

УДК 530.1, 514.84

ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР НА ПЛОСКОСТИ МИНКОВСКОГО

Н. А. Громов, В. В. Куратов

Рассмотрена задача о квантовомеханическом поведении гармонического осциллятора на плоскости Минковского с бесконечно высокими потенциальными барьерами на изотропных прямых. Описаны дискретные уровни энергии частицы.

Ключевые слова: плоскость Минковского, уравнение Шредингера, гармонический осциллятор.

Введение

Классическая задача о гармоническом осцилляторе в пространствах с постоянной кривизной и вырожденной метрикой [1] естественно распространяется на описание поведения частицы в пространствах с неопределенной метрикой. В частности, свободная частица на плоскости Минковского демонстрирует наличие дискретных уровней энергии [2], тогда как на евклидовой плоскости она имеет только непрерывный спектр энергий. Бурное развитие нанofизики в последние годы привело к появлению гиперболических метаматериалов [3], свойства которых адекватно описываются в пространствах с псевдоевклидовой метрикой [4]. Это служит дополнительным стимулом для изучения подобных задач.

Следует отметить, что задача о гармоническом осцилляторе в релятивистском пространстве, декартовы координаты которого интерпретируются как время и длина, появляется уже в теории суперструн [5; 6] и обычно называется «релятивистский осциллятор». Он известен достаточно давно и основательно проработан [7]. Уравнение Шредингера на собственные значения обычно решают в декартовых координатах и среди решений убирают «нефизические» (с отрицательной нормой, ненормируемые и т. д.). Мы рассмотрим решение этого уравнения для осциллятора на плоскости Минковского в полярных координатах и получим

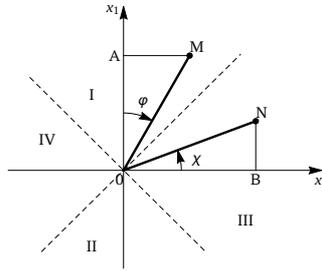


Рис. 1. Полярные координаты $\{r, \varphi\}$ точки M и координаты $\{\rho, \chi\}$ точки N на плоскости Минковского $OM=r$, $ON=\rho$

три решения, которые обычно не упоминаются при решении в декартовых координатах (для $M \neq 0$), и сравним их с результатами работы [7], где показано, что для 1+1 осциллятора лоренц-инвариантными, нормируемыми и с положительной нормой будут только синглетные состояния, которые совпадают с решениями в полярных координатах при $M = 0$.

1. Полярные координаты

Плоскость Минковского – двумерное пространство нулевой кривизны с псевдоевклидовой метрикой $s^2 = x_1^2 - x_2^2$ в декартовых координатах. Декартовы и полярные координаты в областях I ($x_1^2 - x_2^2 > 0$, $x_1 > 0$) и II ($x_1^2 - x_2^2 > 0$, $x_1 < 0$) связаны формулами (см. рис. 1)

$$\begin{cases} x_1 = \pm r \operatorname{ch} \varphi \\ x_2 = \pm r \operatorname{sh} \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tgr} = \sqrt{x_1^2 - x_2^2} > 0, \\ \operatorname{th} \varphi = x_2/x_1, \end{cases} \quad (1)$$

где $r \in [0, \infty)$, $\varphi \in \mathbf{R}$. В областях III ($x_1^2 - x_2^2 < 0$, $x_2 > 0$) и IV ($x_1^2 - x_2^2 < 0$, $x_2 < 0$) вместо мнимого r вводим вещественный радиус $\rho = \sqrt{x_2^2 - x_1^2}$, т.е. $r = i\rho$, и новый угол χ , отсчитываемый теперь от оси x_2 и связанный с углом φ соотношением $\varphi = \chi - i\frac{\pi}{2}$, тогда

$$\begin{cases} x_1 = \pm \rho \operatorname{sh} \chi \\ x_2 = \pm \rho \operatorname{ch} \chi, \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x_2^2 - x_1^2} > 0, \\ \operatorname{th} \chi = x_1/x_2, \end{cases} \quad (2)$$

где $\rho \in [0, \infty)$, $\chi \in \mathbf{R}$.

