МАТЕМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 1 (26). 2018

УДК 517.382, 533.993

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ ЗНАЧЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛОВ

С. Л. Рычков

Рассматривается метод вычисления главных значений интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n(1+x^2)^{-\nu}}{x-z}\,dx$, $n = 0, 1, 2$. При помощи интегралов такого типа может быть выражена диэлектрическая проницаемость неравновесной плазмы с квазистепенной функцией распределения электронов по импульсам. Представленный метод отличен от известных ранее и приводит к более удобным для приложений результатам. Интегралы выражаются через гипергеометрические функции Гаусса для значений параметров $z > 0$ и $\nu > 5/2$. Получены простые асимптотические выражения для значений параметра $z \gg 1$. Даны графические представления результатов.
Ключевые слова: главное значение интеграла, гипергеометрические функции, неравновесная плазма, квазистепенная функция распределения, каппа–распределение.

1. Введение

В астрофизике особое внимание уделяется активным областям энерговыделения. Плазма в них заведомо находится в неравновесном состоянии, и функция распределения ее частиц по энергиям или импульсам отличается от максвелловской преобладанием высокоэнергичных частиц. Ряд наблюдательных данных дает основание полагать, что распределение высокоэнергичных частиц подчинено степенному закону. Для вычисления параметров плазмы, определяющих характер распространения в ней электромагнитных волн, в ряде работ предложена модельная функция распределения вида $f(p) \sim (1 + p^2/p_c^2)^{-\nu}$, где p — импульс частицы, p_c — некоторое его значение ([1] и цитируемые там статьи).

При этом встает проблема определения главных значений интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+x^2)^{-\nu}}{x-z}\,dx$. В работе [2] приводится сводка результатов, полученных решением гипергеометрического уравнения в комплексной плоскости, как следствие, выражающихся через функции комплексного аргумента.

В данной работе предлагается иной подход, дающий более удобные для вычислений результаты. Выводятся выражения для главных значений по Коши трех интегралов, а именно

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+x^2)^{-\nu}}{x-z}\,dx, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x(1+x^2)^{-\nu}}{x-z}\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2(1+x^2)^{-\nu}}{x-z}\,dx. \tag{1}$$

Сходимость этих интегралов на бесконечности обеспечивается ограничением $\nu > 5/2$.

Интегралы (1) могут быть использованы для вычисления диэлектрической проницаемости изотропной плазмы, а также тензора диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы.

2. Вычисление главных значений интегралов

Обозначим:

$$I_1(z) = \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+x^2)^{-\nu}}{x-z}\,dx. \tag{2}$$

Используя определение главного значения интеграла, можно произвести следующие преобразования, заменив $x - z = y$ и далее в первом из интегралов $y \to -y$:

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+x^2)^{-\nu}}{x-z}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{-\infty}^{z-\varepsilon} \frac{(1+x^2)^{-\nu}}{x-z}\,dx + \int\limits_{z-\varepsilon}^{\infty} \frac{(1+x^2)^{-\nu}}{x-z}\,dx \right) =$$

$$= \int\limits_{0}^{\infty} \frac{(y^2+z^2+1+2zy)^{-\nu} - (y^2+z^2+1-2zy)^{-\nu}}{y}\,dy -$$

$$- \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{0}^{\varepsilon} \frac{(y^2+z^2+1+2zy)^{-\nu} - (y^2+z^2+1-2zy)^{-\nu}}{y}\,dy.$$

Такое представление законно, так как, разложив числитель подынтегральной функции в ряд в точке $y = 0$, легко убедиться, что первый интеграл после последнего знака равенства существует, поскольку сходится на нижнем пределе, а ν выбрано из условия сходимости интеграла на верхнем пределе, и также при $\varepsilon \to 0$ предел второго интеграла равен 0.

Таким образом, имеем

$$I_1(z) = \int_0^\infty \frac{(y^2 + z^2 + 1 + 2zy)^{-\nu} - (y^2 + z^2 + 1 - 2zy)^{-\nu}}{y}\, dy.$$

Далее вводятся две функции $F_1(t, y, z)$ и $F_2(t, y, z)$:

$$F_1(t, y, z) = (y^2 + z^2 + 1 + ty)^{-\nu},$$
$$F_2(t, y, z) = (y^2 + z^2 + 1 - ty)^{-\nu}.$$

Обозначается:

$$K(t, z) = \int_0^\infty \frac{F_1(t, y, z) - F_2(t, y, z)}{y}\, dy, \tag{3}$$

ясно, что $I(z) = K(2z, z)$ и $K(0, z) = 0$.

