МАТЕМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 2 (27). 2018

УДК 511.0

ГЕОМЕТРИЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОГО: АКСИОМАТИКА МНОГОМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА И ЗАКОНЫ ДЕ МОРГАНА

Р. Р. Пименов

В статье дается аксиоматика конечномерной геометрической структуры, использующая только отношение перпендикулярности. Эта структура оказывается проективным пространством, в котором выполняется геометрический аналог логических законов де Моргана. Указывается связь построения с аксиомой Веблена и разбиением на пары четырехэлементного множества различными способами. Исследование связано с теорией орторешеток, матроидами, связями Галуа и квантовой логикой.

Ключевые слова: основания геометрии, перпендикулярность, логика, орторешетки, связи Галуа.

1. Введение

Известно, что основные логические операции можно выразить через одно бинарное отношение, называемое «штрих Шеффера» и обозначаемое символом |. Запись A|B означает, что высказывания A и B — несовместимы. В данной статье мы показываем, что все геометрические операции и отношения во многомерном пространстве выразимы через одно отношение перпендикулярности $\perp$. Точнее говоря, мы показываем, что конечномерное проективное пространство можно ясно и кратко описать, используя лишь отношение перпендикулярности. При этом мы определим не только проективное пространство, а проективное пространство с перпендикулярностью, частным случаем которого является геометрия сферы с отождествленными диаметральными точками, или геометрия связки подпространств, проходящих через одну фиксированную точку. Мы увидим также, что свойства отношений | и $\perp$ тесно связаны и отношение перпендикулярности можно понимать как обобщение штриха Шеффера и на него распространяются обобщенные логические законы де Моргана. С чисто геометрической точки зрения статья больше всего связана с работами Бахмана о построении геометрии на основании симметрии в [4]: перпендикулярность — не менее фундаментальное понятие, чем симметрия, поскольку симметрия не мыслится в геометрии без перпендикуляров. С. Табачников в [10] и мы в [11–13] изучали перпендикулярность как геометрическое явление, обнаруживая неизвестные ранее наглядные геометрические факты, с ним связанные.

В разделе 2.1 мы опишем основную конструкцию, в разделе 2.2 введем аксиомы и назовем рассматриваемые «Пространства с перпендикулярностью» — Н-пространствами. В разделе 2.3 мы докажем, что Н-пространства имеют размерность, в 2.4 мы покажем, что подпространства Н-пространства аналогичны подпространствам проективной геометрии и введем понятие «независимые элементы», аналогичное понятию линейной независимости. В разделе 3 мы введем естественное понятие перпендикулярных подпространств и докажем теорему о двух парах перпендикулярных подпространств и укажем связь этой теоремы с законами де Моргана. В разделе 4 мы, основываясь на теореме Веблена-Юнга [1], установим, в каком случае Н-пространство является проективным пространством, и укажем еще один способ определения проективного пространства. В комментариях мы указываем связи изложенной аксиоматики с теорией орторешеток [2, 6, 7], квантовой логикой [9], определением матроида [3] и связями Галуа [1]. Связи Галуа (в усеченном виде) играют наибольшую роль для нашей аксиоматики, на них основан раздел 2.1, в разделе 5 мы приведем примеры их использования в геометрии и топологии. В завершение мы обсудим развитие предлагаемого понимания геометрии.

2. Аксиомы и основные свойства «пространств с перпендикулярностью»

2.1. Основная конструкция

Пусть даны некие объекты (элементы или точки пространства), которые могут находиться друг с другом в отношении Н. Это отношение симметрично, т. е. Н(X, Y)=Н(Y, X) и антирефлексивно: объект не может находиться в отношении Н сам с собой, Н(X, X) невозможно[1]. Как

[1]Здесь и далее в разделе описывается частный случай связи Галуа [2]. Пусть у нас есть два множества X и Y, произвольное бинарное отношение F(x, y), где $x \in X, y \in Y$ определяет соотношение между подмножествами X и Y. Каждому подмножеству $p \subset X$ ставится в соответствие $p^* \subset Y$, состоящее из тех и только

определить, что такое «точка», «прямая», «гиперплоскость», «подпространство», используя всего одно отношение H? Мы используем именно букву H, поскольку в ее начертании есть проведение перпендикуляра к перпендикуляру, что составляет основной прием в предлагаемом исследовании.

Геометрически самый простой способ мыслить элементы и отношение H — связкой прямых, проходящих через фиксированную точку A во многомерном евклидовом пространстве. Прямые связки мы назовем элементами, а перпендикулярные прямые — «элементами, лежащими в отношении H». Подпространствами тогда окажутся множества прямых, перпендикулярных всем прямым из какого-то данного множества. Эта модель ведет нас к проективному пространству или к сферической геометрии, в обоих случаях прямые связки называются «точками».

Определение 2.1. Пусть M — произвольное множество элементов. M* называется множество всех элементов, таких, что любой элемент из M* перпендикулярен любому элементу из M.

Определение 2.2. Множество P называется подпространством[2], если существует такое множество M, что M*=P. В этом случае мы называем множество M определяющим подпространство P.

Отметим важный частный случай: *гиперплоскостью* мы называем множество всех элементов, перпендикулярных какому-то *одному* элементу (M из определения подпространства состоит всего из одного элемента).

Просто доказываем, используя симметричность H, см., например, [2], что если M само является подпространством, то M**=M. По сути, доказательство использует лишь факт, что Василий является соседом соседа Василия (отношение H в этой фразе означает «соседство»). Это можно выразить и так: если P — произвольное множество, то P***=P (поскольку P* является подпространством по определению). Записи такого типа кратки, но работа с ними и понимание их не всегда удобны, поэтому далее мы избегаем подобных конструкций.

тех элементов Y, которые находятся в отношении F со всеми элементами p. Таким же образом каждому подмножеству в Y ставится в соответствие подмножество в X. Очевидно, если $p \subset X$, то $p^{**} \subset X$ и $p \subset p^{**}$. В статье мы используем частный случай, когда множества X и Y совпадают, можно назвать этот случай «склеенной» связью Галуа.

[2]Вводимое понятие подпространства естественно трактовать в терминах теории игр (см. [8], с. 41–42) как коалицию, а отношение H — как отношение антагонистичности.

Определение 2.3. Подпространства A и B называются двойственными, если A*=B.

Замечание 2.1. Из предыдущего отсюда сразу следует, что B*=A.

Общеизвестно переворачивающее свойство двойственности: Если произвольное множество элементов M_1 *лежит* во множестве M_2, то множество M_1^* *включает* M_2^*. Из определения подпространств следует, что пересечение подпространств — снова подпространство: $A^* \bigcap B^* = (A \bigcup B)^*$, где A и B — произвольные множества. Мы можем выразить эту мысль более громоздко, пусть A и B — произвольные подпространства, тогда $A \bigcap B = (A^* \bigcup B^*)^*$ — здесь мы явно указали множество, определяющее подпространство $A \bigcap B$, это множество $A^* \bigcup B^*$.

Мы легко определили гиперплоскости, а как определить прямые? В геометрии прямая задается двумя точками, лежащими на ней. Есть два способа определения прямой (через двойственность и через пересечение гиперплоскостей). Два элемента A и B задают подпространство $L_1 = \{A, B\}^*$ и двойственное к L_1 подпространство $L_2 = L_1^*$. Именно L_2, множество всех перпендикуляров ко всем элементам, перпендикулярным и A, и B, мы и будем называть прямой в пространстве.

Определение 2.4. Прямой, определенной двумя различными элементами A и B, мы называем множество элементов {A, B}**.

Как устроена прямая? Она есть множество всех элементов, перпендикулярных элементам L_1, а элементов в L_1 может быть бесконечно много, и совершенно неясно, есть ли на прямой хоть какие-то элементы, кроме A и B. Возможно, напротив, что не существует элемента, перпендикулярного и A, и B, тогда $\{A, B\}^* = \emptyset$ и все элементы лежат на прямой, определенной A и B. Из симметричности отношения H легко следует:

Предложение 2.1. *Если элементы C и D лежат на прямой, определенной A и B, то прямая, определенная C и D, лежит на прямой, определенной A и B.*

То, что две рассматриваемые прямые совпадают, как происходит в геометрии, мы докажем существенно позднее, и для этого уже недостаточно свойства симметричности H.

2.2. Аксиомы

Определение H-пространства:

Множество элементов (мы называем элементы также точками) называется H-пространством, если удовлетворяет следующим четырем аксиомам. Мы используем введенные в предыдущем разделе обозначения и определения.

Обозначения или нулевая аксиома

Между элементами существует бинарное симметричное отношение H, такое, что H(X, X) невозможно (H — антирефлексивно). В дальнейшем это отношение H называется перпендикулярностью.

