ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (29). 2018

УДК 539.3

КОНСТРУКТИВНО-НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕЙ И КОЛЕЦ

В. Ю. Андрюкова, В. Н. Тарасов

Получены аналитические решения задачи устойчивости сжимаемых продольной силой стержней, находящихся в упругой среде, прогибы которых с одной стороны ограничены жестким препятствием. Рассмотрена задача устойчивости кругового кольца, сжимаемого равномерно распределенными центральными силами, при наличии односторонних ограничений на перемещения.
Ключевые слова: устойчивость, круговое кольцо, стержень, односторонние ограничения.

1. Устойчивость стержня в упругой среде при жестких ограничениях на перемещения с граничными условиями свободного края

Рассмотрим задачу об устойчивости сжимаемого продольной силой стержня, прогибы которого с одной стороны ограничены жестким препятствием. Предполагается, что на одном конце стержня выполнены граничные условия жесткой заделки, на другом — граничные условия свободного края. Определение критической нагрузки сводится к определению силы P, при которой вариационная задача

$$\tilde{J}(w) = \frac{1}{2}\int_0^1 (Dw''^2 + Cw^2 - Pw'^2)dx \to \min_{w\in K}, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &w(0) = 0,\ w'(0) = 0,\ w''(l) = 0,\\ &Dw'''(l) + Pw'(l) = 0,\ w(x) \geqslant 0,\ x \in [0, l] \end{aligned} \tag{2}$$

имеет нетривиальное решение. Здесь $D > 0$ — жесткость стержня на изгиб, $C > 0$ — жесткость винклеровского основания.

В (1) – (2) K — конус неотрицательных функций, определенных на интервале $[0, l]$, имеющих обобщенную, суммируемую с квадратом вторую производную. Задача (1) – (2) допускает аналитическое решение. Можно показать, что решение задачи (1) – (2) можно искать среди функций $w(0) = 0$, $x \in (0, l_1)$, и $w(x) > 0$ $x \in (l_1, l]$ [2]:

$$w^{IV} + \omega w + \rho^2 w'' = 0, \tag{3}$$

где $\omega = C/D$, $\rho^2 = P/D$. В этом случае (3) является уравнением равновесия сжимаемого продольной силой стержня, находящегося в упругой среде. Заметим также, что (3) совпадает с уравнением равновесия цилиндрической оболочки, сжимаемой продольной силой в осесимметричном случае. В отличие от граничных условий жесткой заделки и граничных условий шарнирного опирания, при которых $\rho^2 > 2\sqrt{\omega}$, при данных граничных условиях $\rho^2 > 2\sqrt{\omega}$, и общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$\begin{aligned} w(x) = c_1 e^{\alpha x} \sin(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \\ + c_3 e^{-\alpha x} sin(\beta x) + c_4 e^{-\alpha x} \cos(\beta x), \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\omega} - \rho^2}, \qquad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\omega} + \rho^2}. \tag{5}$$

Будем считать, что существует участок полного прилегания к стенке, т. е.

$$w(x) = 0,\ x \in [0, l_1] \qquad \text{и} \qquad w(x) > 0,\ x \in [l_1, l]. \tag{6}$$

Можно показать, что при $x = l_1$ $w'' = 0$, т. е. выполнены условия:

$$w = 0,\ w' = 0,\ w'' = 0 \,\text{при}\, x = l_1. \tag{7}$$

Таким образом, имеем две системы уравнений:

$$w(l_1) = 0, \qquad w'(l_1) = 0,\ w''(l) = 0,\ w'''(l) + \rho^2 w'(l) = 0, \tag{8}$$

$$w(l_1) = 0, \qquad w''(l_1) = 0,\ w''(l) = 0,\ w'''(l) + \rho^2 w'(l) = 0. \tag{9}$$

В (8) – (9) неизвестными являются переменные $c_1,\ldots,c_4$, l_1 и ρ^2. Для существования нетривиального решения системы (8) – (9) необходимо, чтобы определители матрицы коэффициентов при $c_1,\ldots,c_4$ были равны нулю. Подставляя (4) в (8) – (9), имеем систему двух нелинейных уравнений, из которой определяем l_1 и ρ^2. Результаты вычислений приведены в табл. 1, где $l_2 = l - l_1$ — длина интервала, на котором $w(x) > 0$.

Таблица 1

Значения критической силы в зависимости от жесткости среды ω

N	1	2	3	4	5	6
ω	100	200	350	450	550	800
l_2	0.745	0.627	0.545	0.512	0.487	0.443
ρ^2	12.6	17.8	23.5	26.7	29.5	35.6
ρ_*^2	11.9	15.6	19.5	21.8	23.8	28.5

В табл. 1 значения ρ^2 соответствуют критической нагрузке стержня при наличии односторонних ограничений на перемещения при различной жесткости среды ω. Для сравнения в последней строке приведены значения критической силы ρ_*^2 для стержня, находящегося в упругой среде при отсутствии односторонних ограничений на перемещения.

2. Устойчивость колец с односторонним подкреплением

Рассмотрим задачу устойчивости упругих колец, нагруженных равномерно распределенным по ободу внешним давлением, подкрепленных упругими нитями, которые не воспринимают сжимающих усилий.