Тогда

$$K(t, z) = \int_0^t \frac{\partial K(\tau, z)}{\partial \tau}\, d\tau.$$

Производная $\dfrac{\partial K(t, z)}{\partial t}$ находится дифференцированием интеграла по параметру, ниже дается обоснование законности этого.

$$\frac{\partial K(t, z)}{\partial t} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{-\nu(y^2 + z^2 + 1 + ty)^{-\nu-1} y + \nu(y^2 + z^2 + 1 - ty)^{-\nu-1}(-y)}{y}\, dy =$$

$$= -\nu \int_0^\infty \left((y^2 + z^2 + 1 + ty)^{-\nu-1} + (y^2 + z^2 + 1 - ty)^{-\nu-1}\right) dy. \tag{4}$$

Интеграл (3) рассматривается как функция параметра t на сегменте $[0, 2z]$. В начале этого раздела фактически уже показано, что интеграл (3) сходится и, следовательно, непрерывен на данном сегменте, для его дифференцируемости надо, чтобы последний интеграл в (4) сходился на данном сегменте равномерно.

Для всех $y > 0$ и $t > 0$ выполняются условия:

$$\frac{1}{y^2+z^2+1+ty} \leqslant \frac{1}{y^2+z^2+1} \Longrightarrow \frac{1}{(y^2+z^2+1+ty)^{\nu+1}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{(y^2+z^2+1)^{\nu+1}},$$

и, следовательно, интеграл $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{dy}{(y^2+z^2+1)^{\nu+1}}$ сходится.

Аналогично для всех $y > 0$ и $t \in [0, 2z]$:

$$y^2 - ty \geqslant y^2 - 2zy \Longrightarrow y^2+z^2-ty \geqslant y^2+z^2-2zy = (y-z)^2,$$
$$\frac{1}{y^2+z^2+1-ty} \leqslant \frac{1}{(y-z)^2+1} \Longrightarrow \frac{1}{(y^2+z^2+1-ty)^{\nu+1}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{((y-z)^2+1)^{\nu+1}},$$

и $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{dy}{((y-z)^2+1)^{\nu+1}} = \int\limits_0^\infty \frac{d\tau}{(\tau^2+1)^{\nu+1}} + \int\limits_{-z}^0 \frac{d\tau}{(\tau^2+1)^{\nu+1}}$ — сходится.

Следовательно, последний интеграл в (4) на сегменте $t \in [0, 2z]$ по признаку Вейерштрасса сходится равномерно.

Поэтому:

$$\frac{\partial K(t,z)}{\partial t} = \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} \frac{(y^2+z^2+1+ty)^{-\nu} - (y^2+z^2+1-ty)^{-\nu}}{y}\,dy.$$

Для первого интеграла в (4), произведя замены $\eta = y + \dfrac{t}{2}$, $\xi = \dfrac{\eta}{\sqrt{z^2+1-t^2/4}}$ и обозначив $\xi_0 = \dfrac{t}{\sqrt{4(z^2+1)-t^2}}$, имеем:

$$\int\limits_0^\infty (y^2+z^2+1+ty)^{-\nu-1}dy = \int\limits_0^\infty \left(\left(y+\frac{t}{2}\right)^2 + z^2 + 1 - \frac{t^2}{4}\right)^{-\nu-1} dy =$$

$$= \int\limits_{t/2}^{\infty} \left(\eta^2 + z^2 + 1 - \frac{t^2}{4}\right)^{-\nu-1} d\eta =$$

$$= \left(z^2 + 1 - \frac{t^2}{4}\right)^{-\nu-1} \int\limits_{t/2}^{\infty} \left(\frac{\eta^2}{z^2+1-t^2/4} + 1\right)^{-\nu-1} d\eta =$$

$$= \left(z^2 + 1 - \frac{t^2}{4}\right)^{-\nu-1/2} \int\limits_{\xi_0}^{\infty} (\xi^2+1)^{-\nu-1} d\xi =$$

$$= \left(z^2 + 1 - \frac{t^2}{4}\right)^{-\nu-1/2} \left(\int\limits_{0}^{\infty} (\xi^2+1)^{-\nu-1} d\xi - \int\limits_{0}^{\xi_0} (\xi^2+1)^{-\nu-1} d\xi\right). \qquad (5)$$

Аналогично для второго интеграла в (4):

$$\int\limits_{0}^{\infty} (y^2 + z^2 + 1 - ty)^{-\nu-1} dy = \int\limits_{0}^{\infty} \left(\left(y - \frac{t}{2}\right)^2 + z^2 + 1 - \frac{t^2}{4}\right)^{-\nu-1} dy =$$

$$= \left(z^2 + 1 - \frac{t^2}{4}\right)^{-\nu-1/2} \left(\int\limits_{0}^{\infty} (\xi^2+1)^{-\nu-1} d\xi + \int\limits_{0}^{\xi_0} (\xi^2+1)^{-\nu-1} d\xi\right). \qquad (6)$$