1. Рекурсивная аксиома

Для произвольного элемента X множество всех элементов, перпендикулярных ему, также образует H-пространство. Пустое множество и множество, состоящее из одного элемента, мы также называем H-пространством.

2. Проекционная аксиома

Для любых двух различных элементов A и B существует один и только один элемент C, такой, что H(A, C) , C лежит на прямой AB и для этого C верно, что AB=AC (определение прямой дано ранее).

Есть тривиальные следствия аксиомы, важные для доказательства базы индукции в некоторых теоремах. Если существует элемент P, для которого не существует элемента X, перпендикулярного ему, то P — единственный элемент H-пространства: если существует отличный от P элемент Q, то по аксиоме существует Y, перпендикулярный P. Возможно, что Y совпадает с Q. Если элементов вообще не существует (пустое множество выше мы признали частным случаем H-пространства), то аксиома верна, но бессодержательна.

Из того, что AB=AC равносильно любому из двух равенств: {A, B}**={A, C}** и {A, B}*={A, C}*, возникают два важных многомерных геометрических истолкования аксиомы.

Первое происходит из равенства {A, B}**={A, C}**. В сочетании с условием H(A, C) оно означает, что прямая AB пересекает гиперплоскость A* в точке C. Аксиома тем самым утверждает существование точки пересечения гиперплоскости и прямой, обозначенной C, или что *произвольную точку пространства, отличную от A, можно спроецировать на A*.*

Второе истолкование исходит из формулы {A, B}*={A, C}* и означает, что пересечение гиперплоскостей A* и B* является гиперплоскостью в гиперплоскости A* (то, что гиперплоскость сама является H-пространством, утверждает рекурсивная аксиома). *Таким образом,* *существование точки C говорит о вложении* [3].

Определение 2.5. Определенную выше точку C мы будем называть проекцией B на A*.

Из определения и проекционной аксиомы следует, что при данной A проекция есть у каждой точки, кроме самой A.

3. Аксиома конечности

В H-пространстве не существует бесконечного множества элементов, каждый из которых перпендикулярен каждому.

Непротиворечивость аксиом и первая модель

Для доказательства непротиворечивости аксиом предложим первую модель H-пространства: произвольное множество и его элементы образуют H-пространство, где отношение H означает «два элемента отличны друг от друга» $H(x, y) \Leftrightarrow x \neq y$. Очевидно выполняется рекурсивная и проекционная аксиомы, а если множество конечно, то выполняется и аксиома конечности. Геометрически это не самое интересное пространство — в нем все элементы перпендикулярны друг другу.

Сейчас мы докажем три простых, но существенных факта, а затем установим, что H-пространство обладает привычной размерностью.

Предложение 2.2. ***(О несуществовании).*** *Для любого элемента X не существует элемента Y, перпендикулярного X и всем элементам X*.*

Доказательство. Докажем от противного, используя лишь нулевую аксиому и простейшую форму диагонального метода. Предположим, что такой Y существует: он перпендикулярен X и потому лежит в X*. Y перпендикулярен всем элементам X* и потому перпендикулярен и сам себе, что невозможно из-за антирефлексивности перпендикулярности. □

Замечание 2.2. Утверждение тривиально обобщается на случай, когда X не элемент, а произвольное множество элементов. В этом случае не существует элемента Y, перпендикулярного всем элементам X и X* одновременно. Другая формулировка утверждения: множества X и X* никогда не пересекаются.

Предложение 2.3. ***(О равенстве).*** *Если элемент B перпендикулярен всем элементам, перпендикулярным A, то A=B.*

[3]Эту аксиому естественно истолковать в терминах «антагонистов» и «коалиции» так: в коалиции обязательно есть антагонисты членов коалиции.

Доказательство. От противного. Предположим, что такой элемент B, отличный от A, существует. В этом случае $\{A, B\}^* = A^* \bigcap B^* = A^*$, так как по предположению A* лежит в B*. По проекционной аксиоме существует элемент C, такой, что C перпендикулярен A и $\{A, B\}^* = \{A, C\}^*$, по предположению $\{A, B\}^* = A^* \bigcap B^* = A^*$, тогда и $\{A, C\}^* = A^*$. Тогда C перпендикулярен A и всем элементам A*, что противоречит доказанному ранее предложению о несуществовании. □

Предложение 2.4. ***(О единственности перпендикуляра).*** *Пусть имеется множество взаимно-перпендикулярных элементов M, такое, что не существует элемента X, перпендикулярного им всем (M* — пусто). Тогда если мы удалим из M произвольный элемент A, то $\{M \setminus A\}^*$ состоит в точности из одного элемента — самого A.*

Доказательство. От противного: предположим, существует отличный от A элемент B, перпендикулярный всем элементам $\{M \setminus A\}$. Тогда $\{M \setminus A\}$ лежит в $\{A, B\}^*$ и по проекционной аксиоме существует элемент C, перпендикулярный A и всем элементам $\{M \setminus A\}$. Элемент C перпендикулярен всем элементам M, но по предположению такого элемента не существует. Противоречие. □

2.3. Размерность H-пространств

Здесь мы докажем, что H-пространство и его подпространства имеют размерность с привычными геометрическими свойствами.

Лемма 2.1. ***(О проекциях).*** *Пусть M – произвольное множество элементов и A — произвольный его элемент. Тогда $M^* = \{A \bigcup M_a\}^*$, где M_a — множество, образованное проекциями всех элементов M, кроме A на A*.*

Доказательство. M* есть пересечение всех m*, где m пробегает все элементы M, это пересечение равно пересечению всех {A, m}*, где m пробегает все элементы M (так как для любого m $\{A, m\}^* = A^* \bigcap m^*$). К каждой паре {A, m}* мы применяем проекционную аксиому, заменяя m на m_a, где m_a есть проекция m на A* и $\{A, m\}^* = \{A, m_a\}^*$, поэтому M* равно пересечению всех $\{A, m_a\}^*$, где m_a пробегает все элементы M_a, а это пересечение равно $\{A \bigcup M_a\}^*$. □

Лемма 2.2. ***(О перпендикулярах к конечному числу элементов).*** *Пусть дано конечное число элементов $A_1, A_2, \ldots A_k$. Тогда существует конечное число взаимно-перпендикулярных элементов B_1, B_2,…,$B_s (s \leq k)$, таких, что $\{A_1, \ldots, A_k\}^* = \{B_1, \ldots, B_s\}^*$.*

Доказательство. Проведем индукцию по k. База индукции имеется: при k=2 доказываемое утверждение совпадает с проекционной аксиомой. При k=1 утверждение лишено смысла. Осуществим, пользуясь леммой о проекциях, индукционный переход. Непосредственно сделать его невозможно, так как среди данных A_i может не быть элемента, перпендикулярного всем остальным. Предположим, что для любого H-пространства утверждение истинно для любого меньшего k числа элементов. По лемме о проекциях, примененной к множеству $M = \{A_1, A_2, \dots A_k\}, M^* = \{A_1, A'_2, \dots A'_k\}^*$, где A'_i – проекция A_i на A_1^*. Рассмотрим A_1^*, по аксиоме рекурсии оно является H-пространством, по индукционному предположению в нем $\{A'_2, \dots A'_k\}^*$ можно представить в виде $\{B_2, \dots B_s\}^*$, где B_i взаимоперпендикулярны и $s \leq k-1$ (неравенство возможно, например, если среди A'_i есть равные элементы). Так как все B_i лежат в A_1^*, т. е. перпендикулярны A_1, то множество $\{A_1, B_2, \dots B_s\}$ и будет искомым множеством взаимных перпендикуляров. □

Замечание 2.3. В построенное конечное множество взаимных перпендикуляров входит один из данных элементов, A_1.

Из леммы о перпендикулярах к конечному числу элементов следует: *Множество элементов, перпендикулярных какому-то конечному числу элементов, является H-пространством.* Доказательство тривиально: пользуясь леммой, мы заменяем данное конечное число элементов на конечное число взаимоперпендикулярных элементов, а затем, пользуясь аксиомой рекурсии, проводим индукцию по числу полученных взаимоперпендикулярных элементов. Обобщим доказанную лемму на данное произвольное множество M (конечное или бесконечное) элементов.

