

МАТЕМАТИКА

*Вестник Сыктывкарского университета.  
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.  
Выпуск 3 (28). 2018*

УДК 530.145, 512.81

**КОМПЛЕКСНЫЙ МОМЕНТ, ГЕОМЕТРИЯ  
МИНКОВСКОГО И РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА В  
МЕТАМАТЕРИАЛАХ<sup>1</sup>**

*Н. А. Громов, И. В. Костяков, В. В. Куратов*

Обсуждается эквивалентность классических уравнений движения частицы на евклидовой плоскости с мнимым моментом и на псевдоевклидовой плоскости с вещественным моментом. Аналогичная эквивалентность сохраняется и в квантовом случае для уравнений Шредингера на евклидовой плоскости и плоскости Минковского. Предложен анзац решения уравнений Максвелла, при котором распространение электромагнитных волн в метаматериалах с анизотропными диэлектрическими проницаемостями разного знака описывается уравнением Шредингера для свободной частицы на плоскости Минковского.

*Ключевые слова:* геометрия Минковского, уравнение Шредингера, метаматериалы.

Рассмотрим свободную частицу на плоскости Евклида. В полярных координатах лагранжиан свободной частицы имеет вид

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2). \quad (1)$$

С помощью интеграла площадей  $J_E = r^2 \dot{\varphi}$  уравнения движения

$$\begin{cases} \ddot{r} = r \dot{\varphi}^2, \\ \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект №18-1-1-7

могут быть сведены к одномерному, которое после перехода к переменным  $\rho = r^{-1}$  и  $\varphi$  превращается в обычное уравнение для осциллятора с очевидным решением

$$\ddot{r} = \frac{J_E^2}{r^3}, \quad \rho_{\varphi\varphi} + \rho = 0, \quad r = \frac{A}{\cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (3)$$

Траектории — прямые линии в декартовых координатах. В полярных координатах траектории изображаются кривыми за счет появления эффективного отталкивающего центробежного потенциала.

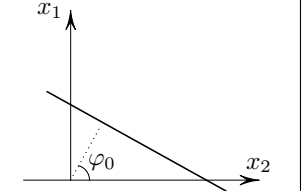
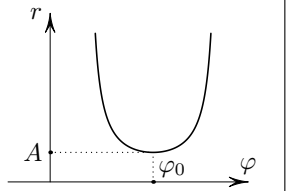
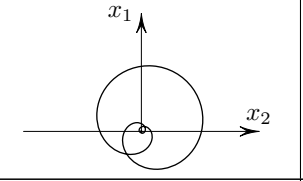
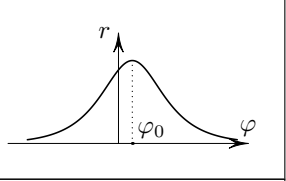
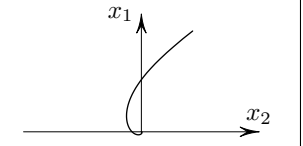
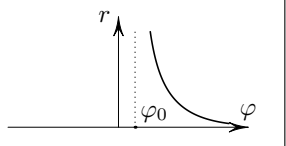
Интеграл движения  $J_E$  имеет физический смысл момента количества движения. Обычно он принимает вещественные значения. Если допустить возможность мнимого значения, то уравнения (3) примут вид

$$\ddot{r} = -\frac{J_E^2}{r^3}, \quad \rho_{\varphi\varphi} - \rho = 0, \quad r = \frac{1}{A \operatorname{ch}\varphi + B \operatorname{sh}\varphi} \quad (4)$$

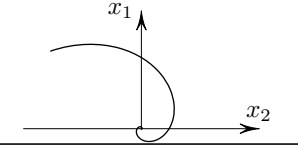
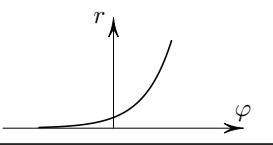
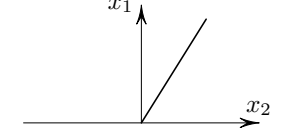
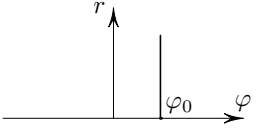
и описывают более разнообразные типы одномерного движения в притягивающем потенциале (табл. 1).

