ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 1 (26). 2018

УДК 51-73, 537.86, 537.876.22, 535.131

О ПРИМЕНЕНИИ ОПЕРАТОРНОГО ФОРМАЛИЗМА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ БИГИРОТРОПНЫХ СРЕД[1]

П. А. Макаров, В. И. Щеглов

Развит операторный формализм к рассмотрению электромагнитных волновых процессов в стационарных, однородных, бигиротропных средах. Выведены волновые уравнения в общем случае, а также для волн, распространяющихся параллельно и перпендикулярно оси гиротропии. Аналитически получены решения волнового уравнения и дисперсионные соотношения для гироэлектрической и гиромагнитной волн. Указан общий ход решения для волн, распространяющихся параллельно оси гиротропии.
Ключевые слова: электродинамика, уравнения Максвелла, бигиротропная среда, распространение электромагнитных волн.

1. Введение

Исследование электродинамических свойств неоднородных, нестационарных, неизотропных сред и сложных структур на их основе играет важнейшую роль в развитии современной науки и техники [1].

Необычными оптическими свойствами могут обладать и стационарные среды с одновременно отрицательными диэлектрической и магнитной проницаемостью [2]. Несмотря на то что в природе таких сред не существует, хорошо известно, что имеется возможность реализовать их искусственно на основе композитных материалов [3,4]. Структура таких материалов формируется из двух подрешёток, одна из которых обладает гиротропией по отношению к электрическим свойствам, вторая является магнитогиротропной.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №17-02-01138 и №17-57-150001).

Ввиду многообразия возможных в них электродинамических эффектов, бигиротропные среды вызывают большой интерес как сами по себе [5, 6], так и в составе разнообразных комплексных систем, таких как ферромагнитные сверхрешётки [7], волноводы на основе магнитооптических слоёв и фотонных кристаллов [8], тонкоплёночные периодические структуры магнетик/полупроводник [9], магнонные кристаллы [10] и многие другие.

Вместе с тем теория генерации, распространения, затухания и преобразования электромагнитных, спиновых и магнитостатических волн в бигиротропных средах далека от завершения. В первую очередь это обстоятельство определяется высокой сложностью уравнений, описывающих электромагнитное поле в таких средах [1,3]. Известно, что аналитическими методами крайне затруднительно решить задачу о распространении электромагнитной волны в бигиротропной среде для случая произвольной геометрии. В связи с этим большое значение имеет развитие новых методов, позволяющих относительно просто формализовать полную электродинамическую задачу в бигиротропной среде, а также получить аналитическое решение для важнейших частных случаев.

2. Общие уравнения

Рассмотрим стационарную и однородную среду в отсутствии сторонних токов $\mathbf{j} = 0$ и зарядов $\rho = 0$. Введём декартову систему координат $Oxyz$ и предположим, что в среде действуют постоянные однородные электрическое $\mathbf{E}_0 \parallel Oz$ и магнитное $\mathbf{H_0} \parallel Oz$ поля. Таким образом, среда является бигиротропной с осью гиротропии вдоль оси Oz. Общая геометрия задачи приведена на рис. 1, где линией AB показана ось гиротропии.

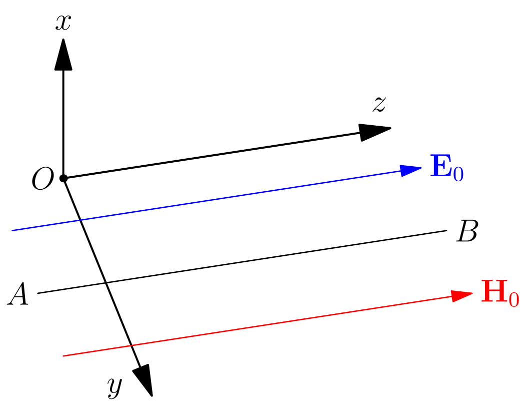

Рис. 1. Общая геометрия задачи

В рассматриваемой геометрии тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\mu}$ имеют вид [11]:

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & i\varepsilon_a & 0 \\ -i\varepsilon_a & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_\parallel \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Компоненты тензоров материальных параметров в общем случае могут быть комплексными, никаких специальных предположений, связанных с этим, не делается.