Теорема 2.1. ***(О перпендикулярах ко множеству).*** *Множество всех элементов, перпендикулярных всем элементам произвольного множества M, совпадает с множеством всех перпендикуляров к конечному множеству взаимоперпендикулярных элементов.*

Доказательство. Индукция предыдущего доказательства не применима к бесконечному множеству. Поэтому мы докажем утверждение от противного. Пусть такое множество M существует. Пусть A_1 произвольный элемент M. По проекционной лемме $M^* = \{A_1, M_1\}^*$, где M_1 проекция $M \setminus A_1$ на A_1^*. Если M_1 пусто (M состояло из одного элемента A_1), утверждение доказано, если нет – выберем в M_1 произвольный элемент A_2, такой, что $M^* = \{A_1, A_2, M_2\}^*$, где M_2 — проекция $M_1 \setminus A_2$ на A_2^*

(это возможно по проекционной лемме, примененной к Н-пространству A_1^*). Если M_2 пусто — утверждение доказано. И так далее – если процесс оборвется на k-том шаге из-за того, что M_i пусто, требуемая конечная последовательность взаимных перпендикуляров построена, это множество полученных A_i. Если же процесс никогда не прерывается, то построена бесконечно большая последовательность взаимоперпендикулярных элементов A_i, что противоречит аксиоме конечности. □

Следствие 2.1. *Множество всех элементов, перпендикулярных ко всем элементам любого множества М, является Н-пространством.*

Из аксиомы конечности не следует существование натурального числа N, такого, что в каждом множестве взаимоперпендикулярных элементов не более N элементов. Сейчас мы докажем гораздо более сильное утверждение, позволяющее определить размерность произвольного Н-пространства.

Определение 2.6. Назовем множество элементов X полным, если не существует элемента, перпендикулярного всем элементам X. Или, что то же самое, X* пусто.

Замечание 2.4. Для любого X, X — полное множество в X**.

Замечание 2.5. Геометрически существенен очевидный переход: множество называется полным, если пересечение всех определенных его элементами гиперплоскостей пусто.

Замечание 2.6. Обычно говоря о полноте множества, мы имеем в виду его полноту в объемлющем все элементы Н-пространстве. Но иногда мы имеем в виду какое-то подпространство М, включающее X, и говорим о полноте X, имея в виду, что в М нет элемента, перпендикулярного всем элементам X. Тогда мы будем говорить: X полно в М.

Теорема 2.2. ***(О размерности Н-пространства).*** *Пусть даны два полных множества взаимоперпендикулярных элементов A и B, сами элементы мы обозначаем A_i и B_j. Тогда число элементов в A равно числу элементов в B.*

Доказательство. Пусть в A k элементов, в B — s элементов, и $k \geq s$. Мы докажем, что k=s, ведя индукцию по s, а затем докажем базу индукции.

Индукционный переход

Если в множествах A и B есть общий элемент P, то рассмотрим Н-пространство P*, $\{A \setminus P\}$ и $\{B \setminus P\}$ полны в P* (если бы в P* существовал общий перпендикуляр какого-нибудь из них, то он же был бы общим перпендикуляром и в исходном Н-пространстве). Мощность $B \setminus P$ строго меньше s, индукционный переход осуществлен. Пусть общего элемента у множеств А и В нет, тогда мы построим из В новое множество С, полное и состоящее из взаимных перпендикуляров с числом элементов, не большим s и в которое входит один из элементов множества А.

Выберем в В произвольный элемент, например B_s. В А существует элемент, обозначим его A_1, не перпендикулярный B_s (в противном случае А не будет полным множеством). Рассмотрим множество $B' = \{B \setminus B_s\} \bigcup \{A_1\}$ (мы заменили B_s на A_1). Докажем, что множество В' — полное множество. Это следует из предложения о единственности перпендикуляра. Согласно этому предложению для множества $\{B \setminus B_s\}$ существует единственный элемент B_s, перпендикулярный всем его элементам. По построению B_s не перпендикулярен A_1, следовательно, В'* пусто. В' не состоит из взаимных перпендикуляров, но, по лемме о перпендикулярах к конечному множеству, существует множество С, в которое входит A_1, состоящее из взаимных перпендикуляров, с числом элементов, не большим s и С*=В*=?.

У множеств А и С есть общий элемент A_1, поэтому мы можем рассмотреть Н-пространство A_1^*. В нем лежат множества $\{A \setminus A_1\}$ и $\{C \setminus A_1\}$, каждое из них удовлетворяет условию теоремы, количество элементов в первом равно k-1, во втором $\leq s-1$. Индукционный переход осуществлен.

База индукции устанавливается тривиально. Пусть s=1, это означает, что в В всего один элемент и, так как по предположению В — полное множество, не существует элемента, перпендикулярного В. При формулировке проекционной аксиомы было доказано, что в этом случае все Н-пространство состоит из одного элемента, значит, множество А также включает только этот элемент. □

Определение 2.7. Размерностью Н-пространства мы называем уменьшенное на единицу количество элементов произвольного полного множества взаимно-перпендикулярных элементов Н-пространства.

Из доказанной выше теоремы следует, что размерность не зависит от того, какое именно полное множество взаимных перпендикуляров рассматривается: мощность всех таких множеств одинакова, а из аксиомы конечности следует, что размерность — конечна.

Замечание 2.7. Мы вычитаем единицу, чтобы не получалось, что размерность Н-пространства, состоящего всего из одного элемента (точки), была равна 1, мы привыкли, что размерность такого пространства — 0.

Было доказано, что каждое подпространство является Н-пространством, поэтому каждое подпространство также обладает размерностью, меньшей, чем размерность исходного пространства. Далее мы всюду обозначаем как N — размерность исходного Н-пространства.

Предложение 2.5. ***(О размерности подпространств).*** *Пусть множество M состоит из k взаимных перпендикуляров. Тогда размерность Н-пространства M*=N-k+1, размерность M**=k-1*

Доказательство. Размерность M** на единицу меньше мощности множества лежащих в M** взаимных перпендикуляров, полных в M**, M само является таким множеством, потому M**=k-1. Рассмотрим какую-нибудь полную в M* последовательность взаимоперпендикулярных элементов, пусть их s. Добавим к ней k элементов из M, получим последовательность из s+k взаимоперпендикулярных элементов, по теореме о размерности $s + k - 1 \leq N$, неравенство возможно, так как не доказано, что эта последовательность — полная. Докажем, что имеет место равенство: рассмотрим произвольную полную последовательность взаимоперпендикулярных элементов, включающую M, в ней N+1 элемент, и все элементы, не лежащие в M, лежат в M*, следовательно, существует полная в M* последовательность из N+1-k взаимоперпендикулярных элементов, следовательно, размерность M* равна N-k+1, что и требовалось доказать. □

2.4. Структура подпространств и независимые элементы

Здесь мы покажем, что подпространства имеют естественные геометрические свойства.

Проекционная аксиома гарантирует, что если A и B гиперплоскости, то их пересечение будет гиперплоскостью в A. Сейчас мы докажем теорему о вложении, обобщающую это свойство.

Теорема 2.3. ***(О вложении).*** *Пусть A и B — произвольные подпространства некоторого Н-пространства S. Тогда пересечение A и B будет подпространством в A (разумеется и в B, из-за равноправия переменных). Поясним, в чем проблема: $A \bigcap B$ будет подпространством в S, но элементы в S, перпендикулярные $A \bigcap B$, могли бы не лежать в A, и тогда $A \bigcap B$ не будет подпространством в A. У теоремы есть и другая формулировка: если одно подпространство включает другое, то включаемое будет подпространством во включающем. Поскольку доказательство и использование теоремы о вложении основано на пересечении подпространств, мы и сформулировали ее через пересечение.*

Доказательство. Докажем частный случай: A — гиперплоскость, B — произвольное подпространство. B есть пересечение B_i, где B_i — гиперплоскости. $A \bigcap B_i$ — гиперплоскости в A по проекционной аксиоме. Обозначим их AB_i. Пересечение всех AB_i — некоторое подпространство в A, оно равно $B \bigcap A$, что и требовалось доказать. Теперь докажем индукцией по размерности объемлющего пространства S общий случай, когда A — произвольное подпространство. В начале мы проведем индукционный переход, а потом проверим базу индукции. Пусть A есть пересечение A_i, как и ранее, рассмотрим пересечения A_1 со всеми A_i и B с A_1. Первые — гиперплоскости в A_1 по проекционной аксиоме и их пересечение есть некоторое подпространство в A_1, второе есть подпространство в A_1 — по доказанному выше. Мы осуществили индукционный переход в A_1, пространство меньшей размерности.

База индукции: при размерности 1 все подпространства имеют размерность ноль (т. е. состоят всего из одного элемента) и утверждение тривиально: подпространства либо совпадают, либо не имеют общих элементов. □

Замечание 2.8. Важное следствие теоремы: пусть A произвольное подпространство и M — лежащее в нем множество взаимных перпендикуляров, полное в A. Тогда A=M**. Доказательство: пусть M** не равно A, тогда M** лежит в A и по теореме является подпространством в A. Следовательно, в A существует элемент, перпендикулярный всем элементам M, тогда M не полно в A, что противоречит условию.

Теперь тривиально доказываются:

Предложение 2.6. *Если одно подпространство лежит в другом, то размерность большего подпространства строго больше размерности меньшего (два подпространства одинаковой размерности не могут лежать одно внутри другого).*

В самом деле, из теоремы о вложении следует, что в большем подпространстве есть элемент, перпендикулярный всем элементам меньшего, и, следовательно, размерность большего подпространства, по крайней мере, на единицу больше размерности меньшего.