Пусть один конец нити прикреплен к неподвижному центру кольца, другой к некоторой точке кольца. Предположим, что нить является нерастяжимой, т. е. в результате деформации расстояние между центром кольца и точкой прикрепления не может увеличиваться. Обозначим через ϑ — центральный угол, $w(\vartheta)$ — радиальное перемещение точек кольца. Наконец, предположим, что нити расположены так часто, что их можно считать непрерывно распределенными по кольцу.

Тогда задача на устойчивость сводится к отысканию таких значений силы P, при которых вариационная проблема

$$J(w) = \frac{B}{2R^3}\int_0^{2\pi}(w'' + w)^2 d\vartheta - \frac{P}{2}\int_0^{2\pi}(w'^2 - bw^2)d\vartheta \to \min_w \tag{10}$$

имеет нетривиальное решение при граничных условиях периодичности и ограничениях

$$w(\vartheta) \leqslant 0. \tag{11}$$

Здесь B — жесткость на изгиб в плоскости кольца, R — радиус кольца. Первый интеграл в (10) представляет собой упругую энергию, второй — работу внешних сил.

При расчете колец на устойчивость важно учитывать поведение нагрузки после деформации. Если нагрузка направлена против нормали к деформированному кольцу, то в (10) следует положить $b = 1$ (сила нормального давления). Если же сила направлена все время к неподвижному центру кольца, то в (10) $b = 2$ (случай центральных сил). Выпишем уравнение Эйлера для функционала (10):

$$w^{IV} + (2 + k^2)w'' + (1 + bk^2)w = 0, \tag{12}$$

где $k^2 = PR^3/B$. При $b = 1$ (случай нормальной нагрузки) функция прогиба представима в виде

$$w = A_1 \sin\vartheta + A_2 \cos\vartheta + A_3 \sin\alpha\vartheta + A_4 \cos\alpha\vartheta, \qquad \alpha = \sqrt{1 + k^2}. \tag{13}$$

Зафиксируем некоторый угол $\beta > 0$. Будем считать, что, как и в случае стержней,

$$w(\vartheta) < 0,\ \vartheta \in (0, \beta) \text{ и } w(\vartheta) \equiv 0,\ \vartheta \in (\beta, 2\pi).$$

Первая производная $w'(\vartheta)$ должна быть непрерывной при $\vartheta \in (0, 2\pi)$, тогда функция w удовлетворяет граничным условиям

$$w(0) = 0,\ w'(0) = 0,\ w(\beta) = 0,\ w'(\beta) = 0. \tag{14}$$

Подставляя (13) в (14), получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} A_2 + A_4 = 0, \\ A_1 + \alpha A_3 = 0, \\ A_1 \sin\beta + A_2 \cos\beta + A_3 \sin(\alpha\beta) + A_4 \cos(\alpha\beta) = 0, \\ A_1 \cos\beta - A_2 \sin\beta + \alpha A_3 \cos(\alpha\beta) - \alpha A_4 \sin(\alpha\beta) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

После упрощения имеем

$$\begin{cases} A_3(\sin(\alpha\beta) - \alpha\sin\beta) + A_4(\cos(\alpha\beta) - \cos\beta) = 0, \\ A_3(\alpha\cos(\alpha\beta) - \alpha\cos\beta) + A_4(\sin\beta - \alpha\sin(\alpha\beta)) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Система уравнений имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю, т. е.

$$d(\alpha) = -2\alpha\cos(\alpha\beta)\cos\beta + 2\alpha - \sin(\alpha\beta)\sin\beta - \alpha^2 \sin(\alpha\beta)\sin\beta = 0. \tag{17}$$

Решая уравнение (17) относительно неизвестной α, получим функцию $\alpha = \alpha(\beta)$. При заданном β уравнение имеет бесконечное число корней. Очевидно, что $\alpha = 1$ является корнем уравнения при любом β. Заметим, что $\alpha = 1$ соответствует сила P, равная нулю. Далее, находим форму прогиба по формулам (13). Несложно убедиться, что формула (13) при $\alpha = 1$ дает перемещение кольца как жесткого целого. Следовательно, надо находить минимальный корень уравнения (17), удовлетворяющий условию $\alpha > 1$. Также необходимо выполнение знаковых ограничений (11). Чем больше угол β, тем меньше k^2, а значит, и сила P. Значения критического параметра P в зависимости от значений угла β приведены в табл. 2.