Уравнения Максвелла в нашей задаче имеют вид [12]:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{2}$$

В системе (2) $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — это векторы напряжённостей электрического и магнитного полей, а $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ — соответствующие им индукции. Представим произвольную компоненту электромагнитного поля в виде произведения $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$. Тогда уравнения Максвелла (2) для пространственных составляющих поля примут вид:

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\frac{\omega}{c}\tilde{\mu}\mathbf{H}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = -i\frac{\omega}{c}\tilde{\varepsilon}\mathbf{E}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{3}$$

Вычислим индукции магнитного и электрического полей:

$$\mathbf{B} = \tilde{\mu}\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_\parallel \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu H_x + i\mu_a H_y \\ -i\mu_a H_x + \mu H_y \\ \mu_\parallel H_z \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\mathbf{D} = \tilde{\varepsilon}\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon & i\varepsilon_a & 0 \\ -i\varepsilon_a & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon E_x + i\varepsilon_a E_y \\ -i\varepsilon_a E_x + \varepsilon E_y \\ \varepsilon_\parallel E_z \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Подставим индукции, используем обозначение $k_0 = \dfrac{\omega}{c}$ и раскроем покомпонентно уравнения системы (3):

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} - i\mu k_0 H_x + \mu_a k_0 H_y = 0, & (6.1)\\
\dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} - \mu_a k_0 H_x - i\mu k_0 H_y = 0, & (6.2)\\
\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} - i\mu_\parallel k_0 H_z = 0, & (6.3)\\
\dfrac{\partial H_z}{\partial y} - \dfrac{\partial H_y}{\partial z} + i\varepsilon k_0 E_x - \varepsilon_a k_0 E_y = 0, & (6.4)\\
\dfrac{\partial H_x}{\partial z} - \dfrac{\partial H_z}{\partial x} + \varepsilon_a k_0 E_x + i\varepsilon k_0 E_y = 0, & (6.5)\\
\dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{\partial H_x}{\partial y} + i\varepsilon_\parallel k_0 E_z = 0, & (6.6)\\
\varepsilon\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y}\right) + i\varepsilon_a\left(\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y}\right) + \varepsilon_\parallel\dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0, & (6.7)\\
\mu\left(\dfrac{\partial H_x}{\partial x} + \dfrac{\partial H_y}{\partial y}\right) + i\mu_a\left(\dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{\partial H_x}{\partial y}\right) + \mu_\parallel\dfrac{\partial H_z}{\partial z} = 0. & (6.8)
\end{cases}
$$

Система (6) — это восемь уравнений для шести компонент полей и для трёх производных от каждой компоненты по трём координатам, т. е. всего для восемнадцати производных. Полное решение этой системы должно представлять собой шесть функций (по одной для каждой компоненты поля), содержащих восемнадцать произвольных постоянных (по одной для каждой производной). Эти постоянные могут быть определены из граничных условий. Поскольку на одной поверхности могут быть заданы шесть граничных условий — для двух касательных компонент напряжённости поля и одной нормальной для индукции, а пространство содержит три взаимно перпендикулярные плоскости, то эти три плоскости могут дать восемнадцать условий для определения восемнадцати произвольных постоянных. Таким образом, в общем случае система может быть полностью определённой.

Исключим из системы (6) все поля, кроме E_z и H_z. Для этого выполним следующие преобразования.

1. Дифференцируем (6.1) по y:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial y\,\partial z} - i\mu k_0 \frac{\partial H_x}{\partial y} + \mu_a k_0 \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0. \tag{7}$$

2. Дифференцируем (6.2) по x:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \mu_a k_0 \frac{\partial H_x}{\partial x} - i\mu k_0 \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0. \tag{8}$$

3. Вычитаем (8) из (7):

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}\right) - i\mu k_0 \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x}\right) + \\ + \mu_a k_0 \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y}\right) = 0.\end{gathered} \tag{9}$$

4. Подставляя (6.3) в (6.7), получим:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon}\mu_\parallel k_0 H_z - \frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon}\frac{\partial E_z}{\partial z}. \tag{10}$$

5. Непосредственно из (6.6) имеем:

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} = i\varepsilon_\parallel k_0 E_z. \tag{11}$$

6. Подставляя (6.6) в (6.8), получим:

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = -\frac{\mu_a}{\mu}\varepsilon_\parallel k_0 E_z - \frac{\mu_\parallel}{\mu}\frac{\partial H_z}{\partial z}. \tag{12}$$

