответствующих t_j, $j = 1, \ldots, k$ не зависят от параметра δ и вполне аналогичны значениям при $\delta = 0$ из работы [3]. Выпишем эти решения при четном и нечетном n.

а) Нечетное $n = 2k+1$. Тогда $m = k$ и $t_j = \cos\frac{(2j+1)\pi}{n+1}$, $j = 0, 1, \ldots, k$.

$$W_j^* = 2\frac{t_0 - t_j}{(k+1)(1+t_0)}, \ j = 1, \ldots, k; \quad s^* = 1 - \sum_{j=1}^{k} W_j^* = \frac{1-t_0}{1+t_0}. \tag{11}$$

Здесь использовано равенство $t_0 = 1 - \sum_{j=1}^{k} t_j$.

b) Четное $n = 2k+2$. Тогда $m = k+1$ и $t_j = \cos\frac{(2j+1)\pi}{n+1}$, $j = 0, 1, \ldots, k$, $t_m = -1$.

$$\begin{gathered} W_j^* = 4\frac{t_0 - t_j}{(2k+3)(1+t_0)},\ j = 1, \ldots, k; \\ W_m^* = \frac{2}{(2k+3)},\ s^* = 1 - \sum_{j=1}^{k} W_j^* = \frac{1-t_0}{1+t_0}. \end{gathered} \tag{12}$$

Здесь использовано равенство $t_0 = \frac{1}{2} - \sum_{j=1}^{k} t_j$.

Найдем значение целевой функции (9). Из (11), (12) следует

$$H^* = s^* + \delta \sum_{j=1}^{m} W_j^* = \frac{1 + t_0(2\delta - 1)}{1+t_0}.$$

Оптимальное значение $P_m(-1) = M$ в задаче (8) обозначим через $M^*(\delta)$, а оптимальное решение (8), т. е. субоптимальные параметры процедуры (2), через $\alpha_j^*(\delta)$.

Из двойственности задач (8) и (9 – 10) следует

$$M^*(\delta) = (H^*)^{-1} = \frac{1-t_0}{1+t_0(2\delta-1)}. \tag{13}$$

Так как для псевдооптимальных параметров α_j^* и M^* из (3) справедливо $M^* = M^*(0)$, то при малых δ верно приближение

$$M^*(\delta) = \frac{1+t_0}{1-t_0} \cdot \left[1 - \frac{2\delta t_0}{1-t_0} + O(\delta)\right] = M^* - M^* \cdot \delta \cdot 2 \cdot \frac{\cos\frac{\pi}{n+1}}{1 - \cos\frac{\pi}{n+1}} + O(\delta).$$

Обозначим разницу правых границ интервала $(-1, M)$ в псевдооптимальном и субоптимальном случаях через ϵ: $\epsilon = M^* - M^*(\delta) > 0$, и получим связь параметра субоптимальности ϵ с параметром отклонения δ полинома $Q_m(t)$ от вещественной оси

$$\delta = \frac{\epsilon(1-t_0)^2}{2t_0(1+t_0-\epsilon(1-t_0))}. \tag{14}$$

Найдем теперь явные формулы для субоптимальных параметров $\alpha_j^*(\delta)$. С одной стороны, корни t_j, $j = 1, \ldots, m$ задаются формулами (11), (12) независимо от n. С другой стороны, по условиям дополняющей нежесткости для двойственных ЗЛП (8) и (9 – 10) получаем из положительности $W_j^* > 0$, $j = 1, \ldots, k$, s^*, что t_j являются корнями полинома $Q(t) - \delta = \alpha_1^*(\delta) \cdot U_{n-1}(t) + \alpha_2^*(\delta) \cdot U_{n-2}(t) + \cdots + \alpha_n^*(\delta) \cdot U_0(t) - \delta$.

