ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 2 (27). 2018

УДК 004.272.32

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В УСЛОВИЯХ СИММЕТРИИ

А. Ю. Казаков

В работе рассматривается применение операционного исчисления для решения смешанных краевых задач с уравнением $T_t = a^2\Delta T$. Решения получены в виде традиционных для этого класса задач функциональных рядов Фурье.

Ключевые слова: преобразование Лапласа, уравнение теплопроводности, вычеты.

При решении смешанных краевых задач для разнообразных линейных уравнений, возникающих в математической физике, одним из методов является применение интегральных преобразований, позволяющих уменьшать размерность независимых переменных. Ведущую роль здесь играет преобразование Фурье в силу симметричности со своим обратным преобразованием. Реже используются также его различные модификации или преобразование Лапласа. Во многих учебниках по операционному исчислению рассматриваются прежде всего примеры применения преобразования Лапласа при решении обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и их систем. В данной работе этот подход реализуется при рассмотрении смешанных краевых задач для уравнений теплопроводности, аналогичных тем, что рассмотрены в [6, гл. VI]. Строгое обоснование применённых методов к подобным задачам дано в [7].

Постановка задачи

Процессы распространения тепла в теле описываются хорошо известным уравнением теплопереноса: $c\rho T_t = div(\varkappa gradT) + Q$. В нашей модели мы не учитываем внутренние источники тепла ($Q = 0$).

Рассмотрим сначала смешанную краевую задачу для однородного изотропного сферически-симметричного тела, представляющего из себя разность концентрических шаров радиусов R и R_1. Будем поддерживать на внутренней поверхности тела температуру окружающей среды, которую оно изначально имело, а через внешнюю сферу передаём тепло, сохраняя на ней некую большую постоянную температуру T_1 [2, с. 52]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad T|_{t=0} \equiv T_0, \ T|_{r=R_1} \equiv T_0, \ T|_{r=R} \equiv T_1 > T_0.$$

Здесь a^2 – отношение произведения удельной теплоёмкости материала и плотности к коэффициенту теплопроводности.

В этом случае мы можем, сделав простую замену, перейти к более удобной для решения формулировке задачи:

$$v(t,r) = r\,(T - T_0) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \quad v|_{t=0} \equiv 0, \ v|_{r=R_1} \equiv 0, \ v|_{r=R} \equiv R(T_1 - T_0) = m \ (t > 0).$$

Применение преобразования Лаплпаса

Решаем нашу смешанную краевую задачу методами операционного исчисления.

$$v(t,r) \div U(p,r) \ \Rightarrow \ \frac{\partial v}{\partial t} \div pU, \ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \div \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}; \ U|_{r=R_1} \equiv 0, \ U|_{r=R} = \frac{m}{p}.$$

Находим общее решение получившегося обыкновенного дифференциального уравнения, а затем подставляем соответствующие краевые условия:

$$p = \lambda^2 a^2 \ \Rightarrow \ U(p,r) = C_1\, e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} r} + C_2\, e^{\frac{\sqrt{p}}{a} r};$$

$$\begin{cases} C_1\, e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} R_1} + C_2\, e^{\frac{\sqrt{p}}{a} R_1} = 0, \\ C_1\, e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} R} + C_2\, e^{\frac{\sqrt{p}}{a} R} = \frac{m}{p}. \end{cases}$$

Таким образом, изображение при преобразовании Лапласа имеет вид:

$$U(p,r) = \frac{m}{p} \, \frac{e^{\frac{R+r}{a}\sqrt{p}} - e^{\frac{2R_1+R-r}{a}\sqrt{p}}}{e^{\frac{2R}{a}\sqrt{p}} - e^{\frac{2R_1}{a}\sqrt{p}}}.$$

Функция $U(p,r)$ аналитическая на $p \in \mathrm{C}$, с разрезом по отрицательной полуоси, имеющей полюса

$$p_n = \frac{-a^2 \pi^2 n^2}{(R - R_1)^2}, \ n \in \{0\} \cup \mathrm{N},$$

и точку разветвления $p = 0$. Для таких функций обратное преобразование Лапласа находится по формуле:

$$v(t,r) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname*{res}_{p_n} \left(e^{pt}\, U(p,r) \right) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} e^{pt}\, U(p,r)\, dp,$$

где γ – контур, обходимый против часовой стрелки, состоящий из нижнего края разреза: $p = \rho e^{-i\pi}$, окружности маленького радиуса: $p = \varepsilon e^{-i\varphi}$, и верхнего края: $p = \rho e^{i\pi}$.

