МАТЕМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 3 (28). 2018

УДК 519.1

ГАФНИАН ТЁПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА, СОВЕРШЕННЫЕ ПАРОСОЧЕТАНИЯ И ПОЛИНОМЫ БЕССЕЛЯ[1]

Д. Б. Ефимов

В работе приводится простая и удобная аналитическая формула для точного вычисления гафниана тёплицевых матриц специального вида. В частных случаях дана интерпретация полученных результатов на языке совершенных паросочетаний и полиномов Бесселя.
Ключевые слова: гафниан, тёплицевые матрицы, полиномы Бесселя.

1. Введение

Пусть $A = (a_{ij})$ — симметричная матрица порядка $n = 2m$ над коммутативным ассоциативным кольцом R. Ее гафниан определяется как

$$\mathrm{Hf}(A) = \sum_{(i_1 i_2|\ldots|i_{n-1} i_n)} a_{i_1 i_2} \ldots a_{i_{n-1} i_n},$$

где суммирование ведется по всем разбиениям множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ на непересекающиеся пары $(i_1 i_2), \ldots, (i_{n-1} i_n)$ с точностью до порядка пар и порядка элементов в каждой паре. Так, если $n = 4$, то $\mathrm{Hf}(A) = a_{12}a_{34} + a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}$. Эквивалентно, гафниан можно определить следующим образом:

$$\mathrm{Hf}(A) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),\sigma(2)} \ldots a_{\sigma(n-1),\sigma(n)}.$$

[1]Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект 18-1-1-7.

Здесь суммирование ведется уже по всем перестановкам из S_n. Заметим, что диагональные элементы матрицы не участвуют в определении гафниана. В дальнейшем для удобства будем считать, что они равны нулю. Понятие гафниана ввел итальянский физик-теоретик Э.Р. Каяньелло в одной из своих работ по квантовой теории поля [1]. Название новой матричной функции он дал в честь г. Копенгагена (лат. Hafnia), места, где к нему впервые пришла идея данного математического понятия. В названии он также подчеркнул связь с введенной еще в XIX веке А. Кэли функцией пфаффиана, от которого гафниан отличается только знаком некоторых слагаемых. В дальнейшем стало понятно, что гафниан обладает также полезным комбинаторным свойством, связанным с решением важной задачи в теории графов: если M — матрица смежности неориентированного графа четного порядка, то $\mathrm{Hf}(M)$ равен общему числу совершенных паросочетаний данного графа.

К сожалению, широкое применение гафниана ограничивается тем, что, в отличие от пфаффиана, для его вычисления в общем случае не существует эффективных алгоритмов. Так, в недавней работе [2] описан наиболее быстрый на данный момент алгоритм для точного вычисления гафниана произвольной комплексной $n \times n$ матрицы. Он работает за время $O(n^3 2^{n/2})$. При этом тесты, проведенные на суперкомпьютере Titan, имеющем производительность 27 петафлопс (7 место в рейтинге Топ 500 по данным на июнь 2018 года), показали, что для вычисления на нем с помощью данного алгоритма гафниана случайно сгенерированной комплексной матрицы порядка 100 понадобилось бы полтора месяца!

В связи с тем, что в общем случае вычисление гафниана является труднорешаемой проблемой, большую актуальность имеет задача нахождения хороших, удобных в применении аналитических формул, выражающих гафниан для более узких классов матриц. Так, во многих важных случаях (например, при рассмотрении матриц смежности планарных графов) вычисление гафниана матрицы можно свести к гораздо более эффективному вычислению пфаффиана некоторой матрицы, связанной с исходной несложными преобразованиями. Подробное описание данного подхода на русском языке можно найти в [3]. Напомним, что матрица называется *тёплицевой*, если элементы любой ее диагонали, параллельной главной, одинаковы. В работе [4] приведен алгоритм вычисления гафниана ленточных тёплицевых матриц порядка n с шириной ленты m, который работает за время $O(2^{3m} \log n)$.

