НАСТАВНИК-УЧЕНИК

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 1 (26). 2018

УДК 517.162

$(1/2;1)$-ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ. Ч. I

С. И. Калинин, Н. В. Леонтьева

В работе рассматривается класс $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклых функций. Авторы приводят геометрическую характеризацию таких функций, выводят достаточные условия принадлежности функции обсуждаемому классу в терминах производных.
Ключевые слова: $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклая функция, $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутая функция, $\frac{1}{2}$-параболическая дуга.

1. Определения и иллюстрации

Пусть $l \subseteq [0;+\infty)$ — произвольный промежуток и $f\colon l \to \mathbf{R}$ — функция, заданная на этом промежутке.

Определение 1. Функцию f назовем $\left(\frac{1}{2};1\right)$-*выпуклой* на l, если для любого отрезка $[a;b] \subset l$ и любого числа $\lambda \in [0;1]$ выполняется неравенство

$$f\left(\left(\lambda\sqrt{a} + (1-\lambda)\sqrt{b}\right)^2\right) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b). \tag{1}$$

Если в условиях определения 1 для всех $\lambda \in (0;1)$ выполняется неравенство

$$f\left(\left(\lambda\sqrt{a} + (1-\lambda)\sqrt{b}\right)^2\right) < \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b), \tag{2}$$

то функцию f будем называть *строго* $\left(\frac{1}{2};1\right)$-*выпуклой* на рассматриваемом промежутке l.

Очевидно, что строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклая функция является $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклой.

Замечание 1.1. В соответствии с неравенствами (1)-(2) можно говорить соответственно о $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклости функции f в строгом или нестрогом смысле.

© Калинин С. И., Леонтьева Н. В., 2018.

Замечание 1.2. Принимая во внимание обозначения, принятые в статьях [1]-[2], $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклые функции можно называть еще и PA-*выпуклыми*. Здесь параметр P ассоциируется с весовым средним степенным порядка $\frac{1}{2}$ чисел a и b с весами λ и $(1-\lambda)$ (значение аргумента функции f в левой части соотношения (1)), а параметр A — с весовым средним арифметическим значений $f(a)$ и $f(b)$ с тем же набором весов (правая часть (1)).

Замечание 1.3. Введенное понятие есть конкретный случай общего понятия (α,β)-выпуклой функции, рассмотренного в [3].

Аналогично определяются $\left(\frac{1}{2};1\right)$-*вогнутая* и *строго* $\left(\frac{1}{2};1\right)$-*вогнутая* функции — для этого в соответствующих неравенствах(1)-(2) знаки $\leqslant$ и $<$ следует поменять на знаки $\geqslant$ и $>$ соответственно.

Рассмотрим некоторые примеры.

На всяком промежутке $l \subseteq [0;+\infty)$ функция $f(x) = c\sqrt{x}+d$, где c и d — вещественные константы, является как $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклой, так и $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутой. Это следует из преобразований

$$f\left(\left(\lambda\sqrt{a}+(1-\lambda)\sqrt{b}\right)^2\right) = c\sqrt{\left(\lambda\sqrt{a}+(1-\lambda)\sqrt{b}\right)^2}+d =$$
$$= \lambda\left(c\sqrt{a}+d\right)+(1-\lambda)\left(c\sqrt{b}+d\right) = \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b),$$

где $a \in l$, $b \in l$, $\lambda \in [0;1]$. Отсюда, в частности, следует, что на рассматриваемом промежутке $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклыми и $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутыми являются функции $y = const$ и $y=\sqrt{x}$.

Функция $f(x)=x$, $x>0$, является строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклой, так как для любых положительных a и b $(a\neq b)$ и любых $\lambda\in(0;1)$ имеем:

$$\left(\lambda\sqrt{a}+(1-\lambda)\sqrt{b}\right)^2 < \lambda a+(1-\lambda)b.$$

Последнее неравенство есть известное соотношение между взвешенным средним степенным порядка $\frac{1}{2}$ и взвешенным средним арифметическим чисел a и b с весами λ и $1-\lambda$.

Легко видеть, что функция $g(x)=-x$, $x>0$, будет, наоборот, строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутой.

2. Геометрическая характеризация $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклых функций

Введем в рассмотрение вспомогательное понятие $\frac{1}{2}$-параболической дуги (-параболической кривой).