Обозначим через

$$\beta_j^* = \frac{\alpha_j^*(\delta)}{1-\delta},\ j = 1, \dots, n-1; \quad \beta_n^* = \frac{\alpha_n^*(\delta) - \delta}{1-\delta}. \tag{15}$$

Так как $U_0(t_j) \equiv 1$, то для β_j^* получаем m равенств вида

$$\begin{aligned} Q(t_j) - \delta = \beta_1^* \cdot U_{n-1}(t_j) + \beta_2^* \cdot U_{n-2}(t_j) + \dots + \\ + \beta_n^* \cdot U_0(t_j) = 0,\ j = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{16}$$

Кроме того, условия касания кривой $g(\omega) - \delta$ вещественной оси во внутренних корнях t_j, $j = 1, \dots, k$ полинома $Q(t) - \delta$ дают еще k равенств вида

$$\frac{dQ(t_j)}{dt} = 0,\ j = 1, \dots, k. \tag{17}$$

Далее, условие $\alpha_1^*(\delta) + \alpha_2^*(\delta) + \dots + \alpha_n^*(\delta) - \delta = 1 - \delta$ запишется в виде

$$\beta_1^* + \beta_2^* + \dots + \beta_n^* = 1. \tag{18}$$

Система СЛАУ (16–18) ничем не отличается от СЛАУ для α_j^* из [2; 3] и, как показано в [3], имеет единственное решение. Поэтому $\beta_j^* = \alpha_j^*$ и для них верна формула (3). Окончательно из (15) получаем для субоптимальных параметров выражения

$$\begin{aligned} &\alpha_p^*(\delta) = \alpha_p^*(1-\delta) = \frac{2p}{n+1} \cdot \sin\frac{p\pi}{n+1} \cdot \mathrm{tg}\frac{\pi}{2(n+1)} \cdot (1-\delta), \\ &p = 1, \dots, n-1, \\ &\alpha_n^*(\delta) = \alpha_n^*(1-\delta) + \delta = \frac{2n}{n+1} \cdot \sin\frac{n\pi}{n+1} \cdot \mathrm{tg}\frac{\pi}{2(n+1)} \cdot (1-\delta) + \delta, \\ &M^*(\delta) = \frac{1+t_0}{1+t_0(2\delta-1)} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{n+1}}{1-(1-2\delta)\cdot\cos\frac{\pi}{n+1}}. \end{aligned} \tag{19}$$

Список литературы

1. **Никитенков В. Л. , Холопов А. А.** Оптимальные области сходимости линейных многослойных итерационных процедур // *Вопросы функционального анализа (теория меры, упорядоченные пространства, операторные уравнения) : межвуз. сб. науч. тр. Сыктывкар: Сыкт. ун-т, 1991. С. 134–142.*

2. **Никитенков В. Л., Холопов А. А.** Оптимальные параметры метода аддитивного расщепления (MAP) // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1. 2010. Вып. 12. С.53–70.*

3. **Никитенков В. Л., Холопов А. А.** Точные формулы для оптимальных параметров МАР // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1. 2011. Вып. 14. С. 67–94.*

Summary

Kholopov A. A. Suboptimal parameters in the method of additive splitting

An equation in a Banach space with continuous linear operator is solved by splitting A to some parts and using an appropriate iteration procedure. The suboptimal parameters of the splitting extend the spectral domain of convergence along the real axis as much as possible up to a small parameter.
Keywords: operator equation, spectral domain of convergence, suboptimal parameters.

References

1. **Nikitenkov V. L., Kholopov A. A.** Optimal'nyye oblasti skhodimosti lineynykh mnogosloynykh iteratsionnykh protsedur (Optimal areas of convergence of linear multilayer iterative procedures), *Voprosy funktsional'nogo analiza (teoriya mer, uporyadochennyye prostranstva, operatornyye uravneniya): mezhvuz. sb. nauch. tr.* (Questions of functional analysis (measure theory, ordered spaces, operator equations): Interst. Sat scientific tr.), Syktyvkar: Sykt. un-t 1991, pp. 134–142.

2. **Nikitenkov V. L., Kholopov A. A.** Optimal'nyye parametry metoda additivnogo rasshchepleniya (MAR) (The optimal parameters of the method of additive splitting (MAP)), *Bulletin of the Syktyvkar University*, ser. 1, 2010, no. 12, pp. 53–70.

3. **Nikitenkov V. L., Kholopov A. A.** Tochnyye formuly dlya optimal'nykh parametrov MAR (Exact formulas for optimal MAR parameters), *Bulletin of Syktyvkar University*, ser. 1, 2011, no. 14, pp. 67–94.

Для цитирования: Холопов А. А. Субоптимальные параметры в методе аддитивного расщепления // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 4 (29). С. 24–33.*

For citation: Kholopov A. A. Suboptimal parameters in the method of additive splitting, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2018, 4 (29), pp. 24–33.

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 22.01.2019*