Таблица 1

**Типы траекторий свободной частицы с мнимым моментом на евклидовой плоскости**

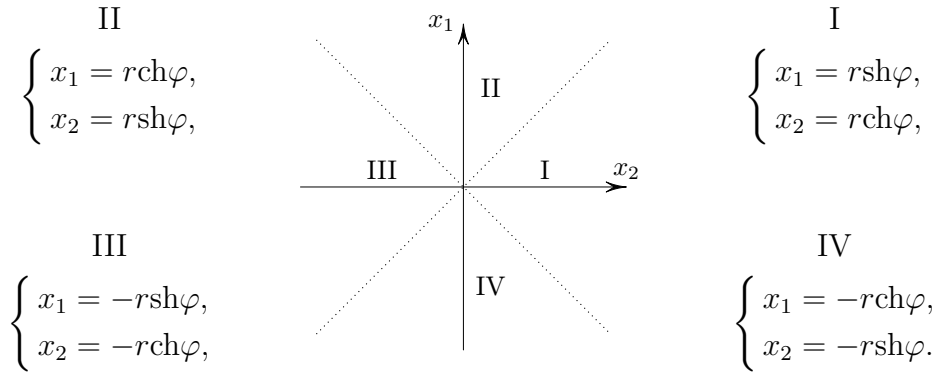
$r = \frac{A}{\cos(\varphi - \varphi_0)}$		
$r = \frac{A}{\operatorname{ch}(\varphi - \varphi_0)}$		
$r = \frac{A}{\operatorname{sh}(\varphi - \varphi_0)}$		

Окончание таблицы 1

$r = Ae^\varphi$		
$\varphi = \varphi_0$		

Мнимый момент приводит к мнимости угла  $\varphi$ , что не имеет удовлетворительной физической интерпретации в рамках евклидовой геометрии, хотя и обеспечивает правильный переход тригонометрических формул в гиперболические  $\cos i\varphi = \operatorname{ch}\varphi$ .

Возникновение гиперболических функций наводит на мысль о геометрии Минковского, с помощью которой удастся изгнать мнимую единицу. Действительно, рассмотрим свободную частицу на плоскости Минковского. Плоскость естественно разделяется на четыре квадранта с разными гиперболическими полярными координатами [3]:



Легко видеть, что лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2) = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 - r^2\dot{\varphi}^2), \tag{5}$$

с уравнениями движения

$$\begin{cases} \ddot{r} = -r\dot{\varphi}^2, \\ \frac{d}{dt} (r^2\dot{\varphi}) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

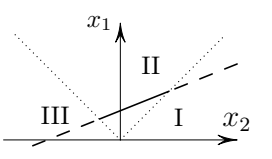
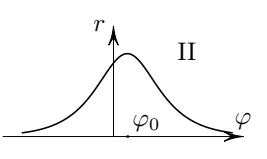
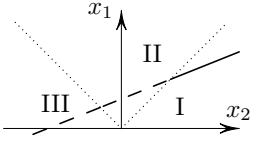
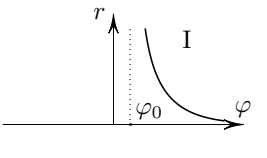
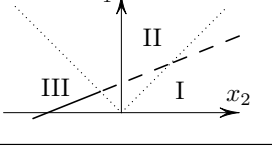
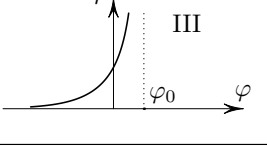
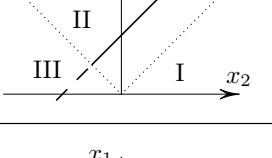
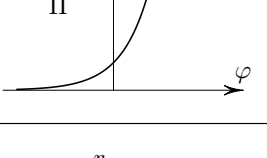
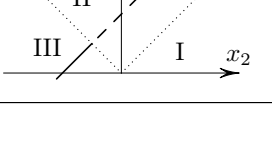
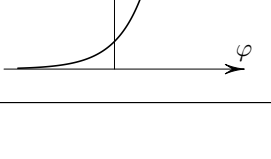
приводят к (4).

Траектория свободной частицы на плоскости Минковского есть прямая в декартовых координатах, преобразующаяся в полярных координатах в разные кривые в разных квадрантах (табл. 2).

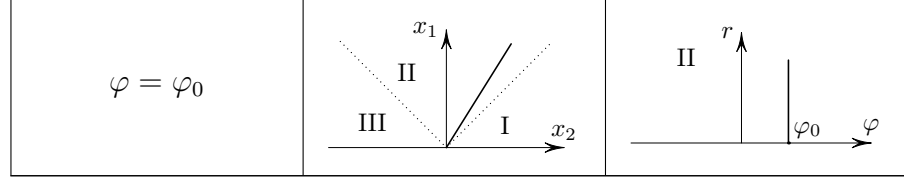
Таким образом, уравнения механики на плоскости Минковского с вещественным моментом воспроизводят все многообразие траекторий, возникающих в случае нефизического комплексного момента на плоскости Евклида.