Предложение 2.7. *Пусть M — произвольное множество элементов H-пространства, добавим к нему произвольный элемент A, тогда размерность $\{M \bigcup A\}^{**}$ не может превышать размерность M^{**} на 2 (размерность либо не меняется, либо возрастает на единицу).*

Это следует из леммы о перпендикулярах к конечному числу элементов: мы заменяем M на конечное множество взаимоперпендикулярных элементов и доказываем индукцией по их числу, аналогично доказательству самой леммы.

Мы определили подпространства через перпендикулярность каким-то элементам. В геометрии принято иначе: мы определяем подпространства через принадлежащие ему элементы, проводим прямые через пару точек, плоскости через точки или прямые и так далее. Покажем, что наша аксиоматика удовлетворяет этим привычным свойствам.

Лемма 2.3. ***(О единственности прямой).*** *Через две различные точки проходит одна и только одна прямая.*

Доказательство. Докажем, что если точка C лежит на прямой, определенной точками A и B, то прямые, определенные парами точек A, C и B, C совпадают с прямой, определенной точками A и B. По проекционной аксиоме существует единственная точка D, лежащая на A*, такая, что AD=AB. Также существует точка D_1 на A*, такая, что $AD_1 = AC$. Поскольку AC по предложению лежит на AB, то D_1 лежит и на AB, и из-за единственности D, $D = D_1$. Следовательно, AC=AD=AB, что и утверждалось. Аналогично доказывается, что AB=BC. Теперь докажем предложение о единственности прямой. Пусть точки C и D лежат на прямой AB, докажем, что CD=AB. Рассмотрим прямую BC. По доказанному AB=BC, тогда D лежит на BC, и по доказанному DC=BC. Следовательно, AB=DC. □

Со всяким множеством точек M связаны два двойственных подпространства: M* и M**. Второе подпространство «перпендикуляров к перпендикулярам», как и в случае с прямой, и будет привычным геометрическим пространством, «проведенным через M», которое мы мыслим обычно вне зависимости от перпендикулярности. Заметим простое и важное свойство подпространства M**, обобщающее сформулированное ранее предложение о принадлежности прямой подпространству.

Предложение 2.8. ***(О минимальности).*** *M** — наименьшее из всех существующих подпространств, включающих M, говоря иначе — M** есть пересечение всех подпространств, включающих M.*

Доказательство. Пусть P — произвольное подпространство, включающее M, тогда P* лежит в M* и тогда M** лежит в P**=P, следовательно, M** содержится во всех подпространствах, включающих M. □

Замечание 2.9. Отсюда, в частности, следует, что если две точки прямой лежат в некотором подпространстве, то и вся прямая лежит в этом подпространстве. Существенно, что в доказательстве мы использовали только нулевую аксиому.

Предложение о минимальности позволяет определить соединение подпространств и гарантирует, что это соединение обладает привычными геометрическими свойствами.

Определение 2.8. Соединением[4] подпространств A и B мы называем подпространство $C = \{A \bigcup B\}^{**}$ и обозначаем C как $A \bigvee B$. Из предложения о минимальности сразу следует, что C — наименьшее из всех подпространств, включающих A и B. Понятие соединения обобщает проведение прямой по двум точкам, плоскости по прямой и точке, плоскости или 3-мерного пространства через две прямые.

Замечание 2.10. Цепочка равенств $\{A \bigcup B\}^{**} = \{A^* \bigcap B^*\}^* = (A^* \bigwedge B^*)^* = A \bigvee B$, где последнее есть просто данное выше определение, приводит к форме логического закона де Моргана, связывающего отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию, где операция двойственности играет роль отрицания. В следующем разделе мы рассмотрим важные следствия из этого факта и обобщим этот закон для перпендикулярных подпространств.

Замечание 2.11. Из теоремы о вложении следует, что если A, B, C — подпространства, и B лежит в A, то существует C, поэлементно перпендикулярное B, такое, что $C \bigvee B = A$.

Теорема 2.4. ***(О дополнении).*** *Пусть A подпространство и подпространство B лежит в A. Тогда существует подпространство C, лежащее в A, такое, что все элементы C перпендикулярны всем элементам B и $C \bigvee B = A$. Мы называем C дополняющим B в A подпространством.*

Доказательство. Мы построим искомое подпространство C. Возьмем в B полное множество взаимных перпендикуляров, обозначим его B_1, по теореме о вложении это множество можно дополнить до полного в A множества взаимных перпендикуляров, обозначим дополнение как A_1. A_1^{**} и будет искомым подпространством, что также следует из теоремы о вложении и замечаний к ней. □

[4]Здесь мы установили связь с теорией решеток и орторешеток [2]. В ней одновременно с соединением $\bigvee$ определяют $\bigwedge$ — наибольшее подпространство, содержащееся и в A, и в B. В нашем случае это пересечение подпространств A и B.

Замечание 2.12. Теорема о дополнении уточняет теорему о вложении и обобщает проекционную аксиому[5].

В геометрии важную роль играет понятие линейной независимости элементов (обычно говорят о независимости векторов). С помощью перпендикулярности независимость выражается так:

Определение 2.9. независимых элементов и множеств. Элементы какого-либо множества A называются независимыми (а само множество независимым), если не существует его подмножества A_1, такого, что $A^* = A_1^*$. В противном случае A называется зависимым.

Проверяя независимость, обычно ищется не A_1, а его дополнение, если множество A зависимо, то найдется такой элемент B, который можно убрать из A, но при этом $\{A \setminus B\}^* = A^*$. В этом случае элемент B называется зависимым от $\{A \setminus B\}$. Геометрически это означает, что если произвольный элемент X перпендикулярен всем элементам A, кроме, может быть, B, то X перпендикулярен и B. Иначе говоря, в зависимом множестве обязательно найдется элемент, который лежит во всех подпространствах, включающих все элементы множества, кроме него самого. Любое множество взаимоперпендикулярных элементов — независимо. Поэтому в пространстве размерности N существует N+1 независимых элементов.

Замечание 2.13. Из определения сразу следует, что если во множестве A есть зависимое подмножество, то и само множество A — зависимо, также A зависимо, если в нем есть равные элементы.

В этом случае устанавливается связь с теорией матроидов[6].

Лемма 2.4. ***(О независимых проекциях).*** *Если множество элементов M, включающее A, независимо, то множество M_a проекций всех его элементов, кроме A элементов на A*, — независимо (в A*).*

Доказательство. Предположим M_a — зависимое множество, тогда в нем существует подмножество M_{a_1}, такое, что $M_{a_1}^* = M_a^*$, добавим к обоим множествам A, $\{A \bigcup M_a\}^* = M^*$ по лемме о проекциях, $\{A \bigcup M_{a_1}\}^* = \{A^* \bigcap M_{a_1}^*\} = \{A^* \bigcap M_a^*\}$ по предположению, а последнее равно M*. Теперь рассмотрим множество M_1, состоящее из прообразов

[5]Как и проекционная аксиома, эта теорема может быть сформулирована терминами теории игр о коалициях и антагонистах.

[6]Определение независимых элементов тесно связано с понятием матроида. Одно из определений матроида и его роль для геометрии есть в [3], матроидом Н-пространства будет множество всех независимых множеств.

элементов M_{a_1} и элемента A, оно является подмножеством M и по проекционной лемме $M_1^* = \{A \bigcup M_{a_1}\}^*$, что, как было доказано, равно M*. Итак $M_1^* = M^*$, и если M_a — зависимое множество, то и M — зависимое множество. □

Лемма 2.5. ***(О независимости и размерности).*** *В H-пространстве размерности N не существует независимого множества более чем из N+1 элементов.*

Доказательство. Докажем, что минимальное подпространство, включающее N+1 независимых элементов имеет размерность не менее N. Перенумеруем произвольно независимые элементы: $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$. Обозначим M_i как объединение первых i элементов. Так как элементы независимы, то M_{i+1} включает M_i и не равно ему. По доказанным ранее «тривиальным предложениям» следует, что с возрастанием i на единицу размерность M_i^{**} также возрастает на единицу, так как размерность подпространства, состоящего из одного элемента, равна нулю, то требуемое доказано. Формулировка леммы тем самым доказана от противного. □

Отсюда следует завершающее раздел:

Предложение 2.9. ***(О структуре подпространств).*** *Каждое подпространство размерности k порождается k+1 независимыми элементами. Каждое независимое множество из k элементов порождает подпространство размерности k-1. Если все элементы независимого множества M из k элементов лежат в подпространстве A размерности k-1, то M порождает A.*

Переходя от элементов к определенным ими гиперплоскостям, мы получим: *любые k гиперплоскости в H-пространстве размерности k имеют непустое пересечение* (в противном случае мы бы имели полное множество из k элементов в пространстве размерности k, что невозможно).

