ИНФОРМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 1 (26). 2018

УДК 519.6

ДВУМЕРНЫЙ ТЕРНАРНЫЙ ПОИСК И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ СПОРТИВНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Н. О. Котелина

В этой статье рассматривается использование метода тернарного поиска для решения одной задачи спортивного программирования.

Ключевые слова: двумерный тернарный поиск, спортивное программирование.

1. Поиск с помощью золотого сечения и тернарный поиск

Рассмотрим численные методы для поиска минимума функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. При этом предполагаем, что $f(x)$ является унимодальной на отрезке $[a, b]$, т. е. существует некоторая точка $p \in [a, b]$, такая, что $f(x)$ строго убывает на отрезке $[a, p]$ и строго возрастает на $[p, b]$.

Тогда для поиска минимума $f(x)$ можно использовать метод золотого сечения [5]. Для поиска минимума методом золотого сечения требуется, чтобы использовались две внутренние точки, $c = a + (1 - r)(b - a)$ и $d = a + r(b - a)$, где r является золотым сечением:

$$r = (\sqrt{5} - 1)/2.$$

Условие, что функция $f(x)$ унимодальна, гарантирует, что значения функции $f(c)$ и $f(d)$ меньше, чем $max\{f(a), f(b)\}$. Если $f(c) \leqslant f(d)$, то минимум должен находиться на подынтервале $[a, d]$. Заменяем b на d и продолжаем поиск на новом подынтервале. Если $f(d) < f(c)$, то минимум должен находиться на подынтервале $[c, b]$. Заменяем a на c и

© Котелина Н. О., 2018.

продолжаем поиск. Те же рассуждения верны, если r положить равным $\frac{2}{3}$, тогда метод называется методом тернарного поиска, так как точки $c = a + (1 - r)(b - a)$, $d = a + r(b - a)$ делят отрезок $[a, b]$ на три равные части. Поскольку отрезок, на котором вычисляется минимум, каждый раз сужается в 1.5 раза, до тех пор, пока длина не меньше eps, то асимптотическая сложность тернарного поиска с точностью eps составляет $\log_{1.5} \frac{b-a}{eps}$. В случае целочисленного аргумента точки c и d выбираются приближенно, а критерием остановки алгоритма является условие $b - a < 3$, так как в этом случае выбрать c и d нельзя.

2. Двумерный тернарный поиск

Можно обобщить метод тернарного поиска на случай унимодальной функции $f(x, y)$ от двух аргументов $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$, т. е. такой, которая является унимодальной от одного аргумента, если зафиксировать другой. Тогда будем проводить тернарный поиск по x, а именно делим отрезок $[a, b]$ на три части точками m, n, пока длина отрезка не меньше eps, вычисляем при помощи двух тернарных поисков минимумы по y для $f(m, y)$, для $f(n, y)$, сравниваем между собой найденные значения и переопределяем соответствующим образом a и b. Асимптотическая сложность данного алгоритма будет составлять

$$\log_{1.5} \frac{b-a}{eps} \log_{1.5} \frac{d-c}{eps}.$$

3. Постановка задачи

Рассмотрим задачу с Регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников 2015–2016 «Гармоничная последовательность» [1].

Условие задачи таково.

Цикл лекций в университете Флатландии посвящен изучению последовательностей.

Профессор называет последовательность целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ гармоничной, если каждое число, кроме a_1 и a_n, равно сумме соседних: $a_2 = a_1 + a_3, a_3 = a_2 + a_4, \ldots, a_{n-1} = a_{n-2} + a_n$. Например, последовательность $[1, 2, 1, -1]$ является гармоничной, поскольку $2 = 1 + 1$, и $1 = 2 + (-1)$.

Рассмотрим последовательности равной длины: $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ и $B = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$. Расстоянием между этими последовательностями будем называть величину $d(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n|$. Например, $d([1, 2, 1, -1], [1, 2, 0, 0]) = |1-1|+|2-2|+|1-0|+|-1-0| = = 0 + 0 + 1 + 1 = 2$.

В конце лекции профессор написал на доске последовательность из n целых чисел $B = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$ и попросил студентов в качестве домашнего задания найти гармоничную последовательность $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, такую, что $d(A, B)$ минимально. Чтобы облегчить себе проверку, профессор просит написать в качестве ответа только искомое минимальное расстояние $d(A, B)$.

Требуется написать программу, которая по заданной последовательности B определяет, на каком минимальном расстоянии от последовательности B найдется гармоничная последовательность A.

Входные данные. Первая строка входного файла содержит целое число n — количество элементов в последовательности ($3 \leqslant n \leqslant 300000$).

Вторая строка содержит n целых чисел $b_1, b_2, \ldots b_n$, ($-10^9 \leqslant b_i \leqslant 10^9$).

Выходные данные. Выходной файл должен содержать одно целое число: минимальное возможное расстояние от последовательности во входном файле до гармоничной последовательности. Время работы программы не должно превышать 1 секунду.