Складывая (5) и (6), используя известные формулы [3] (1.5.2), (1.5.5):

$$\int\limits_{0}^{\infty} (\xi^2+1)^{-\nu-1} d\xi = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\infty} \tau^{-1/2} (\tau+1)^{-\nu-1} d\tau = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \nu + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+1)},$$

и подставляя в (4), получаем:

$$\frac{\partial K(t,z)}{\partial t} = -\nu \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+1)} \left(z^2 + 1 - \frac{t^2}{4}\right)^{-\nu-1/2} =$$

$$= -2^{2\nu+1} \nu \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+1)} (4(z^2+1) - t^2)^{-\nu-1/2}.$$

Обозначив последний сомножитель в предыдущей формуле через $\varphi(t)$, можно представить его в виде биномиального ряда:

$$\varphi(t) = (4(z^2+1) - t^2)^{-\nu-1/2} = \frac{2^{-2\nu-1}}{(z^2+1)^{\nu+1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu+1/2)_k}{k!} \frac{t^{2k}}{(4(z^2+1))^k},$$

где $(a)_k = \dfrac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$ — символ Похгаммера.

Тогда

$$\int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau = \frac{2^{-2\nu-1}}{(z^2+1)^{\nu+1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu+1/2)_k}{k!(2k+1)} \frac{t^{2k+1}}{(4(z^2+1))^k} =$$

$$= \frac{2^{-2\nu-1}t}{(z^2+1)^{\nu+1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu+1/2)_k}{k!(2k+1)} \frac{t^{2k}}{(4(z^2+1))^k}.$$

Поэтому

$$K(t,z) = -\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu)} \frac{t}{(z^2+1)^{\nu+1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu+1/2)_k}{k!(2k+1)} \frac{t^{2k}}{(4(z^2+1))^k}.$$

И тогда окончательно имеем

$$I_1(z) = -2\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu)} \frac{z}{(z^2+1)^{\nu+1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu+1/2)_k}{k!(2k+1)} \left(\frac{z^2}{z^2+1}\right)^k =$$

$$= -2\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu)} \frac{z}{(z^2+1)^{\nu+1/2}}\ {}_2\mathbf{F}_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}, \nu+\frac{1}{2}; & \dfrac{z^2}{z^2+1} \\ \frac{3}{2}; & \end{matrix}\right], \tag{7}$$

где ${}_2\mathbf{F}_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}, \nu+\frac{1}{2}; & \dfrac{z^2}{z^2+1} \\ \frac{3}{2}; & \end{matrix}\right]$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Отметим, что соответствующий гипергеометрический ряд абсолютно и равномерно сходится для всех действительных значений z.

Используя найденное представление (7), легко выразить главные значения второго и третьего интегралов из (1).

$$I_2(z) = \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x(1+x^2)^{-\nu}}{x-z}\,dx = \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-z+z)(1+x^2)^{-\nu}}{x-z}\,dx =$$

$$= -2\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{z^2}{(z^2+1)^{\nu+1/2}}\,{}_2\mathbf{F}_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}, \nu+\frac{1}{2};\\ \frac{3}{2};\end{matrix}\ \frac{z^2}{z^2+1}\right] - \frac{1}{2\nu-1}\right). \quad (8)$$

$$I_3(z) = \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2(1+x^2)^{-\nu}}{x-z}\,dx = \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+1-1)(1+x^2)^{-\nu}}{x-z}\,dx =$$

$$= -2\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu)}\,\frac{z}{(z^2+1)^{\nu+1/2}}\left(\frac{2}{2\nu-1}\,{}_2\mathbf{F}_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}, \nu-\frac{1}{2};\\ \frac{3}{2};\end{matrix}\ \frac{z^2}{z^2+1}\right] -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\nu}\,{}_2\mathbf{F}_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}, \nu+\frac{1}{2};\\ \frac{3}{2};\end{matrix}\ \frac{z^2}{z^2+1}\right]\right). \quad (9)$$

3. Графики и асимптотика

На рис. 1 – рис. 3 приведены графики функций $I_1(z), I_2(z)$ и $I_3(z)$ для некоторых частных значений параметра ν.