В данной работе мы получаем простую и удобную аналитическую формулу для вычисления гафниана тёплицевых матриц специального вида (отличного от вышеупомянутого). В частном случае она сводится к вычислению значения полинома Бесселя соответствующего порядка в определенной точке. Используя данную формулу, можно вычислить гафниан рассматриваемых матриц за линейное время.

2. Основная часть

Рассмотрим сначала два свойства гафниана, которые понадобятся нам в дальнейшем. Первое свойство вполне очевидно.

Предложение 1. *Пусть A — симметричная матрица порядка $2m$ над коммутативным ассоциативным кольцом R и $c \in R$. Тогда*

$$\mathrm{Hf}(cA) = c^m \mathrm{Hf}(A). \tag{1}$$

Пусть $Q_{k,n}$ обозначает множество всех неупорядоченных k-элементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Если A — матрица порядка n и $\alpha = \{p_1, \ldots, p_k\} \in Q_{k,n}$, то через $A[\alpha]$ обозначим подматрицу в A, образованную пересечением строк и столбцов с номерами из α, а через $A(\alpha)$ — подматрицу, которая получается из A удалением строк и столбцов с номерами из α. В работе [5] приведено и доказано следующее свойство гафниана.

Предложение 2. *Пусть A, B — симметричные матрицы порядка $n = 2m$. Тогда*

$$\mathrm{Hf}(A+B) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{\alpha \in Q_{2k,n}} \mathrm{Hf}(A[\alpha])\mathrm{Hf}(B(\alpha)), \tag{2}$$

где $\mathrm{Hf}(A[\alpha]) = 1$, *если* $\alpha \in Q_{0,n}$, *и* $\mathrm{Hf}(B(\alpha)) = 1$, *если* $\alpha \in Q_{n,n}$.

Для доказательства основного результата нам также понадобится одно комбинаторное свойство, касающееся подграфов линейных графов. Напомним, что *совершенным паросочетанием* неориентированного графа называется его подграф без петель того же порядка, что и сам граф, в котором каждая вершина инцидентна ровно одному ребру. Рассмотрим линейный граф L_n с n вершинами (рис. 1). Понятно, что

Рис. 1. Линейный граф с n вершинами

как сам такой граф, так и любой его подграф может обладать максимум одним совершенным паросочетанием. Пусть $k \leq n/2$. Обозначим через P_n^k общее число подграфов данного графа, состоящих из $2k$ вершин и обладающих совершенным паросочетанием. Другими словами, P_n^k — это количество способов, которыми в L_n можно выбрать k ребер так, чтобы никакие два различных ребра не имели общих вершин.

Предложение 3. *Значение P_n^k равно числу различных сочетаний из $n-k$ по k:*

$$P_n^k = C_{n-k}^k = \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!}. \tag{3}$$

Доказательство. Отметим k различных ребер в L_n. Очевидно, что это можно сделать C_{n-1}^k способами. Перейдем от данного линейного графа к новому линейному графу по следующему правилу: после каждого из первых $k-1$ отмеченных ребер, считая слева направо, вставим дополнительное ребро. В результате мы получим линейный граф с $n+k-1$ вершиной и k отмеченными ребрами, любые два из которых не будут иметь общих вершин (рис. 2). Нетрудно видеть, что с помощью такой

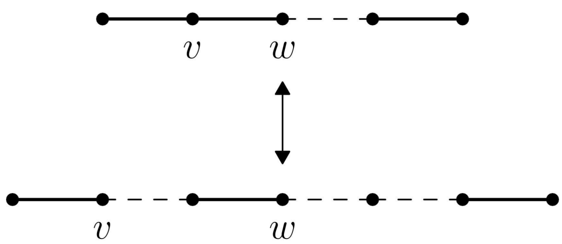

Рис. 2. Переход между линейными графами

процедуры и обратной к ней между выборками k ребер в линейном графе с n вершинами и выборками k ребер, любые два из которых не имеют общих вершин, в линейном графе с $n+k-1$ вершинами устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Следовательно, справедливо равенство $C_{n-1}^k = P_{n+k-1}^k$. Отсюда сразу следует, что $P_n^k = C_{n-k}^k$. □

Теперь мы можем сформулировать и доказать основной результат.