2. Осциллятор в полярных координатах

Гармонический осциллятор на плоскости Минковского представляет собой частный, но важный случай осциллятора на двумерных геометриях Кэли – Клейна [1]. Это квантовомеханическая система с гамильтони-

аном, кинетическая часть которого пропорциональна оператору Бельтрами – Лапласа, а потенциал описывается квадратичной функцией

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}m\omega^2(x_1^2 - x_2^2), \quad (3)$$

изображенной на рис. 2. От стандартной нерелятивистской системы с потенциалом типа «седло» осциллятор на плоскости Минковского отличается псевдоевклидовым характером кинетической части. Уравне-

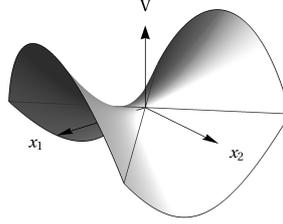


Рис. 2. Потенциал $V(x_1, x_2)$ (3) гармонического осциллятора на плоскости Минковского

ние Шредингера на собственные значения $H\Psi = E\Psi$ в декартовых координатах имеет вид

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2 \right) \Psi(x_1, x_2) - \\ & - \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x_2^2 \right) \Psi(x_1, x_2) = E\Psi(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (4)$$

После перехода к полярным координатам (1),(2) гамильтониан дается выражением

$$H = \begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2, & \text{в областях } I, II, \\ \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \right) - \frac{1}{2}m\omega^2 \rho^2, & \text{в областях } III, IV. \end{cases} \quad (5)$$

Рассмотрим уравнение Шредингера (4) в областях I, II

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \Psi(r, \varphi) + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \Psi(r, \varphi) = E \Psi(r, \varphi). \quad (6)$$

Отметим, что наши формулы совпадают с формулами работы [7], если ввести единицу длины $r_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, тогда $x = \frac{r}{r_0}$, $\lambda = \frac{E}{\hbar\omega}$. Ищем решение уравнения в виде

$$\Psi(r, \varphi) = \frac{u(r)}{\sqrt{r}} e^{iM\varphi}, \quad (7)$$

где параметр M , вообще говоря, может быть как вещественным, так и комплексным числом. Однако при чисто мнимых значениях M состояния системы будут ненормируемыми. Нормировка волновой функции при вещественных значениях $M \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \int |\Psi|^2 r dr d\varphi &= \int_{-\infty}^{+\infty} dr u_{n,M}^*(r) u_{n',M'}(r) \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi e^{i(M-M')\varphi} = \\ &= \delta(M - M') \delta_{nn'} \end{aligned} \quad (8)$$

приводит к условию нормировки на функцию $u_{n,M}(r)$ вида

$$2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dr u_{n,M}^*(r) u_{n',M}(r) = \delta_{nn'}. \quad (9)$$

После подстановки (7) в (6) имеем уравнение

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} r^2 + \frac{M^2 + \frac{1}{4}}{r^2} \right) u(r) = 0, \quad (10)$$

делая в котором замену переменной $y = r^2$, получаем

$$y \frac{d^2 u(y)}{dy^2} + \frac{1}{2} u' + \frac{1}{4} \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} y + \frac{M^2 + \frac{1}{4}}{y} \right) u(y) = 0. \quad (11)$$

Далее перейдем от $u(y)$ к новой функции $f(y)$ с помощью соотношения

$$u = y^{\left(\frac{1}{4} + \frac{iM}{2}\right)} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} y} f(y), \quad (12)$$

тогда (11) перейдет в

$$y \frac{d^2 f(y)}{dy^2} + \left(1 + iM - \frac{m\omega}{\hbar} y\right) \frac{df(y)}{dy} + \frac{m}{2\hbar^2} (E - \hbar\omega(iM + 1)) f(y) = 0. \quad (13)$$

Это вырожденное гипергеометрическое уравнение [8]:

$$z \frac{d^2 f(z)}{dz^2} f'' + (c - z) \frac{df(z)}{dz} - af(z) = 0, \quad (14)$$

где

$$z = \frac{m\omega}{\hbar} y, \quad c = 1 + iM, \quad a = -\frac{1}{2\hbar\omega} (E - \hbar\omega(iM + 1)). \quad (15)$$

Одно из его решений выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию

$$f(z) = F\left(\frac{1 + iM}{2} - \frac{E}{2\hbar\omega}, 1 + iM; z\right), \quad (16)$$

которая определяется рядом

$$F(a, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{(c)_n n!}. \quad (17)$$

Чтобы ряд обрывался, необходимо, чтобы $a = -n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В этом случае уровни энергии осциллятора равны

$$E_{n,M} = \hbar\omega (2n + 1 + iM), \quad (18)$$

а соответствующие волновые функции имеют вид

$$\Psi_{n,M}(r, \varphi) = C_1 r^{iM} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} r^2} F\left(-n, 1 + iM; \frac{m\omega}{\hbar} r^2\right) e^{iM\varphi}, \quad (19)$$

где C_1 — нормировочная константа.