Таблица 2

**Типы траекторий свободной частицы с вещественным моментом на псевдоевклидовой плоскости**

$r = \frac{A}{\text{ch}(\varphi - \varphi_0)}$		
$r = \frac{A}{\text{sh}(\varphi - \varphi_0)}$		
$r = \frac{A}{\text{sh}(\varphi - \varphi_0)}$		
$r = Ae^\varphi$		
$r = Ae^\varphi$		

Окончание таблицы 2



Перейдем теперь к двумерному уравнению Шредингера (УШ), которое в полярных тригонометрических и гиперболических координатах имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \pm \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \Psi(r, \varphi) + U(r) \Psi(r, \varphi) = E \Psi(r, \varphi), \quad (7)$$

где знак  $\pm$  относится, соответственно, к плоскостям Евклида  $E(2)$  и Минковского  $M(2)$ , сектор  $II$ .

Подставляя момент импульса  $\hat{L} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$  в (7)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Psi(r, \varphi) + \left( U(r) \pm \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} \right) \Psi(r, \varphi) = E \Psi(r, \varphi), \quad (8)$$

ищем решение с собственным значением момента  $J$ ,  $\hat{L}\Phi = J\Phi$  в виде

$$\Psi(r, \varphi) = \frac{u(r)}{\sqrt{r}} \Phi(\varphi). \quad (9)$$

Для радиальной волновой функции  $u(r)$  получаем одномерное УШ

$$u'' + \left( \frac{2mE}{\hbar^2} - U_{\text{эфф}}(r) \right) u = 0, \quad (10)$$

$$U_{\text{эфф}} = U(r) - \frac{1 \pm 4J^2}{4r^2}. \quad (11)$$

Видно, что УШ для  $u(r)$  на евклидовой плоскости при мнимых значениях момента  $J$  совпадают с УШ на плоскости Минковского для вещественных  $J$ . Отметим, что в работах [4] рассматривались варианты уравнения Шредингера с комплексным моментом, которые связаны с квантово-механической задачей о движении в сингулярном притягивающем потенциале. Вопросы квантования в такого рода потенциалах подробно рассматривались в [5; 6].

Известно, что неевклидовы геометрии можно моделировать с помощью метаматериалов [1, 2]. Рассмотрим уравнения Максвелла в среде без источников

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (12)$$

Пусть  $D_i = \varepsilon_i E_i$ ,  $\varepsilon_x = \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$  и магнитная проницаемость  $\mu = 1$ . Из двух последних уравнений (12) имеем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{D} = 0 \quad (13)$$

или

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{D} = 0. \quad (14)$$

Для  $z$ -й компоненты уравнение (14) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta E_z + \frac{\varepsilon_z}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_z = 0. \quad (15)$$

Из первого уравнения Максвелла (12) и связи между  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  следует

$$\operatorname{div} \vec{E} = \left(1 - \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}\right) \frac{\partial}{\partial z} E_z. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15) получаем «деформированное» волновое уравнение

$$\left(\frac{1}{\varepsilon_z} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{\varepsilon_x} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) E_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_z = 0, \quad (17)$$

которое может быть представлено в виде двумерного УШ, если искать решение в виде  $E_z(x, y, z, t) = \Psi(x, z) e^{i(\omega t - k_y y)}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{\varepsilon_x} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\varepsilon_z} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \Psi = E \Psi, \quad (18)$$

где

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{k_y^2}{\varepsilon_z}\right).$$

Рассмотрим, например, метаматериал с  $\varepsilon_x > 0$ ,  $\varepsilon_z < 0$ . Тогда, делая замену  $x_1 = \sqrt{|\varepsilon_x|} z$ ,  $x_2 = \sqrt{|\varepsilon_z|} x$ , получаем уравнение Шредингера для свободной частицы на плоскости Минковского

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) \Psi = E \Psi. \quad (19)$$

Таким образом, имеется возможность промоделировать решения УШ на плоскости Минковского для свободной частицы с помощью метаматериалов со специально подобранными диэлектрическими проницаемостями. Наличие дискретных уровней энергии в притягивающем потенциале  $U = -\alpha/r^2$  обсуждалось в работах [5–7] и подтверждено в [8] численным экспериментом. Такой же потенциал получается из (19) при переходе к полярным координатам, и, следовательно, свободная частица на плоскости Минковского при ненулевом моменте имеет дискретный спектр энергии. Это явление можно наблюдать в метаматериалах, где распространение электромагнитных волн должно проявлять дискретные частотные свойства. Возможность квантования частицы на плоскости Минковского с дополнительными граничными условиями обсуждалась в [9].

