НАСТАВНИК-УЧЕНИК

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 2 (27). 2018

УДК 539.3

РАСЧЕТ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ И ОСНОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ КАРМАНА

А. В. Ермоленко, В. А. Мельников

В статье решается задача о контактном взаимодействии прямоугольной пластины и основания по теории Ка́рмана с использованием конечно-разностной аппроксимации под действием нормальной нагрузки. Искомые функции найдены с использованием предложенного в Сыктывкарском университете метода обобщенной реакции. Полученные графики качественно согласуются с расчетами цилиндрически изгибаемой пластины.

Ключевые слова: пластина, метод обобщенной реакции, контактная задача, теория Кармана.

1. Постановка задачи

Рассмотрим контактное взаимодействие жестко закрепленной пластины толщиной H, шириной a и длиной b с идеально гладким абсолютно жестким основанием. Считаем, что первоначально пластина расположена параллельно основанию на расстоянии z, под действием нормальной нагрузки пластина выстилается без зазоров. Требуется определить прогиб пластины, зону контактного взаимодействия и возникающие контактные реакции.

Для расчета параметров напряженно-деформируемого состояния пластины используем уравнения Ка́рмана, имеющие следующий вид [1]:

$$D\Delta^2 w = q_n + L(\Phi, w),$$

$$\frac{1}{EH}\Delta^2 \Phi = -\frac{1}{2}L(w, w). \tag{1}$$

Здесь $w(x,y)$ — прогиб, $\Phi(x,y)$ — функция напряжения, $x \in (0,a)$, $y \in (0,b)$, $D = \dfrac{EH^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жёсткость, q_n^+, q_n^- —

нагрузки, действующие на верхнюю и нижнюю лицевые поверхности, $q_n = q_n^+ - q_n^-$ — нормальная нагрузка; E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L(u, v) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Для решения задачи вместо непрерывных функций $w(x, y), \Phi(x, y)$ рассмотрим их значения на сетке [2]:

$$w_{ij} = w(x_i, y_j), \Phi_{ij} = \Phi(x_i, y_j), \tag{2}$$

где

$$x_i = ih, y_j = jh, a = nh, b = mh, i \in 0 : n, j \in 0 : m;$$

n, m — количество отрезков разбиения по каждой оси.

Граничные условия жесткого закрепления запишем так:

$$w(x, 0) = 0, w(x, b) = 0, w(0, y) = 0, w(a, y) = 0,$$

$$w_y^{'}(x, 0) = 0, w_y^{'}(x, b) = 0, w_x^{'}(x, 0) = 0, w_x^{'}(x, b) = 0.$$

$$\Phi(x, 0) = 0, \Phi(x, b) = 0, \Phi(0, y) = 0, v(a, y) = 0,$$

$$\Phi_y^{'}(x, 0) = 0, \Phi_y^{'}(x, b) = 0, \Phi_x^{'}(x, 0) = 0, \Phi_x^{'}(x, b) = 0. \tag{3}$$

Используя левые и правые конечные разности на границе, получим следующие соотношения:

$$w_{i0} = w_{i1} = w_{in-} = w_{in} = 0, i \in 0 : n, w_{0j} = w_{nj} = 0, j \in 0 : n,$$

$$\Phi_{i0} = \Phi_{i1} = \Phi_{in-1} = \Phi_{in} = 0, i \in 0 : n, \Phi_{0j} = \Phi_{nj} = 0, j \in 0 : n. \tag{4}$$

Заменяя производные центральными конечными разностями [2], получаем следующее выражение для бигармонического оператора:

$$h^4 \Delta_h^2(w)_{ij} = 20w_{ij} - 8(w_{i-1j} + w_{i+1j}) - 8(w_{ij-1} + w_{ij+1}) +$$

$$+2(w_{i-1j-1} + w_{i+1j-1} + w_{i-1j+1} + w_{i+1j+1}) +$$
$$+(w_{i-2j} + w_{i+2j} + w_{ij-2} + w_{ij+2}). \tag{5}$$

Таблица 1

Переход от двумерного массива к одномерному массиву при $n = 7$, $m = 6$

	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$
$i=0$	0	0	0	0	0	0	0
$i=1$	0	0	0	0	0	0	0
$i=2$	0	0	$u[1]$	$u[2]$	$u[3]$	0	0
$i=3$	0	0	$u[4]$	$u[5]$	$u[6]$	0	0
$i=4$	0	0	$u[7]$	$u[8]$	$u[9]$	0	0
$i=5$	0	0	$u[10]$	$u[11]$	$u[12]$	0	0
$i=6$	0	0	0	0	0	0	0
$i=7$	0	0	0	0	0	0	0

2. Решение системы разностных уравнений

Рассмотрим решение бигармонического уравнения

$$\Delta^2 w = f(x, y) \tag{6}$$

с граничными условиями жесткого закрепления.