Теорема. *Пусть R — коммутативное ассоциативное кольцо и $a, b \in R$. Рассмотрим симметричную матрицу $T_{a,b}$ порядка $2m$ с нулевой главной диагональю, у которой элементы диагоналей, примыка-*

ющих к главной, равны a*, а все остальные элементы равны* b*:*

$$T_{a,b} = \begin{pmatrix} 0 & a & & b \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ b & & a & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Если положить, что $0^0 = 1$*, то гафниан матрицы* $T_{a,b}$ *можно вычислить по следующей формуле:*

$$\mathrm{Hf}(T_{a,b}) = \sum_{k=0}^{m} (a-b)^{m-k} b^k \frac{(m+k)!}{k!(m-k)!2^k} \ . \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим через J_q симметричную матрицу порядка $2m$, у которой на главной диагонали стоят нули, а все остальные элементы равны q. Непосредственно из определения гафниана следует, что

$$\mathrm{Hf}(J_q) = q^m \frac{(2m)!}{m!2^m}. \tag{6}$$

Обозначим через U_q матрицу порядка $2m$, у которой элементы на диагоналях, примыкающих к главной, равны q, а все остальные элементы равны нулю. Так как $T_{a,b} = J_b - U_{b-a}$, то, применяя формулы (1), (2) и (6), получаем:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hf}(T_{a,b}) = \mathrm{Hf}(J_b - U_{b-a}) = & \sum_{k=0}^{m} \sum_{\alpha \in Q_{2k,n}} \mathrm{Hf}(J_b[\alpha])\mathrm{Hf}(-U_{b-a}(\alpha)) = \\ & = \sum_{k=0}^{m} (a-b)^{m-k} b^k \frac{(2k)!}{k!2^k} \sum_{\alpha \in Q_{2k,n}} \mathrm{Hf}(U_1(\alpha)). \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь мы использовали тот факт, что для любого $\alpha \in Q_{2k,n}$ матрица $J_b[\alpha]$ имеет тот же вид, что и исходная матрица J_b, то есть является симметричной матрицей порядка $2k$, у которой на главной диагонали стоят нули, а все остальные элементы равны b.

Обозначим через u_{ij} общий элемент матрицы U_1. Если $\alpha \in Q_{2k,n}$, то матрица $U_1(\alpha)$ имеет порядок $n - 2k$ и по определению

$$\sum_{\alpha \in Q_{2k,n}} \mathrm{Hf}(U_1(\alpha)) = \sum_{\alpha \in Q_{2k,n}} \sum_{(i_1 i_2 | \dots | i_{n-2k-1} i_{n-2k})} u_{i_1 i_2} \dots u_{i_{n-2k-1} i_{n-2k}}, \tag{8}$$

где внутреннее суммирование ведется по всем разбиениям множества $\{1, 2, \ldots, n\}\backslash\alpha$ на непересекающиеся пары $(i_1 i_2), \ldots, (i_{n-2k-1} i_{n-2k})$ с точностью до порядка пар и порядка элементов в каждой паре. Так как в матрице U_1 единичными являются только элементы вида $u_{i,i+1}$ и $u_{i+1,i}$, то слагаемое $u_{i_1 i_2} \ldots u_{i_{n-2k-1} i_{n-2k}}$ в сумме (8) равно 1 тогда и только тогда, когда каждая пара в разбиении $(i_1 i_2), \ldots, (i_{n-2k-1} i_{n-2k})$ представляет собой два соседних индекса. В противном случае это слагаемое будет равно 0. Отсюда следует, что вся сумма (8) равна числу различных способов выделить из $\{1, 2, \ldots, n\}$ множество $m-k$ непересекающихся пар $(i_1 i_2), \ldots, (i_{n-2k-1} i_{n-2k})$ с точностью до порядка пар и порядка элементов в каждой паре так, чтобы каждая пара представляла собой два соседних индекса. А это не что иное, как число способов выбрать $m-k$ ребер в линейном графе L_n так, чтобы два различных ребра не имели общих вершин, что в силу предложения 3 равно $C_{n-m+k}^{m-k} = C_{m+k}^{m-k}$. Таким образом, подставляя это значение в (7), получаем:

$$\mathrm{Hf}(T_{a,b}) = \sum_{k=0}^{m} (a-b)^{m-k} b^k \frac{(2k)!}{k! 2^k} C_{m+k}^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} (a-b)^{m-k} b^k \frac{(m+k)!}{k!(m-k)! 2^k}.$$

$\square$

Сделаем несколько замечаний по поводу полученного результата. Пусть a, b — целые неотрицательные числа. Обозначим через $\Gamma_{a,b}$ граф с $2m$ вершинами, матрицей смежности которого является матрица $T_{a,b}$. Если представить $\Gamma_{a,b}$ в виде дуговой диаграммы, то соседние вершины будут соединены между собой a дугами, а все остальные пары вершин — b дугами. В этом случае формула (5) выражает число совершенных паросочетаний графа $\Gamma_{a,b}$. Рассмотрим, например, граф $\Gamma_{2,1}$. Если вычислить с помощью (5) гафниан его матрицы смежности для последовательных m начиная с $m = 1$, то получим последовательность:

$$2, 7, 37, 266, 2431, 27007, \ldots$$

Ее k-й член равен числу совершенных паросочетаний в графе $\Gamma_{2,1}$ с $2k$ вершинами (рис. 3). Отметим, что данная последовательность имеет номер $A001515$ в [6], но в ее описании не указана приведенная здесь интерпретация.

Напомним (см. [7], [8]), что *полиномом Бесселя* порядка m называется полином вида:

$$y_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(m+k)!}{k!(m-k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^k.$$

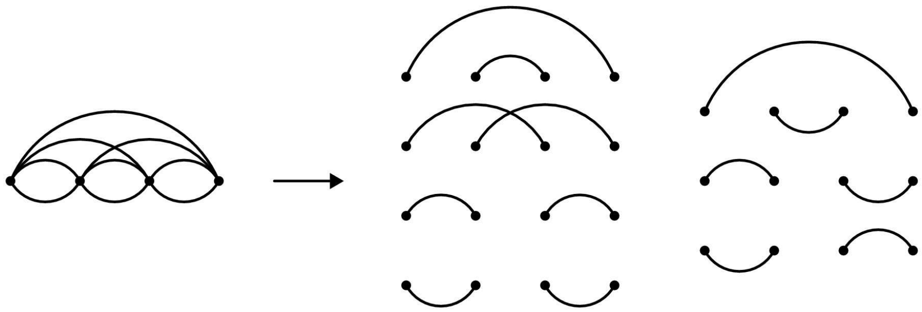

Рис. 3. Совершенные паросочетания четырехвершинного графа $\Gamma_{2,1}$

Из формулы (5) следует, что гафниан матрицы $T_{b+1,b}$ порядка $2m$ равен значению полинома Бесселя порядка m при $x = b$:

$$\mathrm{Hf}(T_{b+1,b}) = y_m(b).$$

Это довольно любопытный и неожиданный факт, объяснение которого пока не совсем понятно.

3. Заключение

Мы получили простую и удобную в применении аналитическую формулу (5) для точного вычисления гафниана тёплицевой матрицы специального вида (4). Опираясь на эту формулу, нетрудно написать алгоритм, который вычислял бы гафниан матрицы n-го порядка за время $O(n)$. Попутно мы установили любопытную связь между гафнианом тёплицевых матриц и полиномами Бесселя, которая еще требует более детального изучения. В дальнейшем можно попытаться получить с помощью приведенных выше методов эффективную аналитическую формулу для вычисления гафниана других видов тёплицевых матриц.