## Список литературы

1. Ремнев М. А., Климов В. В. Метаповерхности: новый взгляд на уравнения Максвелла и новые методы управления светом // *УФН*. 2018. Т. 188. №2. С. 169–205.
2. Smolyaninov I. I. Hyperbolic metamaterials. ArXiv:1510.07137[physics. optics].
3. Катанаев М. О. Геометрические методы в математической физике. ArXiv:1311.0733[math-ph].
4. Шабад А. Е. Сингулярный центр как негравитационная черная дыра // *ТМФ*. 2014. Т. 181. №3. С. 603–613.
5. Переломов А. М., Попов В. С. «Падение на центр» в квантовой механике // *ТМФ*. 1970. Т. 4. №1. С. 48–65.
6. Gitman D. M., Tyutin I. V., Voronov B. L. Self-Adjoint Extensions in Quantum Mechanics: General Theory and Applications to Schrödinger and Dirac Equations with Singular Potentials // *Progress in Mathematical Physics*. 2012. V. 62, Birkhäuser, New York, 2012. 511 p. In: Progress in Mathematical Physics, vol. 62. Birkhäuser: New York, 2012. 511 p.
7. Case K. M. Singular potentials // *Phys. Rev.* 1950. Vol. 80. Pp. 797–806.

8. **Незнамов В. П., Сафронов И. И.** Падение частиц на центр. Гипотеза Ландау – Лифшица и численные расчеты // *Вопросы атомной науки и техники: теоретическая и прикладная физика*. 2016. №4. С. 3–8.
9. **Громов Н. А., Куратов В. В.** Квантовая частица на плоскости Минковского // *Известия Коми НЦ УрО РАН. Сыктывкар, 2018. Вып. 3(35). С. 5–7.*

### Summary

**Gromov N. A., Kostyakov I. V., Kuratov V. V.** Complex moment, Minkowski geometry and light propagation in metamaterials

It is shown that the classical equations of motion of a two-dimensional particle on a Euclidean plane with an imaginary moment are equivalent to the equations of motion of a particle on a pseudo-Euclidean plane with a real moment. A similar equivalence is preserved in the quantum case for the Schrödinger equations on the Euclidean plane and the Minkowski plane. An ansatz for solving Maxwell's equations is proposed, in which the propagation of electromagnetic waves in metamaterials with anisotropic dielectric constant of a different sign is described by the Schrödinger equation for a free particle on the Minkowski plane.

*Keywords: Minkowski geometry, Schrödinger equation, metamaterials.*

### References

1. **Remnev M. A., Klimov V. V.** Metapoverhnosti: novyj vzglyad na uravneniya Maksvella i novye metody upravleniya svetom (Metasurfaces: a new look at Maxwell's equations and new methods of controlling light), *UFN*, 2018, t. 188, N 2, pp. 169–205.
2. **Smolyaninov I. I.** Hyperbolic metamaterials, ArXiv:1510.07137 [physics. optics].
3. **Katanaev M. O.** Geometricheskie metody v matematicheskoy fizike (Geometric methods in mathematical physics), ArXiv:1311.0733[math-ph].
4. **Shabad A. E.** Singulyarnyj centr kak negravitacionnaya chernaya dyra (Singular center as a non-gravitational black hole), *TMF*, 2014, t. 181, N 3, pp. 603–613.



5. **Perelomov A. M., Popov V. S.** «Padenie na centr» v kvantovoj mekhanike («Fall on the center» in quantum mechanics), *TMF*, 1970, t. 4, N 1, pp. 48–65.
6. **Gitman D. M., Tyutin I. V., Voronov B. L.** Samosopryazhennyye rasshireniya v kvantovoy mekhanike: obshchaya teoriya i prilozheniya k uravneniyam Shredingera i Diraka s singulyarnymi potentsialami (Self-Adjoint Extensions in Quantum Mechanics: General Theory and Applications to Schrödinger and Dirac Equations with Singular Potentials), *Progress in Mathematical Physics*, 2012, v. 62, Birkhäuser, New York, 2012, 511 p. In: *Progress in Mathematical Physics*, vol. 62, Birkhäuser: New York, 2012, 511 p.
7. **Case K. M.** Singular potentials, *Phys. Rev.*, 1950, vol.80, pp. 797–806.
8. **Neznamov V. P., Safronov I. I.** Padenie chastic na centr. Gipoteza Landau-Lifshica i chislennyye raschety (Particles fall on the center. Landau-Lifshitz hypothesis and numerical calculations), *Voprosy atomnoj nauki i tekhniki: teoreticheskaya i prikladnaya fizika*, N 4, 2016, pp. 3–8.
9. **Gromov N. A., Kuratov V. V.** Kvantovaya chastica na ploskosti Minkovskogo (The quantum part on the Minkowski plane), *Izvestiya Komi NC UrO RAN*, vyp. 3(35), Syktyvkar, 2018, s. 5–7.

**Для цитирования:** Громов Н. А., Костяков И. В., Куратов В. В. Комплексный момент, геометрия Минковского и распространение света в метаматериалах // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 3 (28). С. 47–55.*

**For citation:** Gromov N. A., Kostyakov I. V., Kuratov V. V. Complex moment, Minkowski geometry and light propagation in metamaterials, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2018, 3 (28), pp. 47–55.