Переходя от непрерывных функций к сеточным значениям w_{ij}, приходим к системе

$$\Delta_h^2(w)_{ij} = f(x_i, y_j), i \in 2 : n-2, j \in 2 : m-2$$

с присоединением граничных условий $(4)_1$.

Эту систему запишем в обычном матричном виде. Преобразуем двумерный массив $\{w_{ij} : i, j \in 2 : n-2, j \in 2 : m-2\}$ в одномерный массив $\{u_k : k \in (n-3)(m-3)\}$ по правилу (см. также таблицу)

$$w_{ij} = u_k, k = (i-2)(m-3) + j - 1. \tag{7}$$

Неизвестный вектор u находится из системы линейных алгебраических уравнений

$$Au = \widetilde{f}, \tag{8}$$

где $A-$ квадратная матрица размера $(n-3)(m-3)$, а вектор $\widetilde{f}$ получается из $\{f(x_i, y_j)\}$ по тому же правилу

$$f(x_i, y_j) = \widetilde{f}[k], k = (i-2)(m-3) + j - 1.$$

В примененном ниже итерационном методе система (8) решается на каждом шаге с одной и той же матрицей A, но с разными правыми частями. Поэтому выгодно найти обратную матрицу A^{-1} и находить решение системы так:

$$u = A^{-1}\widetilde{f}. \tag{9}$$

3. Метод обобщенной реакции

Для решения поставленной контактной задачи воспользуемся методом обобщенной реакции [3]. Учитывая, что на лицевые поверхности пластины действует два вида нагрузок: активная $q_0 = q_n^+$ и реактивная $r(x,y) = q_n^-$, выражение для нормальной нагрузки можно записать следующим образом:

$$q_n(x,y) = q_0 - r(x,y). \tag{10}$$

При этом функции $w(x,y)$ и $r(x,y)$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$r \geq 0, w \leq z, r(w-z) = 0. \tag{11}$$

Условие $(11)_1$ указывает на односторонность связи. Неравенство $(12)_2$ выражает условие непроникновения пластины через основание. Равенство $(11)_3$ называется условием дополняющей нежесткости, связывает условия $(11)_1$ и $(11)_2$.

Условия (11) эквивалентны одному существенно нелинейному уравнению

$$r = [r + \beta(w-z)]_+, \beta > 0. \tag{12}$$

Здесь φ_+ — положительная срезка функции φ: $\varphi_+ = 1/2(\varphi + |\varphi|)$.

На основе уравнения (12) создается следующая итерационная схема:

$$r_{k+1} = [r_k + \beta(w_k - z)]_+, \tag{13}$$

где w_k, Φ_k являются решениями уравнений

$$D\Delta^2 w_{k-1} = q_0 - r_k(x,y) + L(\Phi_{k-1}, w_{k-1}),$$

$$\frac{1}{EH}\Delta^2\Phi_{k-1} = -\frac{1}{2}L(w_{k-1}, w_{l-1}). \tag{14}$$

Решения уравнений (14) при известных правых частях находятся с использованием обратной матрицы в соответствии с разделом 2.

В качестве начальных условий для схемы (13)–(14) берем

$$r_0 = 0,$$

при этом w_0, Φ_0 являются решениями уравнений

$$D\Delta^2 w_0 = q_0,$$

$$\frac{1}{EH}\Delta^2\Phi_0 = -\frac{1}{2}L(w_0, w_0).$$

Если при этом $w_0 < z$, то итерационная схема не состоялась и процесс прекращаем.

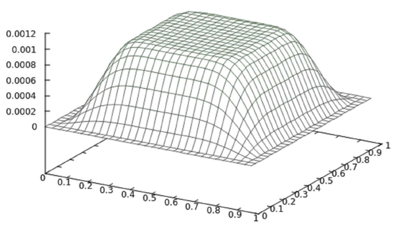

Рис. 1. Прогиб (w, см)