При вещественных $M \neq 0$ состояния (19) интерпретируются как неустойчивые распадные состояния, излучающие в сингулярный центр [9, п. 3.2]. В этой статье потенциал $\sim \frac{\beta^2}{r^2}$ трактуется как негравитационная черная дыра. При мнимых $M \neq 0$ получаются ненормируемые состояния, примеры которых в декартовых координатах будут рассмотрены ниже в разделе 3.

При $M = 0$ получаем физически интересные синглетные состояния [7] (см. также раздел 3). Тогда дискретные уровни энергии осциллятора

$$E_k = \hbar\omega(2k + 1), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

описываются волновыми функциями

$$\Psi_k(r, \varphi) = C_k e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2} F\left(-k, 1; \frac{m\omega}{\hbar}r^2\right). \quad (21)$$

В частности,

$$E_0 = \hbar\omega, \quad \Psi_0(r, \varphi) = C_0 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}, \quad (22)$$

$$E_1 = 3\hbar\omega, \quad \Psi_1(r, \varphi) = C_1 \left(1 - \frac{m\omega}{\hbar}r^2\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}. \quad (23)$$

Это состояние совпадает с (51), записанным в декартовых координатах.

Второе линейно независимое решение уравнения (14)

$$\begin{aligned} \varphi(a, c; z) &= z^{1-c} F(a - c + 1, 2 - c; z) = \\ &= z^{-iM} F\left(\frac{1 - iM}{2} - \frac{E}{2\hbar\omega}, 1 - iM; z\right). \end{aligned} \quad (24)$$

И в этом случае, чтобы ряд обрывался, необходимо, чтобы $a - c + 1 = -n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Уровни энергии осциллятора

$$E_{n,M} = \hbar\omega(2n + 1 - iM) \quad (25)$$

характеризуются волновыми функциями

$$\Psi_{n,M} = C_2 r^{-iM} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2} F\left(-n, 1 - iM; \frac{m\omega}{\hbar}r^2\right) e^{-iM\varphi}. \quad (26)$$

Для удобства, чтобы второе решение было бы просто комплексным сопряжением первого (с точностью до нормирующего множителя), можно взять $e^{-iM\varphi}$, которое при разделении переменных тоже является решением углового уравнения. При $M \neq 0$ вновь имеем неустойчивые распадающие состояния [9, п. 3.2], а при $M = 0$ получаем синглетные состояния, совпадающие с вышеописанными. Нетрудно заметить, что первое (19) и второе (26) решения связаны простой заменой $M \leftrightarrow -M$.

Третья возможность связана с поиском общего решения $\Psi_{E,M}(r, \varphi)$ в виде линейной комбинации «падающей»

$$r^{iM} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2} F\left(\frac{1 + iM}{2} - \frac{E}{2\hbar\omega}, 1 + iM; \frac{m\omega}{\hbar}r^2\right) e^{iM\varphi} \quad (27)$$

и «отраженной»

$$r^{-iM} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} r^2} F\left(\frac{1-iM}{2} - \frac{E}{2\hbar\omega}, 1-iM; \frac{m\omega}{\hbar} r^2\right) e^{-iM\varphi} \quad (28)$$

волн в духе идей, изложенных в статье [10] и в книге [11]. Обозначим коэффициент отражения через $c_2 = -e^{-2i\gamma}$ [10, формула (4)], где γ – фаза отражения. Далее работаем с функцией $u(r)$, связанной с $\Psi(r, \varphi)$ формулой (7). Запишем ее в виде

$$u(r) = c(u_1(r) - e^{-2i\gamma} u_2(r)). \quad (29)$$

При малых r волновая функция (29) ведет себя как

$$u(r) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{r} \sin(M \ln r + \gamma) \quad (30)$$

