

МАТЕМАТИКА

*Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 2 (27). 2018*

УДК 530.145, 512.81

КВАНТОВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ И КОНТРАКЦИИ АЛГЕБР ЛИ¹

И. В. Костяков, В. В. Куратов

Указана связь неунитарных преобразований Крауса матрицы плотности кубита с теорией контракций $su(2)$ алгебры Ли. Продемонстрировано использование контракционных конструкций для описания квантовых каналов.

Ключевые слова: контракции алгебр Ли, квантовые каналы, кубит.

Квантовые преобразования описывают унитарную и неунитарную эволюцию квантовых систем универсальным способом с помощью набора операторов Крауса $\{E_k\}$

$$\rho' = \sum_k E_k \rho E_k^+, \quad \sum_k E_k E_k^+ = 1, \quad (1)$$

где ρ — матрица плотности.

Такое представление операторной суммой имеет существенно дискретный характер, поскольку связывает только начальное и конечное состояния системы без использования временной переменной.

Квантовые преобразования, называемые также квантовыми каналами, интенсивно используются в быстроразвивающейся теории квантовых вычислений [1, 2], основным объектом которой является квантовое обобщение бита — кубит, простейшая двухуровневая квантовая система, главная составляющая квантового компьютера.

В данной работе мы демонстрируем связь неунитарных квантовых преобразований кубита с некоторыми конструкциями теории контракций алгебр Ли.

¹Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект №18-1-1-7.

Матрица плотности кубита $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \in \mathbb{C}^2$ задается элементами алгебры Ли $u(2)$

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(1 + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x+iy \\ x-iy & 1-z \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, σ_i — матрицы Паули

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку состояние чистое, то $\det \rho = 0 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и геометрически матрицу плотности ρ можно реализовать вектором \vec{r} на сфере Блоха.

Можно показать, что преобразования Крауса (1) вектора \vec{r} задаются аффинным отображением [3]

$$\vec{r} \rightarrow M \cdot \vec{r} + \vec{c}, \quad (3)$$

где M — действительная матрица, представимая в виде произведения $M = O \cdot S$, O — ортогональная, а S — симметрическая матрица. Ортогональная матрица описывает унитарную эволюцию, сохраняющую сферу Блоха, а симметрическая — неунитарные процессы измерения, квантовый шум, эволюцию открытых систем. После диагонализации матрицы S , преобразование (3) может быть записано как

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline c_1 & \lambda_1 & \cdot & \cdot \\ c_2 & \cdot & \lambda_2 & \cdot \\ c_3 & \cdot & \cdot & \lambda_3 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (4)$$

и при некоторых дополнительных уточняющих вычислениях [3] приводится к виду

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_1 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \lambda_2 & \cdot \\ c_3(\lambda_i) & \cdot & \cdot & \lambda_1 \lambda_2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (5)$$

который и привел к идее написания этой статьи. Дело в том, что аффинное преобразование (3), а также матрицы (4) и (5) естественно появляются в теории контракций алгебр Ли.

Напомним, что алгеброй Ли называется векторное пространство V с антисимметричной билинейной операцией $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$, удовлетворяющей тождеству Якоби

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0.$$

Введем преобразования контракций как семейство линейных изоморфизмов алгебры Ли $\mathcal{E}(\varepsilon_i) : V \rightarrow V$, где $\varepsilon_i \in (0, 1]$ — некоторые параметры. Например, коммутационные соотношения алгебры $su(2)$

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z, \quad [\sigma_y, \sigma_z] = 2i\sigma_x, \quad [\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y$$

допускают следующие преобразования генераторов [4], сохраняющие тождество Якоби для коммутаторов:

$$\mathcal{E}(\varepsilon_i) : \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_2 & \\ & & \varepsilon_1\varepsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \mathcal{E}(\varepsilon_i)\vec{\sigma}, \quad (6)$$

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z, \quad [\sigma_y, \sigma_z] = 2i\varepsilon_1^2\sigma_x, \quad [\sigma_z, \sigma_x] = 2i\varepsilon_2^2\sigma_y. \quad (7)$$

Возможны преобразования генераторов вида

$$\mathcal{E}(\varepsilon_i) = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \quad (8)$$