Мы доказали, что рассматриваемые аксиомы определяют подпространства, структура которых аналогична структуре подпространств линейного пространства, роль независимых векторов играют независимые элементы. При каком условии H-пространство является проективным пространством, мы укажем далее.

Есть интересные утверждения о независимых элементах, например: если во множестве A есть подмножество A_1, такое, что $A^* = A_1^*$, то обязательно найдется какое-то другое подмножество A_2, такое, что $A^* = A_2^*$. Мы не будем их доказывать здесь.

3. Перпендикулярность подпространств и законы де Моргана (со штрихом Шеффера)

Вся представленная аксиоматика основана на перпендикулярности элементов. Как определить перпендикулярность подпространств? Ниже мы это сделаем и покажем связь логических законов де Моргана и перпендикулярности подпространств. Напомним, закон де Моргана для конъюнкции и дизъюнкции имеет вид:

$\neg(A \bigvee B) = (\neg A) \bigwedge (\neg B)$

$\neg(A \bigwedge B) = (\neg A) \bigvee (\neg B)$,

где A и B — произвольные высказывания. Мы будем использовать его и в таком виде:

$(\neg A \bigvee \neg B) = \neg(A \bigwedge B)$.

Ранее мы определили соединение подпространств A и B: $A \bigvee B = (A^* \bigcap B^*)^*$, чтобы подчеркнуть структурное совпадение с первым законом де Моргана, запишем это равенство в виде: $(A \bigvee B)^* = A^* \bigcap B^*$. Мы видим полное совпадение с законом де Моргана: операция двойственности * выполняет роль отрицания, соединение подпространств $\bigvee$ играет роль дизъюнкции, пересечение подпространств $\bigcap$ играет роль конъюнкции. В теории решеток и часто во многомерной геометрии пересечение подпространств обозначают не $\bigcap$, а $\bigwedge$, и тогда совпадение с законом де Моргана наглядней. В дальнейшем мы будем обозначать так же. Заметим, что двойственное к двойственному подпространство совпадает с исходным, как и двойное отрицание совпадает с утверждением.

3.1. Перпендикулярность непересекающихся подпространств и штрих Шеффера

Мы представляем перпендикулярные подпространства пересекающимися, но удобней в начале определить перпендикулярность непересекающихся подпространств.

Определение 3.1. Непересекающися подпространства A и B называются перпендикулярными, если каждый элемент A перпендикулярен каждому элементу B.

Замечание 3.1. Из-за симметричности отношения H следует и симметричность отношения перпендикулярности подпространств: в этом случае и каждый элемент B перпендикулярен каждому элементу A. Частный случай перпендикулярных пространств — двойственные пространства.

Замечание 3.2. Если A перпендикулярно B, то это равносильно тому, что A лежит в B* и B лежит в A*. Это прямо следует из определений.

Замечание 3.3. Если два подпространства перпендикулярны, то все их подпространства также перпендикулярны между собой.

Теперь вместо *операции* двойственности мы имеем *отношение* между подпространствами. Чтобы найти этому соответствие в логике, вместо операции отрицания надо рассмотреть отношение между высказываниями, которое называется штрих Шеффера и обозначается |. Для высказываний A и B A|B означает, что A и B несовместимы, т. е. они не могут быть истинны единовременно: из A следует не B или, равносильно — из B следует не A (штрих Шеффера симметричен). Аналог законов де Моргана для штриха Шеффера требует введения новых переменных. Раньше мы писали «не A», теперь мы выражаем более общую ситуацию. Если A|C и B|D, то $(A \bigvee B)|(C \bigwedge D)$ — это логическое тождество и есть нужный нам для геометрии аналог закона де Моргана. Поскольку отрицание $A = \neg C$ и $B = \neg D$ есть частный случай отношения несовместности, то закон де Моргана также есть частный случай приведенной формулы. Заметим, что в импликацию A|C и B|D $\Rightarrow$ $(A \bigvee B)|(C \bigwedge D)$ пары несовместимых переменных (A, C) и (B, D) входят одинаково и внутри каждой пары переменные можно менять местами. Можно сформулировать потому этот закон, назовем его законом де Моргана и Шеффера, хотя, полагаю, само тождество было известно и до них, так:

Если есть две пары несовместимых высказываний, то конъюнкция любого высказывания первой пары с любым высказыванием второй пары несовместима с дизъюнкцией двух оставшихся элементов пар.

Заметим, что не только переменные в парах можно менять местами в этой формулировке закона де Моргана и Шеффера, но и слова «конъюнкция» и «дизъюнкция». Мы покажем, что аналогичный закон выполняется и для подпространств: вместо несовместимости высказываний надо говорить о перпендикулярности подпространств, а вместо конъюнкции и дизъюнкции — о соединении и пересечении.

Пусть подпространства A и C перпендикулярны, подпространства B и D перпендикулярны, в смысле данного выше определения, которое мы расширим в следующем разделе. Тогда соединение A и B перпендикулярно пересечению C и D. Или: *Если есть две пары перпендикулярных подпространств, то соединение любого члена первой пары с* *любым членом второй пары перпендикулярно пересечению оставшихся членов пар.* Закон де Моргана и Шеффера переносится в геометрию дословно.

Доказательство: применим данное выше определение перпендикулярности и данное в предыдущем разделе определение соединения подпространств: Пусть $C \le A^*$ и $D \le B^*$ утверждается, что тогда $(A \bigvee B)^* \ge (C \bigwedge D)$. По условию $(C \bigwedge D) \le (A^* \bigwedge B^*) = (A \bigvee B)^*$, что и требовалось доказать. Фактически здесь мы имеем дело с переформулировкой определения соединения. Заметим, что данное доказательство использует только нулевую аксиому, и потому утверждение верно для любого симметричного и антирефлексивного отношения H.

Замечание 3.4. Среди подпространств A, B, C, D могут быть совпадающие, например при A=C получим: если A перпендикулярно B и D, то A перпендикулярно и соединению и пересечению B и D.

Предложение 3.1. ***(О дистрибутивности)***[7]**.** *Пусть подпространство A, перпендикулярно подпространствам B и C, тогда* $A \bigvee (B \bigwedge C) = (A \bigvee B) \bigwedge (A \bigvee C)$.

Напомним: здесь, как и всюду ранее, перпендикулярные пространства предполагаются непересекающимися.

Доказательство. Доказательство легко проводится рассмотрением полных множеств взаимных перпендикуляров в A, B и C и их соединениях и пересечениях. В начале мы рассматриваем такое множество в $B \bigwedge C$, затем добавляем к нему такое множество в A — так мы получаем множество взаимных перпендикуляров, полное в подпространстве $A \bigvee (B \bigwedge C)$, оно лежит и будет полным также в $(A \bigvee B) \bigwedge (A \bigvee C)$, следовательно, два этих подпространства совпадают. □

3.2. Перпендикулярность пересекающихся подпространств

Есть два подхода к определению перпендикулярности пересекающихся подпространств. Один подход прямо строит пересекающиеся подпространства из непересекающихся. Пусть есть три взаимно-перпендикулярных (в смысле данного ранее определения) подпространства A, B, C. Тогда любые две пары соединений этих подпространств, например $A \bigvee B$ и $B \bigvee C$ — мы также назовем перпендикулярными. Эти пространства пересекаются в B. Второй подход более нагляден. Можно назвать

[7] Дистрибутивность для некоторых элементов решетки часто вводится в само определение разных типов решеток, например, так определяются орторешетки в [2, 6, 7]. О роли дистрибутивности для квантовой логики говорится в [9].

подпространство B перпендикулярным подпространству A, если проекция B на A совпадает с пересечением A и B. Но мы не давали точного определения проекции подпространств (хотя это и нетрудно), поэтому сформулируем немного иначе. B перпендикулярно A, если B равно соединению своих пересечений с A и A*. При этом надо доказать симметричность определенной так перпендикулярности. Это и равносильность обоих названных подходов мы докажем, используя лемму.

Лемма 3.1. *Если $B = (A^* \bigwedge B) \bigvee (A \bigwedge B)$, то A и B представимы в виде соединений трех взаимоперпендикулярных подпространств, как было описано выше.*

Доказательство. Укажем два из этих подпространств: $A \bigwedge B = P_1$, $A^* \bigwedge B = P_2$. P_1 и P_2 лежат в двух перпендикулярных подпространствах A и A* и потому перпендикулярны друг другу, что и требовалось. Третьим подпространством мы можем взять подпространство P_3, перпендикулярно дополняющее P_1 до A, существование которого доказано в теореме о дополнении. По построению P_3 перпендикулярно P_1 и лежит в A, следовательно P_3 перпендикулярно и P_2 (P_2 лежит в A*). $P_3 \bigvee P_1 = A$ по построению, $P_2 \bigvee P_1 = B$ по предположению, тем самым мы представили A и B в виде соединения взаимоперпендикулярных подпространств. □

Обратное предложение:

Пусть $P_1 \bigvee P_2 = A, P_2 \bigvee P_3 = B$ и P_1, P_2, P_3 взаимоперпендикулярны, тогда $B = (A^* \bigwedge B) \bigvee (A \bigwedge B)$.