[10, формула (2b)] (в нашем случае $\nu = M$). Фаза γ зависит от энергии $\gamma = \gamma(E)$, поэтому можно воспользоваться формулой (5) в [10] и получить для фазы соотношение

$$\gamma(E_n) - \gamma(E_0) = \pi n. \quad (31)$$

При больших $r \rightarrow \infty$ функции $u_1(r)$ и $u_2(r)$ ведут себя как

$$\begin{aligned} u_1(r) &\sim \frac{\Gamma(1+iM)}{\Gamma\left(\frac{1+iM}{2} - \frac{E}{2\hbar\omega}\right)} e^{\frac{m\omega r^2}{2\hbar}} r^{-\left(\frac{E}{\hbar\omega} + \frac{1}{2}\right)}, \\ u_2(r) &\sim \frac{\Gamma(1-iM)}{\Gamma\left(\frac{1-iM}{2} - \frac{E}{2\hbar\omega}\right)} e^{\frac{m\omega r^2}{2\hbar}} r^{-\left(\frac{E}{\hbar\omega} + \frac{1}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь использовано асимптотическое свойство вырожденной гипергеометрической функции

$$F(a, c; z) \underset{\operatorname{Re} z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-c}. \quad (33)$$

Общее решение (29) на бесконечности ведет себя как

$$\begin{aligned} &u_1(r) - e^{-2i\gamma} u_2(r) \sim \\ &\sim e^{\frac{m\omega r^2}{2\hbar}} r^{-\left(\frac{E}{\hbar\omega} + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{\Gamma(1+iM)}{\Gamma\left(\frac{1+iM}{2} - \frac{E}{2\hbar\omega}\right)} - e^{-2i\gamma} \frac{\Gamma(1-iM)}{\Gamma\left(\frac{1-iM}{2} - \frac{E}{2\hbar\omega}\right)} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Чтобы оно стремилось к нулю, нужно потребовать

$$\frac{\Gamma(1+iM)}{\Gamma\left(\frac{1+iM}{2} - \frac{E}{2\hbar\omega}\right)} = e^{-2i\gamma} \frac{\Gamma(1-iM)}{\Gamma\left(\frac{1-iM}{2} - \frac{E}{2\hbar\omega}\right)}. \quad (35)$$

Из последнего уравнения находим функцию $\gamma(E)$ и затем с помощью соотношения (31) определяем дискретный спектр гармонического осциллятора.

Гипотеза. При больших положительных энергиях спектр будет иметь вид (18), а при больших отрицательных энергиях — вид

$$E_n = E_0 e^{\frac{2\pi n}{M}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (36)$$

В статье А. М. Переломова и В. С. Попова [10] для случая кулоновского потенциала графическое решение подобного уравнения дает две асимптотики, описываемые формулами (51) и (52).

При $M \neq 0$ возникают трудности, связанные с появлением состояний с отрицательной нормой, отрицательными и мнимыми значениями энергии, возможностями перехода из области I, II в область III, IV , «поглощение черной дырой» и т. д. Некоторые примеры в декартовых координатах даны в разделе 3.

3. Осциллятор в декартовых координатах

Основные моменты для осциллятора на плоскости Минковского можно показать, используя обозначения и терминологию теории струн [5]. Далее будем рассматривать формулы только для областей I, II , $\eta_{ij} = (+, -)$, $a \cdot a = a_1^2 - a_2^2$. В терминах координат и импульсов гамильтониан осциллятора равен

$$H = \frac{1}{2m} p \cdot p + \frac{m\omega^2}{2} x \cdot x, \quad (37)$$

где

$$p_1 = -i\hbar \frac{d}{dx_1}, \quad p_2 = i\hbar \frac{d}{dx_2}, \quad [x_i, p_j] = i\hbar \eta_{ij}. \quad (38)$$

Его можно переписать в виде

$$H = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x_1^2 \right) - \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x_2^2 \right). \quad (39)$$

Удобно ввести единицу длины $r_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ и безразмерные координаты $\xi_i = \frac{x_i}{r_0}$. Введем операторы рождения и уничтожения

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi_1 + \frac{d}{d\xi_1} \right), \quad a_1^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi_1 - \frac{d}{d\xi_1} \right), \quad (40)$$