Определение 2. $\frac{1}{2}$-*параболическая дуга*, или $\frac{1}{2}$-*параболическая кривая*, есть всякая связная часть графика функции $y=c\sqrt{x}+d$, где c и d — вещественные константы.

Покажем, что существует только одна $\frac{1}{2}$-параболическая дуга, соединяющая две точки правой полуплоскости плоскости xOy, не лежащие на одной вертикали.

Действительно, пусть $M_1(x_1;y_1)$ $(x_1 \geqslant 0)$ и $M_2(x_2;y_2)$ $(x_2 \geqslant 0,$ $x_1 \neq x_2)$ — произвольные фиксированные точки. Подставляя координаты данных точек в общее уравнение $\frac{1}{2}$-параболической кривой $y = c\sqrt{x} + d$, получим систему уравнений относительно c и d:

$$\begin{cases} y_1 = c\sqrt{x_1} + d, \\ y_2 = c\sqrt{x_2} + d. \end{cases}$$

Решая данную систему, находим ее единственное решение $c = \dfrac{y_2 - y_1}{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}$, $d = \dfrac{y_1\sqrt{x_2} - y_2\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}$. Следовательно, $\frac{1}{2}$-параболическая кривая, задаваемая уравнением

$$y = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}\sqrt{x} + \frac{y_1\sqrt{x_2} - y_2\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}, \tag{3}$$

есть единственная $\frac{1}{2}$-параболическая дуга, соединяющая точки M_1 и M_2. Нужное показано.

Из (3) легко видеть, что если точки M_1 и M_2 лежат на одной горизонтали (в этом случае $y_1 = y_2$), то их соединяющая $\frac{1}{2}$-параболическая дуга вырождается в отрезок горизонтальной прямой $y = y_1$.

Введенное понятие $\frac{1}{2}$-параболической кривой позволяет реализовать геометрическую характеризацию $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклости функции.

Покажем, что если $f(x)$ — $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклая на данном промежутке l, $l \subseteq [0;+\infty)$ функция, то для любого отрезка $[a;b]$, принадлежащего l, и любого $x \in (a;b)$ выполняется условие: точка $(x;f(x))$ графика функции f будет находиться не выше точки $\frac{1}{2}$-параболической дуги, соединяющей точки $(a;f(a))$, $(b;f(b))$, с той же абсциссой x. Для этого, отправляясь от (3), составим уравнение упоминаемой дуги:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}\sqrt{x} + \frac{f(a)\sqrt{b} - f(b)\sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}. \tag{4}$$

Легко видеть, что уравнение (4) можно переписать так:

$$y = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{x}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}f(a) + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}f(b). \tag{5}$$

Представим $x \in (a;b)$ в виде

$$x = \left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{x}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}\sqrt{a} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}\sqrt{b} \right)^2, \tag{6}$$

заметив при этом, что для дробей в основании записанной в правой части представления (6) степени выполняются условия:

$$\frac{\sqrt{b}-\sqrt{x}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} \in (0;1), \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} \in (0;1), \frac{\sqrt{b}-\sqrt{x}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} = 1.$$

Используя последнее и условие $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклости функции f, ее значение $f(x)$ оценим сверху следующим образом:

$$f(x) = f\left(\left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{x}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}\sqrt{a} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}\sqrt{b} \right)^2 \right) \leqslant \frac{\sqrt{b}-\sqrt{x}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} f(a) + \\ + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} f(b).$$

Отсюда в силу (5) следует, что точка $(x; f(x))$, $x \in (a;b)$, графика функции f лежит не выше точки $\left(x; \frac{\sqrt{b}-\sqrt{x}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} f(a) + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} f(b) \right)$ $\frac{1}{2}$-параболической дуги (5). Нужное установлено.

Подобно рассуждая, очевидно, нетрудно показать, что если $f(x)$ — строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклая на промежутке l функция, то для любого отрезка $[a;b]$, принадлежащего l, и любого $x \in (a;b)$ выполняется условие: точка $(x; f(x))$ графика функции f лежит строго ниже точки $\frac{1}{2}$-параболической дуги, соединяющей точки $(a; f(a))$, $(b; f(b))$, с той же абсциссой x (см. рис. 1).

Ясно, что по аналогии соответствующую геометрическую характеризацию можно привести и в отношении $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутых в строгом или нестрогом смысле функций.