как в (4), и более общие недиагональные преобразования Салетана [6]. При устремлении к нулю параметров ε_i , если существует предел

$$\lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0} \mathcal{E}^{-1}(\varepsilon_i)[\mathcal{E}(\varepsilon_i) \cdot A, \mathcal{E}(\varepsilon_i) \cdot B] = [A, B], \quad (9)$$

получаются коммутаторы новых, неизоморфных исходной, алгебр Ли. Данная процедура называется контракцией и была определена в [5] как предел непрерывного сингулярного преобразования алгебр Ли. Позже было показано, что заменой ε_i на дуальные числа с нильпотентными свойствами $\iota_1^2 = \iota_2^2 = 0$ можно определить контракцию без предельного перехода [4]. Преобразования контракции \mathcal{E} приобретают при этом схожий с (1) дискретный характер. Сравнивая (4),(5) и (6), приходим к выводу, что преобразования Крауса, соответствующие симметрической части матрицы M , можно интерпретировать как преобразования контракции элемента алгебры Ли ρ

$$\rho \rightarrow \rho' = \frac{1}{2}(1 + \vec{r} \cdot \mathcal{E}(\varepsilon_i)\vec{\sigma}) = \frac{1}{2}(1 + \mathcal{E}(\varepsilon_i)\vec{r} \cdot \vec{\sigma}) = \mathcal{E}(\rho), \quad (10)$$

где мы ввели обозначение $\mathcal{E}(\rho) : \rho \rightarrow \rho'$. Таким образом, используя различные преобразования контракции, мы получаем простое описание неунитарных операторных сумм Крауса. Отметим, что, пока мы не устремили ε к нулю, вращательная симметрия $su(2)$ системы не меняется, а при $\varepsilon = 0$ мы переходим к матрице плотности с новой симметрией.

Рассмотрим некоторые важные примеры однопараметрических преобразований Крауса и найдем их реализации на языке контракций. Определим набор $\{E_k\}$ с матрицами

$$E_0 = \sqrt{p_1} I, \quad E_x = \sqrt{p_2} \sigma_x, \quad E_y = \sqrt{p_2} \sigma_y, \quad E_z = \sqrt{p_2} \sigma_z,$$

$$p_1 + p_2 = 1, \quad p_1 - p_2 = \varepsilon.$$

Канал с *переворотом фазы* описывается преобразованиями Крауса с матрицами E_0 и E_z :

$$\rho \rightarrow \rho' = E_0 \rho E_0^\dagger + E_z \rho E_z^\dagger = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & \varepsilon(x+iy) \\ \varepsilon(x-iy) & 1-z \end{pmatrix} = \mathcal{E}(\rho), \quad (11)$$

и отображает чистое состояние, которому соответствует вектор (x, y, z) на сфере Блоха в смешанное состояние исходного состояния с вероятностью p_1 и состояния, которому соответствует вектор $(-x, -y, z)$ с вероятностью p_2 . Сфера Блоха при этом деформируется, как показано на рис. 1.

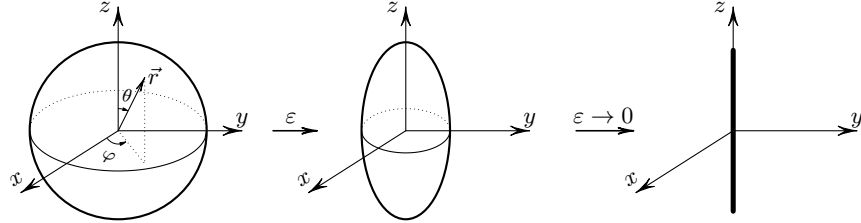


Рис. 1. Деформация сферы Блоха в канале с переворотом фазы

Результирующую матрицу ρ' в (11) можно представить как преобразование контракции с $\mathcal{E} = \text{diag}(\varepsilon, \varepsilon, 1)$, $\mathcal{E}(x, y, z) \rightarrow (\varepsilon x, \varepsilon y, z)$, $\mathcal{E}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \rightarrow (\varepsilon \sigma_x, \varepsilon \sigma_y, \sigma_z)$. Предел $\varepsilon \rightarrow 0$ дает алгебру Евклида и состояния

$$\rho' = \frac{1+z}{2} |0\rangle\langle 0| + \frac{1-z}{2} |1\rangle\langle 1|,$$

описываемые векторами $\vec{r} = (0, 0, z)$, $z \in [-1, 1]$, не меняющимися при преобразованиях Евклида в плоскости (x, y) .