7. Заменяем все круглые скобки в (9) с помощью (10), (11) и (12):

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon}\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k_0^2 \varepsilon_\parallel \frac{\mu^2 - \mu_a^2}{\mu} E_z - \\ - k_0 \mu_\parallel \left(\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon} + \frac{\mu_a}{\mu}\right)\frac{\partial H_z}{\partial z} = 0.\end{gathered} \tag{13}$$

8. Теперь продифференцируем (6.4) по y:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial y\,\partial z} + i\varepsilon k_0 \frac{\partial E_x}{\partial y} - \varepsilon_a k_0 \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0. \tag{14}$$

9. Дифференцируем (6.5) по x:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \varepsilon_a k_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} + i\varepsilon k_0 \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0. \tag{15}$$

10. Вычитаем (15) из (14):

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y}\right) + i\varepsilon k_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}\right) - \\ - \varepsilon_a k_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}\right) = 0. \tag{16}$$

11. Подставляя (6.6) в (6.8), получим:

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = -\frac{\mu_a}{\mu}\varepsilon_\parallel k_0 E_z - \frac{\mu_\parallel}{\mu}\frac{\partial H_z}{\partial z}. \tag{17}$$

12. Непосредственно из (6.3) имеем:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = -i\mu_\parallel k_0 H_z. \tag{18}$$

13. Подставляя (6.3) в (6.7), получим:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon}\mu_\parallel k_0 H_z - \frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon}\frac{\partial E_z}{\partial z}. \tag{19}$$

14. Заменяем все круглые скобки в (16) с помощью (17), (18) и (19):

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\mu_\parallel}{\mu}\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k_0^2\mu_\parallel\frac{\varepsilon^2 - \varepsilon_a^2}{\varepsilon}H_z + \\ + k_0\varepsilon_\parallel\left(\frac{\mu_a}{\mu} + \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon}\right)\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \tag{20}$$

Уравнения (13) и (20) образуют систему двух уравнений для компонент поля E_z и H_z. Эти уравнения удобно записать с помощью следующих обозначений:

$$\begin{cases} a_m = \dfrac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon}, & (21.1) \\ b_m = k_0^2\varepsilon_\parallel\dfrac{\mu^2 - \mu_a^2}{\mu}, & (21.2) \\ c_m = k_0\mu_\parallel\left(\dfrac{\varepsilon_a}{\varepsilon} + \dfrac{\mu_a}{\mu}\right), & (21.3) \\ a_e = \dfrac{\mu_\parallel}{\mu}, & (21.4) \\ b_e = k_0^2\mu_\parallel\dfrac{\varepsilon^2 - \varepsilon_a^2}{\varepsilon}, & (21.5) \\ c_e = k_0\varepsilon_\parallel\left(\dfrac{\varepsilon_a}{\varepsilon} + \dfrac{\mu_a}{\mu}\right). & (21.6) \end{cases}$$

С этими обозначениями уравнения (13) и (20) примут вид:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + a_m \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + b_m\right) E_z - c_m \dfrac{\partial H_z}{\partial z} = 0, & (22.1) \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + a_e \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + b_e\right) H_z + c_e \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0. & (22.2) \end{cases}$$

Полученная окончательная форма уравнений Максвелла (22) представляет собой систему двух дифференциальных уравнений второго порядка. Данную систему достаточно сложно разрешить в общем виде относительно полей E_z и H_z, однако эта задача легко решается с помощью операторного подхода.

3. Операторная форма уравнений

Введём дифференциальные операторы

$$\begin{cases} \widehat{L}_e = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + a_e \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + b_e\right), & (23.1) \\ \widehat{L}_m = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + a_m \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + b_m\right), & (23.2) \\ \widehat{D}_e = c_e \dfrac{\partial}{\partial z}, & (23.3) \\ \widehat{D}_m = c_m \dfrac{\partial}{\partial z}, & (23.4) \end{cases}$$

с помощью которых систему уравнений Максвелла (22) можно привести к виду:

$$\begin{cases} \widehat{L}_e E_z - \widehat{D}_m H_z = 0, & (24.1) \\ \widehat{L}_m H_z + \widehat{D}_e E_z = 0. & (24.2) \end{cases}$$

Из определений (23) очевидно, что все операторы $\widehat{L}_e$, $\widehat{L}_m$, $\widehat{D}_e$ и $\widehat{D}_m$ — линейные и попарно коммутирующие. Коммутативность операторов является следствием однородности среды.