Доказательство. $A \bigwedge B \geq P_2$ (на самом деле, имеет место равенство) $A^* \bigwedge B = (P_1 \bigvee P_2)^* \bigwedge (P_2 \bigvee P_3) = (P_1^* \bigwedge P_2^*) \bigwedge (P_2 \bigvee P_3)$. $(P_1^* \bigwedge P_2^*) \geq P_3$ (из-за перпендикулярности), следовательно, все выражение также $\geq P_3$, следовательно, $(A^* \bigwedge B) \bigvee (A \bigwedge B) \geq P_2 \bigvee P_3 = B$. Неравенство невозможно, так как левое выражение не может быть больше B. □

Определение 3.2. Подпространство A, перпендикулярное подпространству B (где A и B, возможно, пересекаются), называется перпендикулярным, если $B = (A^* \bigwedge B) \bigvee (A \bigwedge B)$.

Замечание 3.5. Из доказанного выше следует симметричность перпендикулярности: если A перпендикулярно B, то и B перпендикулярно A.

Замечание 3.6. Это определение включает в себя случай инцидентности подпространств A и B, потому надо или исключить, специально оговорив, это, либо включить в число перпендикулярных подпространств. Мы считаем это частным, особым случаем перпендикулярности.

Замечание 3.7. Если А перпендикулярно В, то и А* перпендикулярно В.

3.3. Закон де Моргана и Шеффера для двух пар перпендикулярных подпространств

Здесь перпендикулярность подпространств мы рассматриваем в соответствии с последним определением, подходящим и для пересекающихся подпространств. Поэтому легко указывать зримые геометрические примеры. Через школьную теорему о перпендикулярах мы и придем к общей формулировке этого закона в геометрии. Пусть нам требуется опустить перпендикуляр из точки А на плоскость S в трехмерном пространстве. Для этого мы берем две пересекающиеся прямые В и С на плоскости, опустим перпендикуляры из А на эти прямые, в их основании будут точки A_1 и A_2 соответственно. Проведем из них лежащие в плоскости S перпендикуляры: В' из A_1 к В и С' из A_2 к С. Пересечение этих перпендикуляров, а оно есть, так как В и С выбраны не параллельными, и будет основанием перпендикуляра из А на S. Обозначим это пересечение S_1. Теорема общеизвестна, и мы ее не доказываем.

Мы ее переформулируем. Проведем через А плоскость P_1, перпендикулярную В, в ней лежат все перпендикуляры к В, проходящие через A_1 и плоскость P_2, перпендикулярную С, в ней лежат все перпендикуляры к С, проходящие через A_2, следовательно, точка S_1 лежит на прямой пересечения P_1 и P_2, и, по сформулированной теореме, прямая пересечения P_1 и P_2 перпендикулярна S. Теперь заметим, что S мы можем трактовать как соединение прямых В и С и точку А мы можем мыслить произвольной: прямая пересечения плоскостей, перпендикулярных данным прямым В и С, перпендикулярна плоскости, в которой лежат В и С. В такой формулировке точка А отсутствует, и именно эта формулировка связывает геометрию и логику. Для удобства мы переобозначим прямые и плоскости.

Закон де Моргана и Шеффера в трехмерном случае:

Пусть прямая A перпендикулярна плоскости C, прямая B перпендикулярна плоскости D. Тогда $A \bigvee B$ перпендикулярна (или инцидентна) $C \bigwedge D$.

Замечание 3.8. Если А и В пересекаются, то мы получаем только что разобранный геометрический случай. Если А и В скрещиваются, то $A \bigvee B$ — все пространство, $C \bigwedge D$ — прямая, лежащая в этом пространстве — имеет место инцидентность. Если А и В параллельны, то их соединение — плоскость, а $C \bigwedge D$ — или пусто, и мы можем формально говорить про инцидентность, или $C = D = C \bigwedge D$ и перпендикулярна $A \bigvee B$, что и утверждается. Таким образом, утверждение верно во всех случаях. Уже в трехмерном случае буквальный перенос закона де Моргана и Шеффера невозможен: подпространства в двух перпендикулярных парах не могут быть произвольны. Если C и D не плоскости, а прямые, перпендикулярные пересекающимся прямым A и B соответственно, то утверждение неверно: плоскость, в которой лежат A и B, не будет перпендикулярна или инцидентна точке пересечения (если она есть) прямых C и D. Нужно потребовать еще одно условие: $A \bigvee C = B \bigvee D$, или двойственно $A \bigwedge C = B \bigwedge D$. В разобранном ранее случае выполнялось первое условие, а для случая перпендикулярных непересекающихся подпространств выполнялось второе — пересечением было $\varnothing$.

Теорема 3.1. ***Закон де Моргана и Шеффера для произвольного H-пространства.***

Пусть даны две пары перпендикулярных подпространств. При этом или соединение элементов одной пары равно соединению элементов другой, или пересечение элементов одной пары равно пересечению элементов другой. Тогда соединение произвольного подпространства одной пары с произвольным подпространством другой пары перпендикулярно (или инцидентно) пересечению оставшихся подпространств пар[8]*. Коротко:*

Если $A \perp C$ *и* $B \perp D$ *и или* $A \bigvee C = B \bigvee D$*, или* $A \bigwedge C = B \bigwedge D$*, то* $(A \bigvee B) \perp (C \bigwedge D)$

Доказательство. Мы докажем второй случай. Из принципа двойственности (определения соединения подпространств) тогда будет следовать первый. Случай $A \bigwedge C = B \bigwedge D = \varnothing$ был рассмотрен при обсуждении непересекающихся подпространств. Пусть $A \bigwedge C = B \bigwedge D = P > \varnothing$. Существуют подпространства A_1, C_1, B_1, D_1, перпендикулярные P и не пересекающиеся с P, такие, что $P \bigvee A_1 = A$, $P \bigvee B_1 = B$, $P \bigvee C_1 = C$, $P \bigvee D_1 = D$ и A_1 перпендикулярно C_1, B_1 перпендикулярно D_1. Это следует из рассмотренного выше определения перпендикулярности через три взаимно-перпендикулярных непересекающихся подпространств, мы представили пару перпендикулярных подпространств A и C через A_1, C_1 и $P = A \bigwedge C$ тоже и для второй пары. Так как A_1 и C_1, B_1 и D_1 перпендикулярны по построению и пересечения $A_1 \bigcap C_1, B_1 \bigcap D_1$ пусты, то выполняется закон де Моргана и Шеффера для непересекающихся подпространств и $A_1 \bigvee B_1$ перпендикулярно $C_1 \bigwedge D_1$. При этом

[8] Эта теорема верна и в евклидовом многомерном пространстве, и в многомерном пространстве Лобачевского, и в эллиптическом многомерном пространстве. Мы полагаем, что она верна в любом пространстве постоянной кривизны.

P перпендикулярно обоим подпространствам: и соединению, и пересечению. Но тогда соединения P с этими подпространствами перпендикулярны друг другу: $P\bigvee(A_1\bigvee B_1)$ перпендикулярно $P(C_1\bigwedge D_1)$. Левая часть очевидно равна $P\bigvee A_1\bigvee B_1=A\bigvee B$, правая часть равна $C\bigwedge D$ по свойству дистрибутивности[9]. □

4. Проективное пространство и разбиения на пары

То, что Н-пространство похоже на многомерное проективное пространство, видно из исследованной в разделе 2 структуры подпространств. Но уже первый пример Н-пространства (конечное множество, где отношение Н означает различие элементов) показывает, что не всякое Н-пространство является проективным пространством. Сейчас мы выясним, при каком условии Н-пространство необходимо является проективным пространством. Затем мы покажем, какую роль в определении проективной геометрии играют разбиения четырех элементов на пары подобно тому, как это происходит в законе де Моргана и Шеффера.

Напомним аксиому Веблена (см. [1]).

Аксиома Веблена:

Даны четыре различные точки в пространстве. Разобьем их каким-либо способом на пары, если прямые, проведенные через эти пары точек пересекаются, то пересекаются прямые, проведенные через пары точек при любом другом разбиении на пары[10].

Теперь докажем теорему.

[9]В [9] утверждается, что с математической точки зрения квантовая логика является теорией орторешеток. Мы полагаем, что выявленная связь Н-пространств, многомерных пространств и законов де Моргана показывает, что Н-пространства также являются примером квантовой логики, где отношение Н означает несовместимость высказываний. Уточнение этого требует отдельной статьи.