Канал с классической ошибкой

$$\rho' = E_0 \rho E_0^+ + E_x \rho E_x^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon z & x + i\varepsilon y \\ x - i\varepsilon y & 1 - \varepsilon z \end{pmatrix} = \mathcal{E}(\rho) \quad (12)$$

отображает чистое состояние (x, y, z) на сфере Блоха в смешанное состояние исходного вектора с вероятностью p_1 и состояния, которому соответствует вектор $(x, -y, -z)$ с вероятностью p_2 . Соответствующее преобразование контракции задается матрицей $\mathcal{E} = \text{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon)$, $\mathcal{E}(x, y, z) \rightarrow (x, \varepsilon y, \varepsilon z)$, $\mathcal{E}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \rightarrow (\sigma_x, \varepsilon \sigma_y, \varepsilon \sigma_z)$.

Канал с фазовой ошибкой

$$\rho' = E_0 \rho E_0^+ + E_y \rho E_y^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon z & \varepsilon x + iy \\ \varepsilon x - iy & 1 - \varepsilon z \end{pmatrix} = \mathcal{E}(\rho) \quad (13)$$

отображает чистое состояние (x, y, z) в смешанное состояние исходного вектора с вероятностью p_1 и состояния, которому соответствует вектор $(-x, y, -z)$ с вероятностью p_2 . Соответствующее преобразование контракции задается матрицей $\mathcal{E} = \text{diag}(\varepsilon, 1, \varepsilon)$, $\mathcal{E}(x, y, z) \rightarrow (\varepsilon x, y, \varepsilon z)$, $\mathcal{E}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \rightarrow (\varepsilon \sigma_x, \sigma_y, \varepsilon \sigma_z)$.

Все три канала связаны циклическими перестановками и комбинаторно эквивалентны, однако их физический смысл различен [1].

Деполаризующий канал преобразует кубит следующим образом:

$$\rho' = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon)\mathbb{I} + \varepsilon\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon z & \varepsilon x + i\varepsilon y \\ \varepsilon x - i\varepsilon y & 1 - \varepsilon z \end{pmatrix} = \mathcal{E}(\rho), \quad (14)$$

сжимая сферу Блоха равномерно со всех сторон (рис. 2).

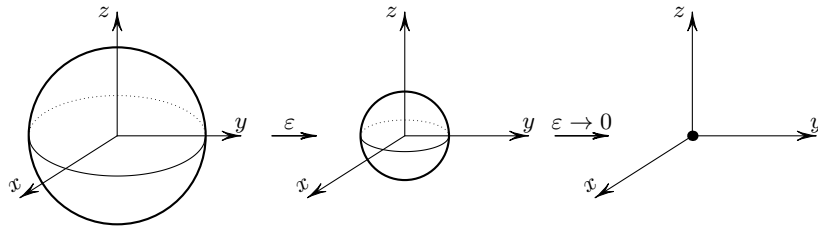


Рис. 2. Деполаризующий канал

Это квантовое отображение чистого состояния, которому соответствует вектор (x, y, z) на сфере Блоха в смешанное состояние исходного вектора с вероятностью $1 - \varepsilon$ и состояния, которому соответствует

вектор $(-x, -y, -z)$ с вероятностью ε . Соответствующее преобразование контракций $\mathcal{E} = \text{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$, $\mathcal{E}(x, y, z) \rightarrow (\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon z)$. В этом случае устремление $\varepsilon \rightarrow 0$ дает трехмерную абелеву алгебру Ли и описывает полностью деполяризованное состояние $\rho = \frac{1}{2}$. Преобразования Крауса в этом случае выглядят так:

$$E_0 = \sqrt{p_0}1, \quad E_1 = \sqrt{p_1}\sigma_x, \quad E_2 = \sqrt{p_2}\sigma_y, \quad E_3 = \sqrt{p_3}\sigma_z, \\ p_0 = \frac{1}{4}(1 + 3\varepsilon), \quad p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{4}(1 - \varepsilon).$$