Автор выражает благодарность рецензенту за внимательное прочтение работы и полезные замечания, способствующие улучшению текста статьи.

Список литературы

1. **Caianiello E. R.** On quantum field theory - I: Explicit solution of Dyson's equation in electrodynamics without use of Feynman graphs // *IL Nuovo Cimento. 1953. V. 10 (12). Pp. 1634–1652.*

2. **Björklund A., Gupt B., Quesada N.** A faster hafnian formula for complex matrices and its benchmarking on the Titan supercomputer // *arXiv:1805.12498v2 [cs.DS] 25 Sep 2018.*

3. **Вялый М. Н.** Пфаффианы, или Искусство расставлять знаки // *Математическое просвещение. 2005. Вып. 9. С. 129–142.*

4. **Schwarz M.** Efficiently computing the permanent and Hafnian of some banded Toeplitz matrices // *Linear Algebra and its Applications. 2009. V. 430. Pp. 1364–1374.*

5. **Efimov D.B.** The hafnian and a commutative analogue of the Grassmann algebra // *Electronic Journal of Linear Algebra. 2018. V. 34. Pp. 54–60.*

6. **Sloane N. J. A., editor** The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, published electronically at https://oeis.org.

7. **Krall H. L., Frink O.** A new class of orthogonal polynomials: The Bessel polynomials // *Transactions of the American Mathematical Society. 1949. V. 65. Pp. 100–115.*

8. **Chatterjea S. K.** On the Bessel polynomials // *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. 1962. V. 32. Pp. 295–303.*

Summary

Efimov D. B. The hafnian of Toeplitz matrices of special type, perfect matchings and Bessel polynomials

In this paper, we present a simple and convenient analytic formula for exact computing of the hafnian of Toeplitz matrices of a special type. An interpretation of the obtained results in the language of perfect matchings and Bessel polynomials is given.
Keywords: hafnian, perfect matching, Bessel polynomial.

References

1. **Caianiello E. R.** On quantum field theory - I: Explicit solution of Dyson's equation in electrodynamics without use of Feynman graphs, *IL Nuovo Cimento*, 1953, v. 10 (12), pp. 1634–1652.

2. **Björklund A., Gupt B., Quesada N.** A faster hafnian formula for complex matrices and its benchmarking on the Titan supercomputer, *arXiv:1805.12498v2 [cs.DS]*, 25 Sep 2018.

3. **Vyaly M. N.** Pfaffiany, ili iskusstvo rasstavlyat' znaki (Pfaffians, or the art to set signs), *Matematicheskoe prosveshchenie*, 2005, vyp. 9, pp. 129–142.

4. **Schwarz M.** Efficiently computing the permanent and Hafnian of some banded Toeplitz matrices, *Linear Algebra and its Applications*, 2009, v. 430, pp. 1364–1374.

5. **Efimov D. B.** The hafnian and a commutative analogue of the Grassmann algebra, *Electronic Journal of Linear Algebra*, 2018, v. 34, pp. 54–60.

6. **Sloane N. J. A., editor** The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, published electronically at https://oeis.org.

7. **Krall H. L., Frink O.** A new class of orthogonal polynomials: The Bessel polynomials, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1949, v. 65, pp. 100–115.

8. **Chatterjea S. K.** On the Bessel polynomials, *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 1962, v. 32, pp. 295–303.

Для цитирования: Ефимов Д. Б. Гафниан тёплицевых матриц специального вида, совершенные паросочетания и полиномы Бесселя // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 3 (28). С. 56–64.*

For citation: Efimov D. B. The hafnian of Toeplitz matrices of special type, perfect matchings and Bessel polynomials, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2018, 3 (28), pp. 56–64.

ФМИ КомиНЦ УрО РАН

Поступила 06.11.2018