Подействуем оператором $\widehat{L}_m$ на уравнение (24.1), учтём коммутативность операторов $\widehat{L}_m$ и $\widehat{D}_m$ и используем уравнение (24.2). В результате получим уравнение для поля E_z. Аналогично получается уравнение для поля H_z.

$$\begin{cases} \left(\widehat{L}_m \widehat{L}_e + \widehat{D}_m \widehat{D}_e\right) E_z = 0, & (25.1) \\ \left(\widehat{L}_e \widehat{L}_m + \widehat{D}_e \widehat{D}_m\right) H_z = 0. & (25.2) \end{cases}$$

Вследствие коммутативности операторов $\widehat{L}_e$, $\widehat{L}_m$, $\widehat{D}_e$ и $\widehat{D}_m$ очевидно, что оба уравнения системы (25) абсолютно эквивалетны и их решения идентичны. Поэтому не будем в дальнейшем различать тип поля E_z или H_z и вместо них будем использовать обобщающий символ Ψ. Таким образом, основное волновое уравнение в операторной форме для бигиротропной среды в нашем случае имеет вид:

$$\left(\widehat{L}_m\widehat{L}_e + \widehat{D}_m\widehat{D}_e\right)\Psi = 0. \tag{26}$$

Уравнение (26) — это линейное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка. В общем виде его решение довольно затруднительно и трудоёмко, однако вполне возможно [13]. Теперь остановимся более подробно на двух важнейших частных случаях.

3.1. Волна, распространяющаяся вдоль оси гиротропии. Рассмотрим электромагнитную волну, распространяющуюся продольно оси гиротропии, т. е. будем считать, что $\Psi = \Psi(z)$. В этом случае операторы (23) принимают вид:

$$\begin{cases} \widehat{L}_{ez} = \left(a_e\dfrac{d^2}{dz^2} + b_e\right), & (27.1)\\ \widehat{L}_{mz} = \left(a_m\dfrac{d^2}{dz^2} + b_m\right), & (27.2)\\ \widehat{D}_{ez} = c_e\dfrac{d}{dz}, & (27.3)\\ \widehat{D}_{mz} = c_m\dfrac{d}{dz}, & (27.4)\end{cases}$$

а волновое уравнение (26) запишется так:

$$a_e a_m\frac{d^4\Psi(z)}{dz^4} + (a_e b_m + a_m b_e + c_e c_m)\frac{d^2\Psi(z)}{dz^2} + b_e b_m\Psi(z) = 0. \tag{28}$$

Удобно ввести следующие обозначения:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{a_e b_m + a_m b_e + c_e c_m}{a_e a_m}, & (29.1)\\ \beta = \dfrac{b_e b_m}{a_e a_m}, & (29.2)\end{cases}$$

с помощью которых характеристический полином уравнения (28) примет вид:

$$\lambda^4 + \alpha\lambda^2 + \beta = 0. \tag{30}$$

Корнями биквадратного уравнения (30) являются значения

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}}, \tag{31}$$

а значит, общее решение волнового уравнения (28) можно построить известными методами теории дифференциальных уравнений [14].

Заметим, что коэффициенты (29), выраженые через основные параметры задачи, имеют вид:

$$\begin{cases} \alpha = k_0^2\varepsilon\mu\left[2 - \left(\dfrac{\mu_a^2}{\mu^2} + \dfrac{\varepsilon_a^2}{\varepsilon^2}\right) + k_0^2\left(\dfrac{\mu_a}{\mu} + \dfrac{\varepsilon_a}{\varepsilon}\right)^2\right], & (32.1) \\ \beta = k_0^4(\varepsilon^2 - \varepsilon_a^2)(\mu^2 - \mu_a^2). & (32.2) \end{cases}$$