Трехпараметрическое преобразование контракции $\mathcal{E} = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ определяет канал

$$\rho' = \mathcal{E}(\rho) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_3 z & \varepsilon_1 x + i\varepsilon_2 y \\ \varepsilon_1 x - i\varepsilon_2 y & 1 - \varepsilon_3 z \end{pmatrix}, \quad (15)$$

сжимающий сферу Блоха неравномерным образом, и задает преобразования Крауса:

$$E_0 = \sqrt{p_0}1, \quad E_1 = \sqrt{p_1}\sigma_x, \quad E_2 = \sqrt{p_2}\sigma_y, \quad E_3 = \sqrt{p_3}\sigma_z, \\ p_0 = \frac{1}{4}(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3), \quad p_1 = \frac{1}{4}(1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3), \\ p_2 = \frac{1}{4}(1 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3), \quad p_3 = \frac{1}{4}(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Таким образом, теория контракций снабжает нас адекватным языком описания неунитарного сектора квантовых преобразований. Интересно применить контрактционные методы к кутриту, матрица плотности которого принадлежит алгебре $u(3)$.

Список литературы

1. **Нильсен М. А., Чанг И. Л.** Квантовые вычисления и квантовая информация. М.: Мир, 2006. 824 с.
2. **Прескилл Дж.** Квантовая информация и квантовые вычисления. Ижевск: РХД, 2008, 2011. Т. 1-2. 464+312 с.
3. **Ruskai M. B., Szarek S., Werner E.** An Analysis of Completely-Positive Trace-Preserving Maps on 2x2 Matrices // *Lin. Alg. Appl.* V. 347, 2002. Pp. 159–187. *ArXiv:quant-ph/0101003*.
4. **Громов Н. А.** Контракции классических и квантовых групп. М.: Физматлит; РАН, 2012. 318 с.

5. **Inönü E., Wigner E. P.** On the Contraction of Groups and Their Representations // *Proc. Nat. Acad. Sci. V. 39. Iss. 6. Pp. 510–524. 1953.*
6. **Saletan E. J.** Contraction of Lie groups // *J. Math. Phys. V. 2. Iss. 1. 1961. Pp. 1–21.*

Summary

Kostyakov I. V., Kuratov V. V. Quantum computations and contractions of Lie algebras

The connection between the nonunitary Kraus transformations of the qubit density matrix with contraction theory of the $su(2)$ Lie algebra is pointed. The use of contraction constructions is demonstrated.

Keywords: contractions of Lie algebras, quantum channels, qubit.

References

1. **Nielsen M. A., Chuang I. L.** Kvantovyye vychisleniya i kvantovaya informatsiya (Quantum Computation and Quantum Information), *Cambridge University Press*, 2010, 676 p.
2. **Preskill J.** *Kvantovaya informatsiya i kvantovyye vychisleniya* (Lecture Notes for Physics 229:Quantum Information and Computation), Izhevsk: RKHD, 2008, 2011, t. 1–2, 464+312 p.
3. **Ruskai M. B., Szarek S., Werner E.** An Analysis of Completely-Positive Trace-Preserving Maps on 2×2 Matrices, *Lin. Alg. Appl.*, vol. 347, 2002, pp. 159–187. ArXiv:quant-ph/0101003.
4. **Gromov N. A.** *Kontraktsii klassicheskikh i kvantovykh grupp* (Contractions of classical and quantum groups), M.: Fizmatlit, 2012, 318 p.
5. **Inönü E., Wigner E. P.** On the Contraction of Groups and Their Representations, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol. 39, iss. 6, pp. 510–524, 1953.
6. **Saletan E. J.** Contraction of Lie groups, *J. Math. Phys.*, vol. 2, iss. 1, 1961, pp. 1–21.

Для цитирования: Костяков И. В., Куратов В. В. Квантовые вычисления и контракции алгебр Ли // *Вестник Сыктывкарского*

университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 2 (27). С. 32–39.

For citation: Kostyakov I. V., Kuratov V. V. Quantum computations and contractions of Lie algebras, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2018, 2 (27), pp. 32–39.

ФМИ Коми НЦ УрО РАН

Поступила 22.05.2018