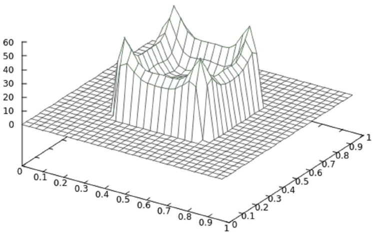

Рис. 2. Контактные реакции

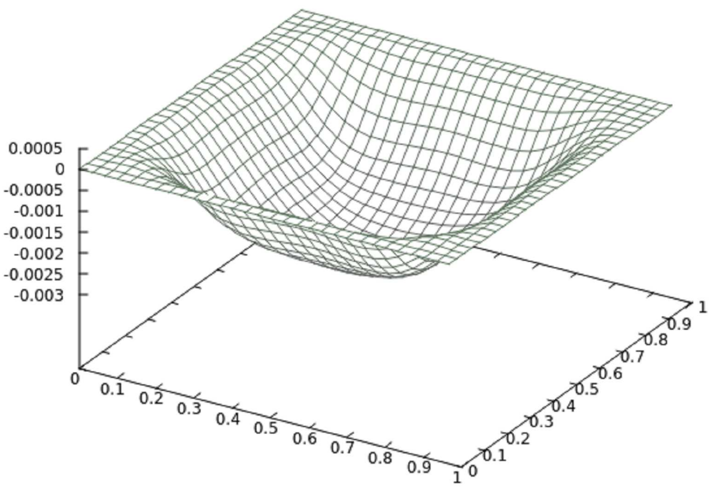

Рис. 3. Функция напряжений (Φ, кг·см)

4. Численный эксперимент

На рис. 1–3 приведен пример численного расчета при следующих геометрических и физических параметрах пластины:

$$a = b = 100 \text{ см}, H = 2 \text{ см}, z = 0,1 \text{ см}, m = n = 60, \beta = 0,1$$

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, \nu = 0,3, q_0 = 20 \text{ кг/см}^2.$$

Данный пример является характерным при «больших» и «средних» зонах контакта. Заметим, что, как и в случае решения одномерных контактных задач [4], нагрузка в зоне контакта равна примерно действующей нагрузке, а на краю зоны контакта присутствуют пиковые значения.

Список литературы

1. **Михайловский Е. И., Торопов А. В.** Математические модели теории упругости. Сыктывкар: Сыктывкарский ун-т, 1995. 251 с.

2. **Ермоленко А. В.** Численные методы в решении контактных задач со свободной границей // *Проблемы развития транспортной инфраструктуры северных территорий : материалы Всероссийской научно-практической конференции 25–26 апреля 2014 года. СПб.: Изд-во ГУМРФ им. адм. С.О. Макарова, 2015. С. 29–35.*

3. **Михайловский Е. И., Тарасов В. Н.** О сходимости метода обобщенной реакции в контактных задачах со свободной границей // *РАН. ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 128–136.*

4. **Ермоленко А.В.** Уточненные соотношения теории пластин, ориентированные на решение контактных задач // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Информатика. 2014. Вып. 19. С. 25–32.*

Summary

Yermolenko A. V., Melnikov V. A. Calculation of the contact interaction of a rectangular plate and a base by the Karman theory

This article is about contact interaction of rectangular plate with base by Karman theory with usage of finite difference method under the constant normal load. Wanted functions were discovered with method of generalized reactions developed in Syktyvkar state university. The obtained graphs are

qualitatively consistent with the calculations of a cylindrically bent plate.
Keywords: plate, method of generalized reaction, contact problem, the Karman theory.

References

1. **Mikhailovskii E. I., Toropov A. V.** *Matematicheskie modeli teorii uprugosti* (Mathematical models of the theory of elasticity). Syktyvkar: Syltyvkar University, 1995. 251 p.

2. **Yermolenko A.V.** Chislennye metody v reshenii kontaktnyh zadach so svobodnoj granicej (Numerical methods in solving contact problems with a free boundary), *Problems of the development of the transport infrastructure of the northern territories*: Proceedings of the All-Russian Scientific and Practical Conference on April 25–26, 2014. SPb.: Publishing House GUMRF them. adm. S.O. Makarova, 2015, pp. 29–35.

3. **Mikhailovskii E. I., Tarasov V. N.** O sxodimosti metoda obobshhennoj reakcii v kontaktny'x zadachax so svobodnoj granicej (On the convergence of the generalized reaction method in contact problems with a free boundary), *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1993, v. 57, No. 1, pp. 128–136.

4. **Yermolenko A. V.** Utochnennye sootnosheniya teorii plastin, orientirovannye na reshenie kontaktnyh zadach (Refined relations of the theory of plates, oriented to the solution of contact problems), *Bulletin of Syktyvkar University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2014, 19, pp. 25–32.

Для цитирования: Ермоленко А. В., Мельников В. А. Расчет контактного взаимодействия прямоугольной пластины и основания по теории Кармана // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 2 (27). С. 86–92.*

For citation: Yermolenko A. V., Melnikov V. A. Calculation of the contact interaction of a rectangular plate and a base by the Karman theory, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2018, 2 (27), pp. 86–92.

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 01.06.2018*