Используя линейную связь решений Куммера гипергеометрического уравнения [3] (2.9.33):

$$ {}_2\mathbf{F}_1\left[\begin{matrix}a, b;\\ c;\end{matrix}\ z\right] = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\,{}_2\mathbf{F}_1\left[\begin{matrix}a, b;\\ a+b+1-c;\end{matrix}\ 1-z\right] +$$

$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-z)^{c-a-b}\,{}_2\mathbf{F}_1\left[\begin{matrix}c-a, c-b;\\ c+1-a-b;\end{matrix}\ 1-z\right],$$

можно получить иные представления рассматриваемых интегралов:

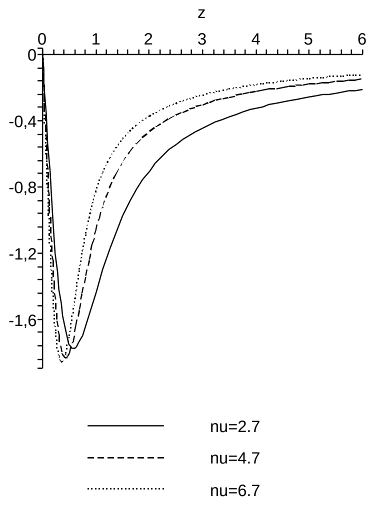

Рис. 1. График $I_1(z)$

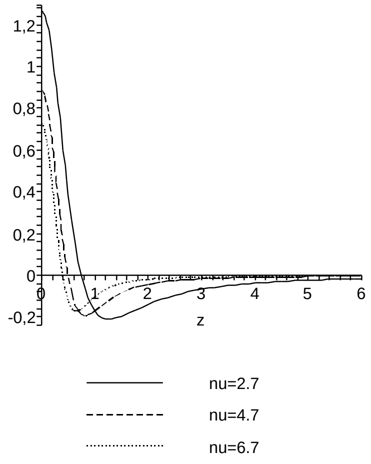

Рис. 2. График $I_2(z)$

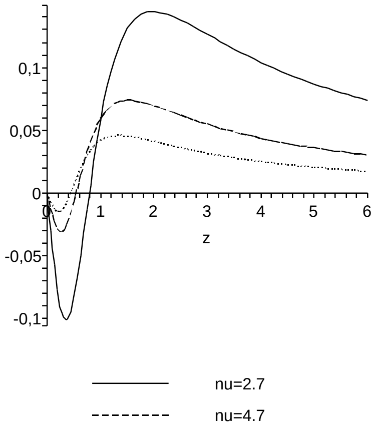

Рис. 3. График $I_3(z)$

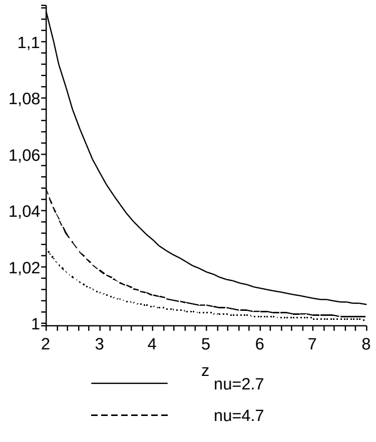

Рис. 4. График I_1/I_{1asymp}

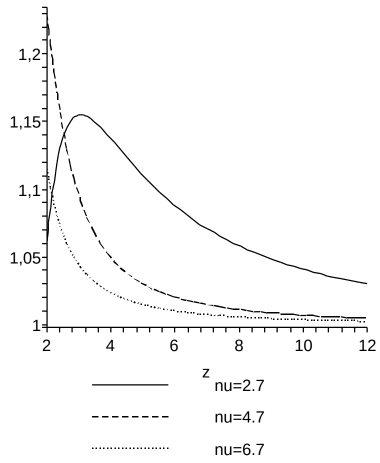

Рис. 5. График I_2/I_{2asymp}

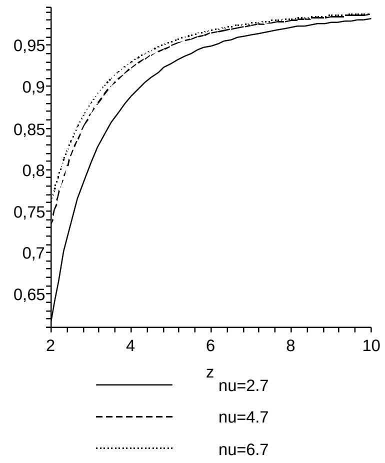

Рис. 6. График I_3/I_{3asymp}

$$I_1(z) = -\pi \frac{\mathrm{tg}\pi\nu}{(z^2+1)^\nu} - \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu-1/2)}{\Gamma(\nu)} \frac{z}{z^2+1}\ {}_2\mathbf{F}_1\left[\begin{matrix}1-\nu, 1; & \frac{1}{}\\ 3/2-\nu; & z^2+1\end{matrix}\right],$$