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi_2 - \frac{d}{d\xi_2} \right), \quad a_2^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi_2 + \frac{d}{d\xi_2} \right), \quad (41)$$

удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[a_i, a_j^+] = \eta_{ij}, \quad [a_i, a_j] = 0, \quad [a_i^+, a_j^+] = 0, \quad (42)$$

тогда гамильтониан осциллятора принимает вид

$$H = \hbar\omega (a_1^+ a_1 - a_2^+ a_2 + 1). \quad (43)$$

Важно отметить, что он обладает симметрией группы $U(1, 1)$, порождаемой генераторами $a_i^+ a_j$, т. е. $[H, a_i^+ a_j] = 0$. Спектр энергий осциллятора классифицируется по неприводимым представлениям группы $U(1, 1) = SU(1, 1) \times U(1)$. Генератор $J_0 = a_1^+ a_1 - a_2^+ a_2$ порождает группу $U(1)$. Генераторы

$$J_{11} = \frac{1}{2} (a_1^+ a_1 + a_2^+ a_2), \quad J_{12} = a_1^+ a_2, \quad J_{21} = a_2^+ a_1. \quad (44)$$

порождают группу $SU(1, 1)$.

Основное состояние осциллятора и его энергия определяется уравнениями

$$a_i \Psi_0 = 0, \quad H \Psi_0 = E_0 \Psi_0, \quad (45)$$

решение которых приводит к формулам (22). Основное состояние инвариантно относительно однопараметрической группы Лоренца с генератором $L_{12} \in U(1, 1)$, где

$$L_{12} = x_1 p_2 - x_2 p_1 = -i\hbar (a_1^+ a_2 - a_2^+ a_1), \quad L_{12} \Psi_0 = 0 \quad (46)$$

и описывается координатной волновой функцией

$$\Psi_0(x) = \langle x|0\rangle = C_0 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2 - x_2^2)}. \quad (47)$$

Отметим, что в области I, где $x_1^2 > x_2^2$, состояние (47) нормируемо. На рис. 3 показана область наиболее вероятного нахождения осциллятора в основном состоянии.

Для уровня $n = m + k$ решениями будут

$$E_n = \hbar\omega(n + 1),$$

$$|m, k\rangle = (a_1^+)^m (a_2^+)^k |0\rangle, \quad \Psi_{m,k}(x_1, x_2) = \langle x|m, k\rangle. \quad (48)$$

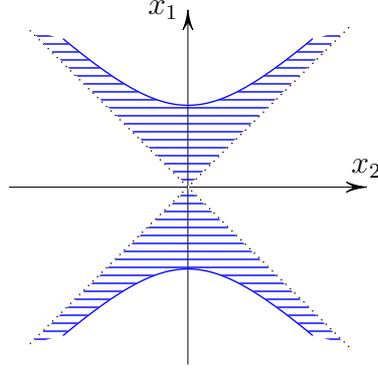


Рис. 3. Наиболее вероятное расположение осциллятора в основном состоянии. Заштрихована область $\frac{1}{2} < \frac{|\Psi_0|^2}{C_0^2} < 1$

Таким образом, при $n = 1$ получаем два состояния

$$\begin{aligned}\Psi_{1,0} &= a_1^+ \Psi_0 = C_{1,0} x_1 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2 - x_2^2)}, \\ \Psi_{0,1} &= a_2^+ \Psi_0 = C_{0,1} x_2 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2 - x_2^2)}.\end{aligned}\quad (49)$$

Первое из них $\Psi_{1,0}$ ненормируемо, поскольку

$$\Psi_{1,0}(x_1, x_2) = C_{1,0} x_1 e^{-\frac{m\omega r^2}{2\hbar}(x_1^2 - x_2^2)} = C_{1,0} r \operatorname{ch} \varphi e^{-\frac{m\omega r^2}{2\hbar}}, \quad (50)$$

а интеграл по углу φ расходится. Второе состояние $\Psi_{0,1}$ имеет отрицательную норму, так как

$$|0, 1\rangle = a_2^+ |0\rangle, \quad \langle 0, 1|0, 1\rangle = \langle 0|a_2 a_2^+ |0\rangle = -1.$$

Такие состояния необходимо исключить. Это «нефизические» состояния. Отметим, что эти состояния появляются и в полярных координатах при мнимых значениях M в формулах (7), (18), (19).