Вычисление вычетов

Для нахождения вычетов представим $U(p,r)$ в виде отношения:

$$\frac{m\left(e^{\frac{R+r}{a}\sqrt{p}} - e^{\frac{2R_1+R-r}{a}\sqrt{p}}\right)}{p\left(e^{\frac{2R}{a}\sqrt{p}} - e^{\frac{2R_1}{a}\sqrt{p}}\right)} = \frac{X(p,r)}{Y(p,r)},$$

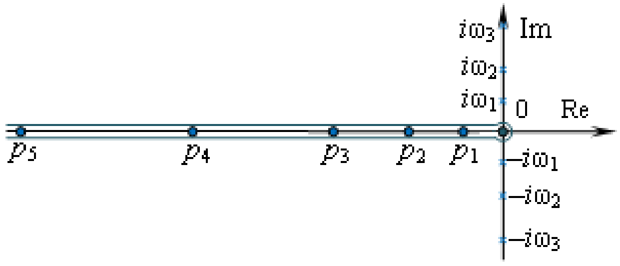

Рис. 1. Особенности

$$\frac{\partial Y}{\partial p} = e^{\frac{2R}{a}\sqrt{p}} - e^{\frac{2R_1}{a}\sqrt{p}} + \frac{p}{a\sqrt{p}}\left(R\, e^{\frac{2R}{a}\sqrt{p}} - R_1\, e^{\frac{2R_1}{a}\sqrt{p}}\right).$$

Вычет в точке $p = 0$ считается как предел:

$$lim_{p\to 0}\frac{X(p,r)}{Y'_p(p,r)} = lim_{p\to 0}\frac{m\left(e^{\frac{R+r}{a}\sqrt{p}} - e^{\frac{2R_1+R-r}{a}\sqrt{p}}\right)}{e^{\frac{2R}{a}\sqrt{p}} - e^{\frac{2R_1}{a}\sqrt{p}} + \frac{\sqrt{p}}{a}\left(R\, e^{\frac{2R}{a}\sqrt{p}} - R_1\, e^{\frac{2R_1}{a}\sqrt{p}}\right)} -$$

это неопределённость, которая раскрывается с использованием формулы: $e^{\alpha} \sim 1 + \alpha,\ \alpha \to 0$.

В остальных вычетах, полагая $\sqrt{p}_n = \pm i\omega_n$, запишем (по аналогии с [3, с. 369]):

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X(p_n,r)}{Y'_p(p_n,r)}e^{-\omega_n^2 t} =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m\,\left(e^{\frac{R+r}{R-R_1}\pi in}-e^{\frac{2R_1+R-r}{R-R_1}\pi in}\right)}{\frac{\pi in}{R-R_1}\left(R\,e^{\frac{2R}{R-R_1}\pi in}-R_1\,e^{\frac{2R_1}{R-R_1}\pi in}\right)}\,e^{\frac{-a^2\pi^2n^2t}{(R-R_1)^2}}.$$

Подставляем сюда выражения:

$$\cos\frac{R+r}{R-R_1}\pi n\;-\;\cos\frac{2R_1+R-r}{R-R_1}\pi n+$$

$$+i\left(\sin\frac{R+r}{R-R_1}\pi n-\sin\frac{2R_1+R-r}{R-R_1}\pi n\right)=$$

$$=2\,\sin\frac{R_1+R}{R-R_1}\pi n\,\sin\frac{R_1-r}{R-R_1}\pi n+2i\,\sin\frac{r-R_1}{R-R_1}\pi n\,\cos\frac{R_1+R}{R-R_1}\pi n,$$

$$R\,\cos\frac{2R}{R-R_1}\pi n-R_1\,\cos\frac{2R_1}{R-R_1}\pi n+$$

$$+i\left(\sin\frac{2R}{R-R_1}\pi n-R_1\,\sin\frac{2R_1}{R-R_1}\pi n\right),$$

применим формулу:

$$\frac{a+b\,i}{c+d\,i}=\frac{ac+bd+i\,(bc-ad)}{c^2+d^2},$$

где $c^2+d^2=(R-R_1)^2,\ ac+bd=2\ (R-R_1)\ \left(\sin\dfrac{r-R_1}{R-R_1}\pi n\right)\ \cos\pi n.$

Окончательно имеем формулу для решения ($H(t)$ – функция Хевисайда):

$$v(t,r)=\left(m\frac{r-R_1}{R-R_1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2m(-1)^n}{\pi n}\sin\left(\frac{r-R_1}{R-R_1}\pi n\right)e^{\frac{-a^2\pi^2n^2t}{(R-R_1)^2}}\right)\,H(t).$$

Этот результат можно было бы получить, применяя метод Фурье разделения переменных. Считается [1], что к методу Фурье удобнее прибегать в случае однородных граничных условий, а к операционному исчислению — в случае нулевых начальных.