3. Достаточные условия $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклости функции

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на некотором промежутке $l \subseteq (0;+\infty)$ и внутри его дважды дифференцируема. В данных условиях введем в рассмотрение величину $\Delta(x) = f'(x) + 2xf''(x)$, $x \in l^0$, где l^0 — внутренняя часть l. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. Если внутри промежутка l выполняется условие $\Delta(x) > 0$, то функция $f(x)$ является строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклой на этом

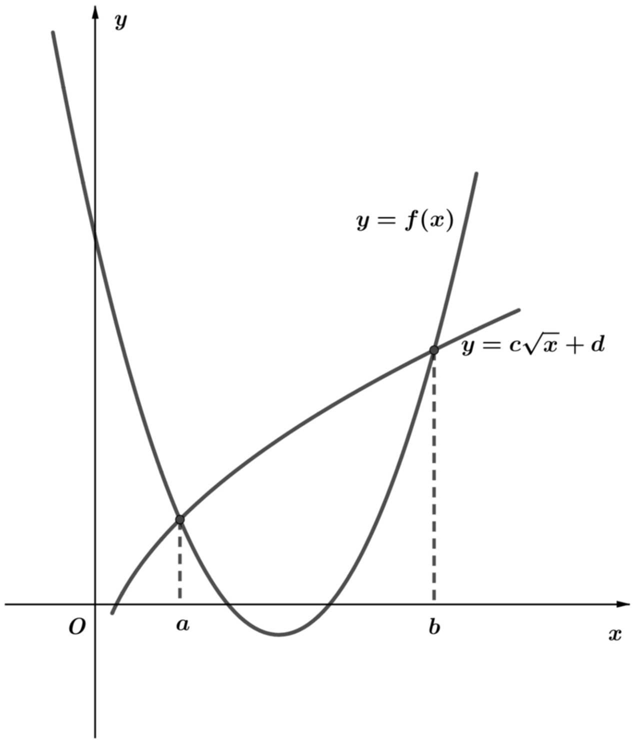

Рис. 1. Геометрическая характеризация строгой $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклости

промежутке. Если же внутри l $\Delta(x) < 0$, то $f(x)$ будет строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутой на рассматриваемом промежутке.

Доказательство. Пусть $[a;b]$ — произвольный отрезок из промежутка l. Покажем, что если $\Delta(x) > 0$ для любого x, $a < x < b$, то будет выполняться неравенство $f(x) < y(x)$, где $y(x)$ — функция (5), задающая $\frac{1}{2}$-кривую, соединяющую концы графика функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Последнее, согласно геометрической интерпретации $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклости, будет означать указанную выпуклость данной функции.

Рассмотрим разность $y(x) - f(x)$. Для нее имеем:

$$y(x) - f(x) = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{x}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} f(a) + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} f(b) - f(x) =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{b} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x} - \sqrt{a}\right)}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} \left(\frac{f(b) - f(x)}{\sqrt{b} - \sqrt{x}} - \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} \right).$$

В получившемся произведении множитель, записанный в виде дроби перед последними скобками, очевидно, положительный. Нам достаточно доказать, что положительным будет выражение $A = \dfrac{f(b)-f(x)}{\sqrt{b}-\sqrt{x}} - \dfrac{f(x)-f(a)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$. Для данного выражения по теореме Коши о среднем значении имеем представление

$$A = \frac{f'(\eta)}{\dfrac{1}{2\sqrt{\eta}}} - \frac{f'(\xi)}{\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}} = 2\sqrt{\eta}f'(\eta) - 2\sqrt{\xi}f'(\xi),$$

где ξ и η — некоторые средние точки, удовлетворяющие условию $a < \xi < x < \eta < b$. Применяя теперь к разности $\sqrt{\eta}f'(\eta) - \sqrt{\xi}f'(\xi)$ формулу Лагранжа конечных приращений, получаем:

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{\zeta}}f'(\zeta) + 2\sqrt{\zeta}f''(\zeta)\right)(\eta-\xi) = \frac{1}{\sqrt{\zeta}}\Delta(\zeta)\,(\eta-\xi)\,,$$

где ζ — некоторая точка, лежащая между точками ξ и η. Так как $\Delta(\zeta) > 0$, то отсюда имеем $y(x) - f(x) > 0$, или $f(x) < y(x)$, $a < x < b$. Нужное показано.