[10]Приведем примеры из наглядной геометрии аналогичных утверждений о разбиении на пары четырех объектов тремя разными способами. Пусть на плоскости даны 4 попарно пересекающихся окружностей, разобъем их произвольно на пары, тогда если точки пересечения первой пары окружностей лежат на одной окружности с точками пересечения окружностей второй пары, то это будет иметь место и при любом разбиении данных четырех окружностей на пары. Пусть даны четыре попарно пересекающиеся плоскости в пространстве, если при каком-то разбиении их на пары прямые пересечения плоскостей в парах лежат в одной плоскости, то это происходит при любом разбиении на пары. Оба примера легко обобщаются до сфер и гиперплоскостей в многомерном пространстве.

Теорема 4.1. *Н-пространство удовлетворяет аксиоме Веблена.*

Доказательство. Назовем двумерное Н-пространство плоскостью. По доказанным свойствам подпространств любые две лежащие в плоскости прямые пересекаются на ней (на плоскости прямые являются гиперплоскостями, так как определяются одним элементом, а в двумерном Н-пространстве не может быть полного множества из двух элементов). Две пересекающиеся прямые лежат в плоскости $\{A, B, C\}^{**}$, где А – точка пересечения прямых, В и С — произвольные точки на прямых. Прямые, пересекающиеся с данными и не проходящие через А (о каких и идет речь в аксиоме Веблена), также лежат в этой плоскости (поскольку имеют с плоскостью две общие точки), следовательно, пересекаются между собой. □

Теорема 4.2. *Если в Н-пространстве размерности, большей 1, на каждой прямой существует хотя бы три точки, то Н-пространство является либо проективным пространством над телом, либо проективной плоскостью.*

Доказательство прямо следует из теоремы Веблена-Юнга (см. [1]).

Замечание 4.1. Свойство прямых содержать, по крайней мере, три точки в [1] называется «насыщенностью» (thick). Поскольку мы определяем инцидентность через перпендикулярность, то свойства прямых, имеющих всего две точки, можно исследовать через отношение Н, например, из проекционной аксиомы сразу следует, что если на прямой всего два элемента, то они необходимо перпендикулярны друг другу.

Теперь мы укажем, как основные свойства проективного пространства выражаются через разбиение на пары четырех точек. Мы переосмыслим таким образом две аксиомы проективного пространства (см., как и ранее, [1]).

1. Через две точки проходит одна и только одна прямая (мы доказывали это свойство в теореме о единственности прямой).

2. Аксиома Веблена, утверждающая, что если две прямые пересекаются с двумя другими пересекающимися прямыми и никакие три из этой четверки не проходят через одну точку, то две первые прямые — также пересекаются.

Аксиому Веблена выше мы уже сформулировали таким образом. Сформулируем аналогично утверждение о единственности прямой (в литературе мы чаще встречаем его в виде «прямые не могут пересекаться в двух точках»).

Аксиома о единственности прямой:

Даны четыре различные точки в пространстве. Разобьем их каким-либо образом на пары. Если две точки одной пары лежат на прямой, определенной другой парой, то при любом разбиении данных точек на пары прямая, определенная первой парой, проходит через обе точки второй пары.

Используя введенные в 2.1 обозначения, запишем два утверждения:

Даны четыре различных элемента A, B, C, D

1. *Если* $\{A, B\}^* \leq \{C, D\}^*$, *то* $\{B, C\}^* = \{A, D\}^*$.

Перестановками переменных отсюда сразу выводится утверждение о единственности прямой.

2. Если $\{A, B\}^{**} \bigcap \{C, D\}^{**} > \varnothing$, *то* $\{A, C\}^{**} \bigcap \{B, D\}^{**} > \varnothing$.

Выше мы записали «Н-языком» аксиому Веблена. На этих двух утверждениях также можно базировать аксиоматику «пространства с перпендикулярностью». При этом не было бы нужды ни в проекционной, ни в рекурсивной аксиоме и конечность или бесконечномерность пространства не играли бы роли. Но было бы трудней исследовать структуру подпространств.

5. Примеры отношения Н: прямые, отрезки, окружности, кривые, топология

Здесь мы применим конструкцию из раздела 2.1, где определены двойственность и подпространства на основе отношения Н к различным структурам. Из всех аксиом раздела 2.2 у нас остается только симметричное и антирефлексивное отношение Н. Мы увидим, что Н-методология, основанная на склеенной связи Галуа (см. прим. 1), подходит для выражения многих геометрических и топологических явлений. Во всех примерах отношение Н будет означать тот факт, что рассматриваемые объекты пересекаются. Наш обзор будет очень беглым, а в разделе 5.3 очень и очень беглым.

5.1. Пересечение окружностей

Рассмотрим С, множество всех окружностей конформной плоскости. В этом случае некоторые свойства Н-пространств выполняются. Например, верна теорема единственности: если все окружности, пересекающие окружность А, пересекают и В, то А и В совпадают. Доказательство ясно, но зависит от того, считаем ли мы точки окружностями (нулевого радиуса). Если считаем и считаем, что окружность «пересекает» лежащую на ней точку, то равенство А и В следует из того, что В проходит через три точки, лежащие на А, утверждение следует. Если же не считаем, то мы можем рассмотреть не три точки, а три последовательности окружностей, стремящихся к трем точкам, лежащим на A, таким, что A пересекает все эти окружности. По предположению, B также пересекает все эти окружности и потому совпадает с A.

Какое подпространство («прямую») создают A и B? В этом подпространстве лежат все окружности, пересекающие все окружности, пересекающие A и B. Легко видеть, что если A и B пересекаются, то $\{A, B\}^{**} = \varnothing$, или $H(A, B) \Rightarrow \{A, B\}^{**} = \varnothing$. Проекционная аксиома H-пространств, напротив, утверждает, что всякая прямая содержит элементы, находящиеся в отношении H. Если A и B не имеют общих точек (случай касания не будем рассматривать), то любая окружность, разделяющая A и B пересекает всякую окружность, пересекающую A и B. Пусть окружности C и D лежат на прямой {A, B}**. Легко геометрически убедиться, что в этом случае {C, D}** лежит в {A, B}**, как и в H-пространстве, но равенство этих прямых возникает, если окружности C и D совпадают с окружностями A и B. Итак, если C и D пересекаются, то прямая, заданная ими, — пуста, если нет — это совокупность окружностей, разделяющих их. А что можно сказать про {A, B, C}**? Для любых трех окружностей существует окружность, пересекающая их, поэтому {A, B, C}* никогда не пусто. Если мы считаем точки частным случаем окружности, то возможно, что такая окружность единственна. Если среди окружностей есть пара, не имеющая общих точек, то всякая окружность, разделяющая их, лежит в {A, B, C}**. Это верно и для произвольного числа окружностей. Если же мы рассматриваем 4 или больше окружностей, то определенное ими подпространство может быть пустым, соотвественно, {A, B, C, D}** может совпадать с множеством всех окружностей на конформной плоскости. Рассмотрим пересечение «прямых». $\{A, B\}^{**} \bigcap \{C, D\}^{**}$ не пусто, если существует окружность, разделяющая A и B, C и D. Это возможно, множество таких окружностей требует отдельного геометрического изучения. Интересно, что пересечение трех прямых: $\{A, B\}^{**} \bigcap \{A, C\}^{**} \bigcap \{B, C\}^{**}$, всегда пусто, так как для любых трех окружностей не существует окружности, разделяющей любые две из них. Но в общем случае пересечение трех прямых может быть не пусто. Понятно, что эти построения можно обобщить на сферы в многомерном пространстве. Интересно их обобщить и на окружности в трехмерном пространстве, а в качестве отношения H выбрать прохождение одной окружности через другую (зацепление).

5.2. Пересечение отрезков Рассмотрим отрезки на евклидовой плоскости. Как и в предыдущем случае, верна теорема единственности: если все отрезки, пересекающие A, пересекают и B, то отрезки A и B совпадают, доказательство аналогично. Как устроена «прямая», т. е.

множество {A, B}**? Мы разберем только один случай: когда отрезки A и B — противоположные стороны выпуклого четырехугольника. Пусть концы первого отрезка A_1 и A_2, второго B_1 и B_2. Пусть четырехугольник $A_1A_2B_2B_1$ выпуклый. Тогда $\{A_1A_2, B_1B_2\}^{**} = \{A_1B_1, A_2B_2\}^*$, доказательство этого равенства — простое упражнение, мы приводим его, чтобы показать — H-конструкция способна выражать геометрические соотношения и в этом случае.