$$I_2(z) = -\pi\mathrm{tg}\pi\nu \frac{z}{(z^2+1)^\nu} - - \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu-1/2)}{\Gamma(\nu)} \Big[\frac{z^2}{z^2+1}\ {}_2\mathbf{F}_1\left[\begin{matrix}1-\nu, 1; & \frac{1}{}\\ 3/2-\nu; & z^2+1\end{matrix}\right] - 1\Big],$$

$$I_3(z) = -\frac{1}{\nu(\nu-1)}\Big\{\pi\frac{\mathrm{tg}\pi\nu}{(z^2+1)^\nu} +$$

$$+ \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu-1/2)}{\Gamma(\nu)} \frac{z}{z^2+1}\Big[\ {}_2\mathbf{F}_1\left[\begin{matrix}1-\nu, 1; & \frac{1}{}\\ 3/2-\nu; & z^2+1\end{matrix}\right] - \nu\Big]\Big\}, \tag{10}$$

которые обеспечивают более быструю сходимость гипергеометрических рядов для значений $z > 1$.

Переход к выражениям (10) неправомерен при полуцелых значениях ν, но при таких ν гипергеометрические функции в (7)–(9) выражаются через элементарные. Если $\nu + 1/2 = n$, то несложные операции с гипергеометрическими рядами дают, например,

$$I_1(z) = -2\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-1/2)}\Big[z\sum_{m=1}^{n-1}\frac{(2n-3)!!(n-m-1)!}{2^m(2m-2n-1)!!(n-m)!}\frac{1}{(z^2+1)^m} +$$

$$+ \frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{1}{(z^2+1)^{n-1/2}}\ln(\sqrt{z^2+1}+z)\Big].$$

Из этих представлений при любых ν легко выводятся асимптотические выражения для $z \gg 1$:

$$I_1(z) \simeq -\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu-1/2)}{\Gamma(\nu)}\,\frac{1}{z}, \tag{11}$$

$$I_2(z) \simeq -\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu-1/2)}{\Gamma(\nu)}\,\frac{1}{(2\nu-3)z^2}, \tag{12}$$

$$I_3(z) \simeq \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu-1/2)}{\Gamma(\nu+1)}\,\frac{1}{z}. \tag{13}$$

На рис. 4 – рис. 6 приведены графики отношений функций I_1/I_{1asymp}, I_2/I_{2asymp} и I_3/I_{3asymp} для тех же значений параметра ν.

Список литературы

1. **Pierrard V., Lazar M.** Kappa distributions: theory and applications in space plasmas // *Solar Physics. 2010. V. 267. Pp. 153–174.*

2. **Podesta J. J.** Plasma dispersion function for the kappa distribution // *Report NASA/CR-2004-212770. https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi/ntrs.gov/20040161173.pdf (дата обращения: 26.03.2018).*

3. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 296 с.

Summary

Rychkov S. L. Some integral principal values

A method of evaluation of principal values of integrals $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n(1+x^2)^{-\nu}}{x-z}\,dx$, $n = 0, 1, 2$ is considered. The plasma dispersion functions of plasmas having quasipower electron energy distribution can be calculated using integrals of such a type. The suggested method differs from previously known ones and results in formulas more convenient for usage. The integrals are represented in terms of Gauss hypergeometric functions for $z > 0$ and $\nu > 5/2$. Simple asymptotic approximations for values $z \gg 1$ are obtained. Graph plots of the results are given.

Keywords: integral principal value, hypergeometric functions, nonequilibrium plasma, quasipower dispersion function, kappa–dispersion.

References

1. **Pierrard V., Lazar M.** Kappa distributions: theory and applications in space plasmas, *Solar Physics*, 2010, v. 267, pp. 153–174.

2. **Podesta J. J.** Plasma dispersion function for the kappa distribution, *Report NASA/CR-2004-212770. https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa /casi/ntrs.gov/20040161173.pdf (date of the application: 26.03.2018).*

3. **Bateman H., Erdelyi A.** *Vysshiye transtsendentnyye funktsii. Gipergeometricheskaya funktsiya. Funktsii Lezhandra* (Higher transcendental functions. Hypergeometric function. Legendre functions), M, Science, 1965, 296 p.

Для цитирования: Рычков С. Л. Вычисление главных значений некоторых интегралов // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 1 (26). С. 47–57.*

For citation: Rychkov S. L. Some integral principal values, *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2018, 1 (26), pp. 47–57.

ВятГУ *Поступила 26.03.2018*