Таблица 2

Значения критического параметра α в зависимости от угла β

β	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$
α	4.9801	4.2915	3.2136	3	2.4841

Численные эксперименты при $\beta > \pi$ показали, что график функции прогиба w будет менять знак на интервале $(0,\beta)$, т. е. ограничения (11) на функцию $w(x)$ не будут выполняться. Значит $\beta = \pi$, $k^2 = 3$, что соответствует критическому давлению

$$P = \frac{8B}{R^3}.$$

Заметим, что для неподкрепленного кольца критическая сила определяется формулой

$$P = \frac{3B}{R^3}.$$

Рассмотрим случай центральных сил (в уравнении (12) следует положить $b = 2$.) Общее решение уравнения (12) имеет вид [2]:

$$w = A_1 \sin(\alpha_1 \vartheta) + A_2 \cos(\alpha_1 \vartheta) + A_3 \sin(\alpha_2 \vartheta) + A_4 \cos(\alpha_2 \vartheta),$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{2 + k^2 + \sqrt{k^4 - 4k^2}}}{\sqrt{2}},\ \alpha_2 = \frac{\sqrt{2 + k^2 - \sqrt{k^4 - 4k^2}}}{\sqrt{2}}.$$

Далее, используя граничные условия (14), получаем систему однородных линейных уравнений относительно произвольных постоянных A_1, A_2, A_3, A_4:

$$\begin{cases} A_2 + A_4 = 0, \\ \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_3 = 0, \\ A_1 \sin(\alpha_1\beta) + A_2 \cos(\alpha_1\beta) + A_3 \sin(\alpha_2\beta) + A_4 \cos(\alpha_2\beta) = 0, \\ A_1\alpha_1 \cos(\alpha_1\beta) - A_2\alpha_1 \sin(\alpha_1\beta) + A_3\alpha_2 \cos(\alpha_2\beta) - A_4\alpha_2 \sin(\alpha_2\beta) = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Приравнивая определитель этой системы к нулю, получаем уравнение на нагрузку k^2 (k^2 зависит от угла β):

$$d(k,\beta) = (\sin(\alpha_2\beta) - \tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\sin(\alpha_1\beta)) * (\alpha_2 \sin(\alpha_2\beta) - \alpha_1 \sin(\alpha_1\beta)) - \\ -(\cos(\alpha_2\beta) - \cos(\alpha_2\beta)) * (\alpha_2 \cos(\alpha_2\beta) - \alpha_1 \sin(\alpha_1\beta)) = 0.$$

Как и выше, исследуя графики функции прогиба $w(\vartheta)$, находим, что максимальный угол β, при котором w сохраняет знак, будет равен: $\beta = 0.6976\pi$, что соответствует критическому параметру

$$k^2 = \frac{PR^3}{B} = 18.6036,\ P = \frac{18.6036B}{R^3}.$$

Заметим, что в случае плоской деформации при аппроксимации сплайнами прогиба $w(\vartheta)$ при $m = 72$ путем решения задачи математического программирования получено значение безразмерного параметра для неподкрепленного кольца $\tilde{P} = \frac{PR^3}{B} = 18.5854$. Сравнивая полученные значения, находим точность численного решения задачи:

$$\frac{18.6036 - 18.5854}{18.6036} = 0.001 = 0.1\%.$$

Отношение

$$\frac{P}{P} = \frac{18.5854}{4.5} = 4.1301.$$

Аналогично

$$\frac{18.6036}{4.5} = 4.1341.$$

Таким образом, подкрепление нитями увеличивает критическую нагрузку кольца в 4.13.

Следует отметить, что в случаях как нормальной, так центральной нагрузки выполняются условия: $w''(0) = w''(\beta) = 0$, т. е. вторая производная $w''(\vartheta)$ является непрерывной.

Список литературы

1. **Андрюкова В. Ю.** Некоторые конструктивно-нелинейные задачи устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения // *Вычислительная механика сплошных сред / Институт механики сплошных сред УрО РАН. 2014. № 4. С. 412–422.*

2. **Тарасов В. Н.** Методы оптимизации в исследовании конструктивно-нелинейных задач механики упругих систем. Сыктывкар: Коми научный центр УрО РАН, 2013. 238 с.

Summary

Andryukova V. Yu., Tarasov V. N. Constructive-nonlinear problems stability of rods and rings

Analytical solutions of the stability problem of rods of compressible longitudinal force in an elastic medium, the deflections of which on the one hand are limited by a rigid obstacle, are obtained. The problem of the stability of a circular ring compressed by uniformly distributed central forces with one-sided constraints on displacements is considered.
Keywords: stability, circular ring, rod, one-sided restrictions.

References

1. **Andryukova V. Yu.** Nekotorye konstruktivno-nelineynye zadachi ustoychivosti uprugikh sistem pri odnostoronnikh ogranicheniyakh na peremeshcheniya (Some constructive non-linear problems of stability of elastic systems with one-sided constraints on displacements), *Computational mechanics of continuous media*, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, 2014, No. 4, pp. 412–422.

2. **Tarasov V. N.** *Metody optimizatsii v issledovanii konstruktivno-nelineynykh zadach mekhaniki uprugikh sistem* (Optimization Methods in the Study of Structurally Nonlinear problems of mechanics of elastic systems), Syktyvkar: Komi Scientific Center UB RAS, 2013, 238 p.

Для цитирования: Андрюкова В. Ю., Тарасов В. Н. Конструктивно-нелинейные задачи устойчивости стержней и колец // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 4 (29). С. 4–11.*

For citation: Andryukova V. Yu., Tarasov V. N. Constructive-nonlinear problems stability of rods and rings, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2018, 4 (29), pp. 4–11.

ФМИ ФИЦ «Коми НЦ УрО РАН» *Поступила 10.01.2019*