Графическая иллюстрация решения

При построении графика функции, $u(t_*,r)=\frac{v(t_*,r)}{r}$, отличающейся от T только постоянным слагаемым T_0, возьмём $a=0,5,\ r\in[1;\,2]$. Довольно быстро решение приходит к стационарному, являющемуся дробно-линейной функцией от r (рис. 2):

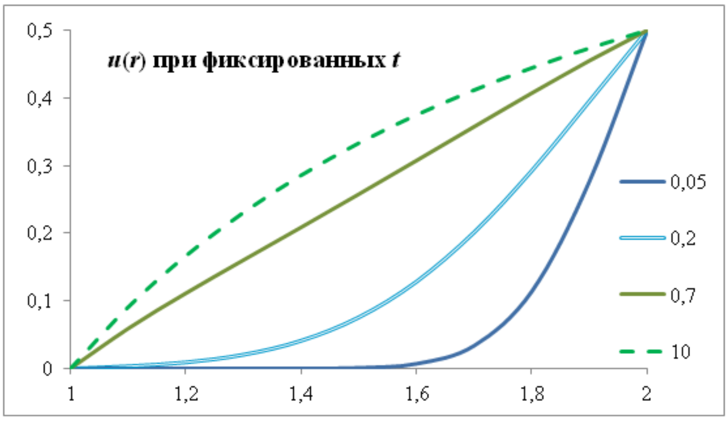

Рис. 2. График

Пример решения задачи для бесконечного цилиндра

Проиллюстрируем изложенный выше подход для решения смешанной краевой задачи внутри однородного бесконечного кругового цилиндра радиусом R, на границе которого задан постоянный тепловой поток. Положим для простоты начальные условия нулевыми:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} \right),$$

$$T|_{t=0} \equiv 0,\ T|_{r=0} - \text{ограничено},\ \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R} \equiv q - \text{const}.$$

Нашей дифференциальной задаче соответствует операторная задача:

$$pU = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} \right), \quad T|_{r=0} - \text{ограничено},\ \left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{q}{p}.$$

Замена независимой переменной приведёт полученное дифференциальное уравнение к уравнению Бесселя, решением краевой задачи для которого является

$$U(p,r) = \frac{-iqa}{p\sqrt{p}} \frac{J_0\left(-ir\sqrt{p}/a\right)}{J_1\left(-iR\sqrt{p}/a\right)}.$$

Используя свойства функций Бесселя (см., например, [4]), видим, что, помимо $p = 0$, эта функция имеет счётное число особенностей, и, следовательно, решение нашей задачи, так же как и предыдущей, будет представлено в виде ряда.

Исследуя особенность в нуле, разложим наше изображение в ряд Лорана:

$$U(p,r) = qa\,\frac{1+\frac{r^2}{4a^2}p+\ldots}{\frac{R}{2a}p^2+\frac{R^3}{16a^3}p^3+\ldots} = c_{-2}p^{-2}+c_{-1}p^{-1}+\ldots,$$

коэффициенты которого при отрицательных степенях находятся методом неопределённых коэффициентов:

$$c_{-2} = \frac{2a^2q}{R},\ c_{-1} = \frac{q\left(2r^2-R^2\right)}{4R}.$$

Для $p_n \neq 0$, зануляющих $J_1\left(-iR\sqrt{p}/a\right)$ и выражающихся через положительные корни $\mu_n^{(1)}$ функции J_1, вычеты считаем, вычисляя выражение

$$\frac{X(p,r)}{Y_p'(p,r)} = \frac{-iqa}{p_n\sqrt{p_n}}\,\frac{J_0\left(-ir\sqrt{p_n}/a\right)}{J_1'\left(-iR\sqrt{p_n}/a\right)\,\left(-iR/\left(2a\sqrt{p_n}\right)\right)} =$$

$$= \frac{2qR}{\left(\mu_n^{(1)}\right)^2}\,\frac{J_0\left(\mu_n^{(1)}r/R\right)}{J_1'\left(\mu_n^{(1)}\right)}.$$