При $n = 2$ энергии осциллятора $E_2 = 3\hbar\omega$ отвечает одно физическое синглетное состояние

$$\begin{aligned}\Psi_2^s &= \Psi_{2,0} - \Psi_{0,2} = \left((a_1^+)^2 - (a_2^+)^2 \right) \Psi_0 = \\ &= C (x_1^2 - x_2^2 - 1) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2 - x_2^2)},\end{aligned}\quad (51)$$

которое совпадает с (23), записанным в полярных координатах, и дублетное состояние

$$\begin{cases} \Psi_{2,0} + \Psi_{0,2} = \left((a_1^+)^2 + (a_2^+)^2 \right) \Psi_0 = C (x_1^2 + x_2^2) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2 - x_2^2)}, \\ \Psi_{1,1} = a_1^+ a_2^+ \Psi_0 = C_{1,1} x_1 x_2 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2 - x_2^2)}. \end{cases}\quad (52)$$

Второе состояние $\Psi_{1,1}$ имеет отрицательную норму и должно быть исключено. Тогда необходимо будет исключить и первое состояние $\Psi_{2,0}$, так как оно становится не лоренц-инвариантным. Таким образом, дублет — это «нефизическое» состояние.

Состояния вида

$$(a_1^+ a_1^+ - a_2^+ a_2^+)^k |0\rangle, \quad E_k = \hbar\omega(2k + 1), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (53)$$

совпадают с синглетными состояниями (20), (21). В работе [7, формулы 3.19–3.20] показано, что только синглетные состояния на уровнях с $n = 2k$ являются лоренц-инвариантными, нормируемыми с положительной нормой, т. е. физическими состояниями.

Заключение

Уравнение Шредингера для уровней энергии осциллятора на плоскости Минковского в полярных координатах имеет три решения, которые совпадают с решениями в статье [9], где разбирается радиальная часть трехмерного сферически-симметричного потенциала осциллятора при нецелых вещественных и комплексных значениях углового момента M . Уравнения (1) и (16) в этой статье совпадают с уравнениями для $u(r)$ (формула (10) нашей статьи) для осциллятора на плоскости Минковского. Первое решение (формулы (18), (19)) при $M \neq 0$ связывается с падением частицы на черную дыру и интерпретируется как неустойчивое распадное поведение. А при $M = 0$ оно как раз совпадает с синглетными решениями, полученными в декартовых координатах, т. е. как раз только для $M = 0$ возникают устойчивые, лоренц-инвариантные, нормируемые, с положительной нормой физические состояния.

Второе решение можно условно назвать как «возникающее из черной дыры». Ряды и для первого, и для второго решений можно оборвать на степени n и получить формулы (18) и (25) для спектра энергии.

Третье решение — в виде линейной комбинации первых двух — уже не получается оборвать на определенной степени полинома, и тут нужно другое условие (35).

Таким образом, хотя все эти решения давно известны, но они возникали в других задачах. В задаче об осцилляторе на плоскости Минковского эти решения получают новую интерпретацию.

Список литературы

1. Громов Н. А., Куратов В. В. Гармонический осциллятор на плоскостях Кэли-Клейна с римановой и вырожденной метрикой.

ми // *Труды Межд. семинара «Теоретико-групповые методы исследования физических систем»*. Сыктывкар, 2018. (*Вестник Коми НЦ УрО РАН*. Вып. 33). С. 21–36.