4. Решение задачи

Заметим, что для того, чтобы программа удовлетворяла временным ограничениям, количество операций не должно превосходить 10^9. Обозначим первые два числа гармоничной последовательности как x и y. Тогда сама последовательность будет иметь вид x, y, $(y - x)$, $-x$, $-y$, $(x - y)$, x, $y, \ldots$. Расстояние $d(A, B)$ является функцией от x, y:

$$d(A, B) = f(x, y) = \max\{|x - b_1|, |y - b_2|, |y - x - b_3|, \ldots\}.$$

Функция $f(x, y)$ будет выпуклой как максимум семейства выпуклых функций и, следовательно, будет унимодальной.

Пусть все числа в исходной последовательности по модулю не превосходят A. Тогда существует правильный ответ, в котором одно из чисел x и y не превосходит по модулю A, а другое $2A$. Доказательство этого факта приведено в разборе заданий ВСоШ [6]. Таким образом, искомые x, y находятся в диапазоне от $-2\max\{|b_1|, \ldots, |b_n|\}$ до $2\max\{|b_1|, \ldots, |b_n|\}$, и перебор x, y в общем случае не пройдет по времени.

Если воспользоваться двумерным тернарным поиском, то число итераций будет порядка

$$(\log_{1.5}(4 \cdot 10^9))^2 \approx 3000.$$

При этом, если функцию расстояния вычислять напрямую суммированием, то для ее вычисления потребуется $3 \cdot 10^5$ операций. На каждом шаге тернарного поиска по x нужно проводить два тернарных поиска по y, для каждого из которых может потребоваться около 50 итераций, с вычислением на каждой итерации значения $f(x, y)$ в двух точках. Таким образом, даже при грубой оценке общее число операций для вычисления $f(x, y)$ может достигать величины

$$50 \cdot 2 \cdot 50 \cdot 6 \cdot 10^5 \approx 3 \cdot 10^9,$$

и поэтому не удовлетворяет временным ограничениям задачи. Поэтому целесообразно вычислять целевую функцию при помощи двоичного поиска, что приводит к значительному уменьшению числа операций. Идея двоичного поиска заключается в том, чтобы узнать, сколько модулей слагаемых в функции расстояния раскрываются с минусом, а сколько — с плюсом, т. е. сводится к проблеме вычисления количества элементов в заданной последовательности B, не превосходящих данного числа. Для этого требуется предварительно отсортировать элементы последовательности B по возрастанию и вычислить частичные суммы для функции расстояния. При этом все слагаемые в функции расстояния разбиваются на 3 группы в зависимости от их номера, поскольку нужно проводить отдельно двоичный поиск для x, y, $y - x$.

Список литературы

1. Дистанционная подготовка по информатике [Электронный ресурс]. URL: `http://informatics.mccme.ru` (дата обращения: 29.10.2017).

2. MAXimal. Сайт М. Иванова [Электронный ресурс]. URL: `http://e-maxx.ru` (дата обращения: 12.09.2017).

3. **Кнут Д.** Искусство программирования. Т. 3. Сортировка и поиск. М.: Вильямс, 2007. Т. 3. 832 с.

4. Конспекты студентов кафедры компьютерных технологий Университета ИТМО. URL: `http://neerc.ifmo.ru/wiki` (дата обращения: 12.09.2017).

5. **Мэтьюз Дж. Г., Финк К. Д.** Численные методы. Использование MATLAB. 3-е изд. СПб.: Вильямс, 2001. 716 с.

6. Олимпиады по информатике [Электронный ресурс].

URL: `https://neerc.ifmo.ru/school` (дата обращения: 12.09.2017).

Summary

Kotelina N. O Two-dimensional ternary search and its application in competitive programming

In this paper the application of ternary search in one problem of competitive programming is considered.

Keywords: two-dimensional ternary search, competitive programming.

References

1. Distantcionnaya podgotovka po informatike (Distance training in computer science). URL: `http://informatics.mccme.ru` (date of usage: 29.10.2017).

2. MAXimal. Sayt M. Ivanova (MAXimal. Site of M. Ivanov) URL: `http://e-maxx.ru` (date of usage: 12.09.2017).

3. **Knuth D. E.** *Iskusstvo programmirovaniya* (The Art of Computer Programming. Vol. 3. Sorting and Searching) M. :Williams (2007). 832 p.

4. Konspekty studentov kafedry komp'yuternykh tekhnologiy Universiteta ITMO (Conspects of students of ITMO)

   URL: `http://neerc.ifmo.ru/wiki` (date of usage: 12.09.2017).

5. **Mathews J. H., Fink K. D.** *Chislennyye metody. Ispol'zovaniye MATLAB* (Numerical Methods: Using MATLAB) 3rd Edition. Spb.: Williams, 2001, 716 p.

6. Olimpiady po informatike (Olympiads on informatics) URL: `https://neerc.ifmo.ru/school.` (date of usage: 12.09.2017).

Для цитирования: Котелина Н. О. Двумерный тернарный поиск и его применение в задачах спортивного программирования // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 1 (26). С. 58–63.*

For citation: Kotelina N. O. Two-dimensional ternary search and its application in competitive programming, *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2018, 1 (26), pp. 58–63.

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 29.12.2017*