5.3. Замкнутые фигуры и непрерывные кривые

Интересны различные топологические применения H-конструкции. Рассмотрим в начале множество непрерывных замкнутых кривых, на плоскости или сфере и образованные отношением пересечения подпространства. Чтобы избежать неожиданностей, потребуем, чтобы эти кривые были дифференцируемы, и не будем рассматривать пары касающихся кривых. Также не будем рассматривать пары кривых с совпадающими кусками. Тогда теорема единственности снова будет верна. Так же как и в случае окружностей — «прямой», определенной двумя такими кривыми A и B, будет множество кривых, разделяющих данные A и B. При этом если мы будем рассматривать и самопересекающиеся кривые, то «прямая», определенная двумя пересекающимися кривыми, может быть не пуста.

Теперь рассмотрим замкнутые односвязные фигуры (тела) в трехмерном пространстве. При этом будем называть тела пересекающимися только в том случае, когда у них есть общие точки и ни одно тело не лежит внутри другого. Тогда теорема единственности, мы полагаем, равносильна утверждению: замкнутые тела с совпадающей границей совпадают. Мы не знаем, верно ли это. Если одно тело разделяет два данных, то оно лежит на «прямой», порожденной данными телами. Разумеется, как и вслучае с окружностями в трехмерном пространстве — интересно трактовать с этой точки зрения заузливание или зацепление кривых и тел.

6. Развитие геометрии перпендикулярного

Здесь мы будем писать в основном про H-пространства, удовлетворяющие аксиоме насыщенности (о том, что на каждой прямой есть, по крайней мере, три точки). Как доказано в разделе 4, в этом случае H-пространство размерности, большей 2, является проективным пространством над некоторым телом. Поэтому в таком H-пространстве можно ввести систему координат. Но если мы будем делать это, следуя, например, [1], мы «потеряем» отношение H и, полагаем, упустим многие геометрически существенные явления. Например, как известно, тело, над которым существует проективное пространство, является полем тогда и только тогда, когда в проективном пространстве (на каждой его плоскости) выполняется теорема Паппа. В нашем же случае, мы полагаем, теорема о пересечении высот треугольника, сформулированная в терминах отношения H, окажется необходимым и достаточным условием того, что тело, над которым существует H-пространство, является полем. Отметим, что для того, чтобы формулировка теоремы о высотах была содержательна, необходимо, чтобы на прямых было не менее трех точек. Также мы полагаем, что, используя отношение H, можно различными способами вводить понятие симметрии в насыщенном H-пространстве и в дальнейшем использовать методы Бахмана [4].

Интересно также исследовать вскрытые в разделе 3 связи геометрии перпендикулярного и логики. Мы полагаем, что эти исследования можно проводить методами орторешеток, неатомарных орторешеток. В отличие от общеизвестного подхода мы определяем структуру решетки на основании отношения перпендикулярности,что как, мы полагаем, дает больше возможности для геометрической интуиции и аналогий.

7. Благодарности

Я благодарю В. П. Одинца за неуклонный интерес к темам геометрии перпендикулярного и полезные стилистические советы и В. А. Рыжика, совместная педагогическая работа с которым помогала мне.

Список литературы

1. **Cameron P. J.** Projective and Polar Spaces, second edition. Sep 2000. http://www.maths.qmul.ac.uk/pjc/pps/ (дата обращения: 17.06.2018).

2. **Биркгоф Г.** Теория решеток. М.: Наука, 1984. 565 с.

3. **Айгнер М.** Комбинаторная теория / пер. с англ. В. В. Ермакова и В. Н. Лямина; под ред. Г. П. Гаврилова. М.: Мир, 1982. 556 с.

4. **Бахман Ф.** Построение геометрии на основе понятия симметрии / пер. с нем. Р. И. Пименова; под ред. И. М. Яглома. М.: Наука, 1969. 380 с.

5. **Пименов Р. И.** Единая аксиоматика пространств с максимальной группой движений // *Литовский матем. сб. 1965. Т. 5. № 3. С. 457–486.*

6. **Maclaren M. D.** Atomic orthocomlemented lattices // *Pacific Journal of Mathematics. Vol. 14, June 1964. Pp. 697–612 (site https://msp.org/pjm/1964/14-2/pjm-v14-n2-p18-p.pdf)*

7. **Norman D.** Megill and Mladen Paviĉí, Hilbert Lattice Equations // *Ann. Henri Poincare 99 (9999), 1–24 1424-0637/99000-0, DOI 10.1007/s00023-003-0000 ©2009 Birkhauser Verlag Basel/Switzerland (site https://bib.irb.hr/datoteka/413891.megill-pavicic-a-henri-p-09r.pdf)*

8. **Одинец В. П.** Об истории некоторых математических методов, используемых при принятии управленческих решений. Сыктывкар: СГУ, 2015. 107 с.

9. **Васюков В. Л.** Квантовая логика. М.: Пер Се, 2005. 191 с.

10. **Tabachnikov S.** Skewers // *Arnold Mathematical Journal. 2. 2016. Pp. 171–193.*

11. **Пименов Р. Р.** Обобщения теоремы Дезарга: геометрия перпендикулярного // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2016. Вып. 1 (21). С. 28–43.*

12. **Пименов Р. Р.** Трактовки теорем Паппа: перпендикулярность и инволютивность // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2 (23). С. 29–45.*

13. **Пименов Р. Р.** Геометрия перпендикулярного: тупые и острые углы в известных теоремах // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 3 (24). С. 56–73.*

Summary

Pimenov R. R. The geometry of perpendicularity: the axiomatic multidimensional space and de Morgan's laws

We propose the short axiomatic for finite dimensional geometrical structure, using only perpendicularity relation. This structure appear projective space in which hold De Morgan's laws. We show the connection work with the Veblen's axiom and with partition four elements to pairs various modes. The research is connected with ortholattice, matroids, Galois connections and quantum logic.

Keywords: the foundation of geometry, perpendicularity, ortholattice, Galois connections, logic, projective space.

References

1. **Cameron P. J.** *Projective and Polar Spaces*, second edition, Sep 2000. http://www.maths.qmul.ac.uk/ pjc/pps/

2. **Birkhoff G.** *Teoriya reshetok* (Lattice Theory), M.: Nauka, 1984, 565 p.

3. **Aigner M.** *Kombinatornaya teoriya* (Combinatorial Theory), M .: Mir, 1982, 556 p.

4. **Bachmann F.** *Postroenie geometrii na osnove ponyatiya simmetrii* (Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff), M.: Nauka, 1969, 380 p.

5. **Pimenov R. I.** Yedinaya aksiomatika prostranstv s maksimal'noy gruppoy dvizheniy (Unified axiomatics of spaces with the maximum group of motions), *Litovsk. Mat. Sb.*, vol. 5, No. 3, 1965, pp. 457–486.

6. **Maclaren M. D.** Atomic orthocomlemented lattices, *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 14, June 1964, pp. 697–612 (site https://msp.org/pjm/1964/14-2/pjm-v14-n2-p18-p.pdf)

7. **Norman D.** Megill and Mladen Paviĉí, *Hilbert Lattice Equations*, Ann. Henri Poincare 99 (9999), 1–24 1424-0637/99000-0, DOI 10.1007/s00023-003-0000 ©2009 Birkhauser Verlag Basel/Switzerland (site https: //bib.irb.hr/datoteka/413891.megill-pavicic-a-henri-p-09r.pdf)

8. **Odyniec W. P.** *Ob istorii nekotorykh matematicheskikh metodov, ispol'zuyemykh pri prinyatii upravlencheskikh resheniy* (Upon the history of some mathematical methods, which use for the taking a steering decision), Syktywkar: SGU, 2015, 107 p.

9. **Vasukov V. L.** *Kvantovaya logika* (Quantum logic), M.: Per Se, 2005, 191 p.

10. **Tabachnikov S.** Skewers, *Arnold Mathematical Journal*, 2, 2016, pp. 171–193.

11. **Pimenov R. R.** Obobshcheniya teoremy Dezarga: geometriya perpendikulyarnogo (The generalization the Desargues's theorem and geometry of perpendicularity), *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2016, 1 (21), pp. 28–43.

12. **Pimenov R. R.** Traktovki teorem Pappa: perpendikulyarnost' i involyutivnost' (The interpretation and generalizations the Pappus's theorems: involutions and perpendicularity), *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, 2 (23), pp. 29–45.

13. **Pimenov R. R.** Geometriya perpendikulyarnogo: tupyye i ostryye ugly v izvestnykh teoremakh (The geometry of perpendicularity: obtuse and acutes angles in known theorems), *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, 3 (24), pp. 56–73.

Для цитирования: Пименов Р. Р. Геометрия перпендикулярного: аксиоматика многомерного пространства и законы де Моргана // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 2 (27). С. 40–70.*

For citation: Pimenov R. R. The geometry of perpendicularity: the axiomatic multidimensional space and de Morgan's laws, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2018, 2 (27), pp. 40–70.

Санкт-Петербургский национальный исследовательский академический университет

Поступила 17.06.2018