2. **Громов Н. А., Куратов В. В.** Квантовая частица на плоскости Минковского // *Известия Коми НЦ УрО РАН*. 2018. Вып. №3(35). С. 5–7.
3. **Ремнев М. А., Климов В. В.** Метаповерхности: новый взгляд на уравнения Максвелла и новые методы управления светом // *Успехи физических наук*. 2018. Т. 188. № 2. С. 169–205.
4. **Smolyaninov I. I.** Hyperbolic metamaterials; arXiv: 1510.07137.
5. **Грин М. Б., Шварц Дж., Виттен Э.** Теория суперструн. М.: Мир, 1990.
6. **Каку М.** Введение в теорию суперструн. М.: Мир, 1999. 624 с.
7. **Bars I.** Relativistic Harmonic Oscillator Revisited // *Phys. Rev. D* V. 79. Iss. 4. 045009. 2009. arXiv: 0810.2075.
8. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции М.: Мир, 1973. Т. 1.
9. **Шабад А. Е.** Сингулярный центр как негравитационная черная дыра // *Теоретическая и математическая физика* 2014. Т. 181. № 3. С. 603–613. *ТМФ*. 2014. Т. 181. № 3. С. 603–613.
10. **Переломов А. М., Попов В. С.** «Падение на центр» в квантовой механике // *Теоретическая и математическая физика*. 1970. Т. 4. № 1. С. 48–65.
11. **Gitman D. M., Tyutin I. V., Voronov B. L.** Self-Adjoint Extensions in Quantum Mechanics: General Theory and Applications to Schrödinger and Dirac Equations with Singular Potentials // *Progress in Mathematical Physics*, vol. 62. Birkhäuser: New York, 2012. 511 p.

Summary

Gromov N. A., Kuratov V. V. Harmonic oscillator on Minkowski plane

The problem of quantum harmonic oscillator on Minkowski plane is discussed. The corresponding Schrödinger equation for eigenstates is obtained with the help of Beltrami-Laplace operator of pseudoeuclidean plane. The infinitely high potential barriers are placed on isotropic lines. The discrete energy eigenvalues of oscillator are obtained.

Keywords: Minkowski plane, Schrödinger equation, harmonic oscillator.

References

1. **Gromov N. A., Kuratov V. V.** Гармонический осциллятор на плоскостях Кэли-Клейна с римановой и вырожденной метриками (A harmonic oscillator on the Cayley-Klein planes with Riemannian and degenerate metrics), *Proceedings of Int. Seminar «Group theoretical methods for studying physical systems»* Syktyvkar, 2018, (Bulletin of the Komi Scientific Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Issue 33), pp. 21–36.
2. **Gromov N. A., Kuratov V. V.** Квантовая частица на плоскости Минковского (Quantum particle on the Minkowski plane), *Proceedings of the Komi Scientific Center of the UrB RAS*, 2018, Issue 3 (35), pp. 5–7.
3. **Remnev M. A., Klimov V. A.** Метаповерхности: новый взгляд на уравнения Максвелла и новые методы управления светом (Metasurfaces: a new view of Maxwell's equations and new methods of light control), *Progress in physical sciences*, 2018, vol. 188, No. 2, pp. 169–205.
4. **Smolyaninov I. I.** Hyperbolic metamaterials; arXiv: 1510.07137.
5. **Green M. B., Schwartz J., Witten E.** *Теория суперструн* (Theory of superstrings), Moscow: Mir, 1990.
6. **Kaku M.** *Введение в теорию суперструн* (Introduction to the theory of superstrings), Moscow: Mir, 1999, 624 p.
7. **Bars I.** Relativistic Harmonic Oscillator Revisited, *Phys. Rev. D*, v. 79, Iss. 4. 045009. 2009, arXiv: 0810.2075.

8. **Betemmen G., Erdei A.** *Vysshiyе transtsendentnyye funktsii* (Higher transcendental functions), M.: Mir, 1973, vol. 1.
9. **Shabad A. E.** Singulyarnyy tsentr kak negravitatsionnaya chernaya dyra (The singular center as a non-gravitational black hole), *Theoretical and Mathematical Physics*, 2014, vol. 181, No. 3, pp. 603–613.
10. **Perelomov A. M., Popov V. S.** «Padeniye na tsentr» v kvantovoy mekhanike («Falling to the center» in quantum mechanics), *Theoretical and Mathematical Physics*, 1970, vol. 4, No. 1, pp. 48–65.
11. **Gitman D. M., Tyutin I. V., Voronov B. L.** Self-Adjoint Extensions in Quantum Mechanics: General Theory and Applications to Schrödinger and Dirac Equations with Singular Potentials, *Progress in Mathematical Physics*, vol. 62, Birkhäuser: New York, 2012, 511 p.

Для цитирования: Громов Н. А., Куратов В. В. Гармонический осциллятор на плоскости Минковского // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 2 (27). С. 10–23.*

For citation: Gromov N. A., Kuratov V. V. Harmonic oscillator on Minkowski plane, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2018, 2 (27), pp. 10–23.