Второе утверждение теоремы устанавливается аналогично. Теорема доказана.

Замечание 3.1. Техника доказательства установленной теоремы позволяет заключить, что если внутри промежутка l для функции $f(x)$ выполняется условие $\Delta(x) \geqslant 0$, то данная функция будет нестрого $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклой на l. Аналогично, условие $\Delta(x) \leqslant 0$, $x \in l^0$, влечет факт нестрогой $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутости функции $f(x)$ на промежутке l.

Замечание 3.2. Теорема 3.1 есть аналог соответствующего утверждения о достаточных условиях обычной строгой выпуклости функции на промежутке в терминах ее второй производной.

Установленная теорема 3.1 позволяет эффективно конструировать примеры строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклых и -вогнутых функций.

Так, функция e^x, $x \geqslant 0$, является строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклой, поскольку для нее величина $\Delta(x) = e^x + 2xe^x$ на интервале $(0;+\infty)$ положительная. Наоборот, функция $y = \ln x$ в своей области определения будет строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутой, так как $\Delta(x) = \dfrac{1}{x} - 2x\dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{1}{x} < 0$, $x > 0$.

Рассмотрим степенную функцию $y = x^\alpha$, $x > 0$, где α — вещественный показатель, отличный от $\frac{1}{2}$. Для данной функции величина $\Delta = \alpha x^{\alpha-1} + 2x\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} = \alpha(2\alpha-1)x^{\alpha-1}$ может менять знак. При $\alpha \in (-\infty;0) \cup \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ имеем: $\Delta(x) > 0$, значит, при таких α функция $y = x^\alpha$, $x > 0$, будет строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклой. При $\alpha \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$, наоборот, рассматриваемая функция будет, очевидно, строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутой.

Список литературы

1. **Guan Kaizhong.** GA-convexity and its applications // *Anal. Math. 2013. 39. № 3. Pp. 189–208.*

2. **Xiao-Ming Zhang, Yu-Ming Chu, and Xiao-Hui Zhang.** The Hermite-Hadamard type inequality of GA-convex functions and its application // *J. of Inequal. and Applics. Vol. 2010. Article ID 507560, 11 pages, doi:10.1155/2010/507560.*

3. **Калинин С. И.** $(\alpha;\beta)$-выпуклые функции, их свойства и некоторые применения // *Уфимская международная математическая конференция : сборник тезисов / отв. ред. Р. Н. Гарифуллин. Уфа: РИЦ БашГУ, 2016. С. 75–76.*

Summary

Kalinin S. I., Leonteva N. V. (1/2; 1)-convex functions. Part 1.

The article deals with the class of $\left(\frac{1}{2};1\right)$-convex functions. The authors give a geometric characterization of such functions, derive sufficient conditions for the membership of the function to the class under discussion in terms of derivatives.

Keywords: $\left(\frac{1}{2};1\right)$*-convex function,* $\left(\frac{1}{2};1\right)$*-concave function,* $\frac{1}{2}$*-parabolic arc.*

References

1. **Guan Kaizhong.** GA-convexity and its applications, *Anal. Math.*, 2013, 39, № 3, pp. 189–208.

2. **Xiao-Ming Zhang, Yu-Ming Chu, and Xiao-Hui Zhang.** The Hermite-Hadamard type inequality of GA-convex functions and its applicationm, *J. of Inequal. and Applics.*, vol. 2010, Article ID 507560, 11 pages, doi:10.1155/2010/507560.

3. **Kalinin S. I.** $(\alpha;\beta)$-vypuklyye funktsii, ikh svoystva i nekotoryye primeneniya (($\alpha;\beta$)-convex functions, their properties and some applications), *Ufa International Mathematical Conference. Collection of abstracts*, otv. red. R. N. Garifullin, Ufa: RIC BashGU, 2016, pp. 75–76.

Для цитирования: Калинин С. И., Леонтьева Н. В. (1/2; 1)-выпуклые функции. Ч. I // *Вестник Сыктывкарского университета.*

Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 1 (26). С. 97–104.

For citation: Kalinin S. I., Leonteva N. V. (1/2; 1)-convex functions. Part 1., *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2018, 1 (26), pp. 97–104.

ВятГУ *Поступила 01.04.2018*