В итоге сделав обратное преобразование Лапласа, получим решение $T(t,r)$ в виде

$$\left(\frac{2a^2qt}{R}+\frac{q\left(2r^2-R^2\right)}{4R}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2qR}{\left(\mu_n^{(1)}\right)^2}\,\frac{J_0\left(\mu_n^{(1)}r/R\right)}{J_0\left(\mu_n^{(1)}\right)}\,e^{-a^2\left(\mu_n^{(1)}\right)^2 t/R}\right)\,H(t).$$

Этот результат получен традиционным методом Фурье в [5, с. 161—163], причём решение более длинное.

Ни о каком стационарном распределении температуры в данной модели, разумеется, речи не идёт: система не замкнута, через границу постоянно поступает тепло, так что решение здесь будет не ограничено.

Список литературы

1. **Араманович И. Г., Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э.** Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. 2-е изд. М.: Наука, 1968. 416 с.

2. **Беляева Н. А.** Математическое моделирование : учебное пособие. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского госуниверситета, 2014. 116 с.

3. **Боярчук А. К., Головач Г. П.** Справочное пособие по высшей математике. Т. 5. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. М.: УРСС, 1999. 384 с.

4. **Кошляков Н. С. и др.** Уравнения в частных производных математической физики : учебное пособие для мех.-мат. фак. ун-тов. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.: ил.

5. **Боголюбов А. Н., Кравцов В. В.** Задачи по математической физике : учебное пособие. М.: Изд-во МГУ, 1998. 350 с.

6. **Карлслоу Х., Егер Дж.** Операционные методы в прикладной математике. М.: ИЛ, 1948. 294 с.

7. **Дёч Г.** Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.: ил.

Summary

Kazakov A. Yu. Exact solution of the heat equation under symmetry conditions

The paper considers the application of operational calculus to solve two initial-boundary value problems with the equation $T_t = a^2 \Delta T$ in areas with cylindrical and spherical symmetry. The solutions are obtained in the form of the traditional Fourier functional series problems for this class.
Keywords: Laplace transformation, heat conduction equation, residues.

References

1. **Aramanovich I. G., Luntz G. L., Elsholz L. E.** *Funktsii kompleksnogo peremennogo. Operatsyonnoye ischislenie. Teoriya ustoychivosti* (Functions of a complex va-riable. Operational calculus. Stability theory). M.: Nauka, 1968. Ed. 2nd, 416 p.

2. **Belyaeva N. A.** *Matematicheskoe modelirovanie: uchebnoe posobie* (Mathematical modeling: tutorial). Syktyvkar: Publishing house of Syktyvkar state University, 2014. 116 p.

3. **Boyarchuk A. K., Golovach G. P.** *Spravochnoe posobie po vysshey matematike. Tom 5. Differentsyalnye uravneniya v primerakh I zadachakh.* (Handbook on higher mathematics. Volume 5. Differential equations in examples and problems). M.: URSS, 1999. 384 p.

4. **Koshlyakov N. S. and others.** *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matemati-cheskoy fiziki. Uchebnoe posobie dlya mech.-mat. fak. un-tov* (Partial differential equations of mathematical physics. Tutorial for mechanics and mathematics faculties of universities). M.: Vysshaya shkola, 1970. 712 p.

5. **Bogolyubov A. N., Kravtsov V. V.** *Zadachi po matematicheskoy fizike: Ucheb. posobie* (Tasks in mathematical physics: tutorial). M.: Publishing house of Mos-cow state University, 1998. 350 p.

6. **Carslaw H. S., Jaeger J. S.** *Operatsionnyye metody v prikladnoy matematike* (Operational methods in applied mathematics. M.: IL, 1948. 294 p.

7. **Doetsch G.** *Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniyu preobrazova-niya Laplasa i Z-preobrazovaniya* (A guide to the practical application of Laplace transform and Z-transform). M.: Nauka, 1971. 288 p.

Для цитирования: Казаков А. Ю. Точное решение уравнения теплопроводности в условиях симметрии // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 2 (27). С. 24–31.*

For citation: Kazakov A. Yu. Exact solution of the heat equation under symmetry conditions, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2018, 2 (27), pp. 24–31.

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 07.06.2018*