В качестве проверки полученных результатов проведём вычисления для изотропной среды, т. е. положим $\varepsilon_a = \mu_a = 0$, $\varepsilon_\parallel = \varepsilon$ и $\mu_\parallel = \mu$. При этом из (32) очевидно, что $\alpha = 2\varepsilon\mu k_0^2$ и $\beta = \varepsilon^2\mu^2 k_0^4$, а значит, $\lambda = \pm k_0\sqrt{-\varepsilon\mu}$, т. е. имеется два двухкратно вырожденных корня характеристического полинома. Таким образом, общее решение уравнения (26) в данном случае имеет вид:

$$\Psi(z) = C_1 e^{k_0\sqrt{-\varepsilon\mu}z} + C_2 e^{-k_0\sqrt{-\varepsilon\mu}z} + C_3 z e^{k_0\sqrt{-\varepsilon\mu}z} + C_4 z e^{-k_0\sqrt{-\varepsilon\mu}z}. \tag{33}$$

Очевидно, что третье и четвертое слагаемые в этом решении — неограниченные функции, поэтому следует положить неопределённые множители $C_3 = C_4 = 0$. Оставшиеся два слагаемых в (33) представляют собой волны, распространяющиеся в прямом и обратном направлениях, причём простейший вид эти волны имеют в бездиссипативной среде, т. е. при $\varepsilon, \mu \in R$. При этом волны могут распространяться только в таких средах, для которых $\varepsilon\mu > 0$. Тогда $\sqrt{-\varepsilon\mu} = i\sqrt{\varepsilon\mu} = in$, где $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ — показатель преломления среды. При учёте диссипации $\varepsilon, \mu \in C$ первые слагаемые в (33) будут описывать затухающие волны.

Все эти выводы хорошо известны в электродинамике [1, 3, 5, 11, 12] и свидетельствуют о справедливости полученного уравнения и его решения и в случае бигиротропной среды.

3.2. Волна, распространяющаяся перпендикулярно оси гиротропии. Предположим, что распределение полей от координаты z не зависит, т. е. $\Psi = \Psi(x, y)$. В таком случае операторы (23) принимают вид:

$$\begin{cases} \widehat{L}_{exy} = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + b_e \right), & (34.1) \\ \widehat{L}_{mxy} = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + b_m \right), & (34.2) \\ \widehat{D}_{exy} = \widehat{D}_{mxy} = 0, & (34.3) \end{cases}$$

а волновое уравнение (26) запишется так:

$$\widehat{L}_{mxy}\widehat{L}_{exy}\Psi(x,y) = 0. \tag{35}$$

В силу коммутативности операторов $\widehat{L}_{mxy}$ и $\widehat{L}_{exy}$ очевидно, что общее решение уравнения (37) следует искать в виде линейной комбинации

$$\Psi(x,y) = G_e\Psi_e(x,y) + G_m\Psi_m(x,y), \tag{36}$$

где $\Psi_e(x,y)$ и $\Psi_m(x,y)$ — это решения уравнений

$$\begin{cases} \widehat{L}_{exy}\Psi_e(x,y) = 0, & (37.1) \\ \widehat{L}_{mxy}\Psi_m(x,y) = 0. & (37.2) \end{cases}$$

Эти уравнении «расцеплены», каждое из них описывает отдельную волну и эти волны могут распространяться независимо. Назовём волну, описываемую уравнением (37.1), — «гироэлектрической», а (37.2) — «гиромагнитной» [1]. Решения уравнений (37) легко найти методом Фурье [15]:

$$\begin{cases} \Psi_e(x,y) = \left[A_e e^{ik_x^e x} + B_e e^{-ik_x^e x}\right] \cdot \left[C_e e^{ik_y^e y} + D_e e^{-ik_y^e y}\right], & (38.1) \\ \Psi_m(x,y) = \left[A_m e^{ik_x^m x} + B_m e^{-ik_x^m x}\right] \cdot \left[C_m e^{ik_y^m y} + D_m e^{-ik_y^m y}\right]. & (38.2) \end{cases}$$

Дисперсионные соотношения для гироэлектрической и гиромагнитной волн при этом имеют вид:

$$\begin{cases} (k_x^m)^2 + (k_y^m)^2 = k_0^2 \varepsilon_\parallel \dfrac{\mu^2 - \mu_a^2}{\mu}, & (39.1) \\ (k_x^e)^2 + (k_y^e)^2 = k_0^2 \mu_\parallel \dfrac{\varepsilon^2 - \varepsilon_a^2}{\varepsilon}. & (39.2) \end{cases}$$

Следует заметить, что и эти результаты вполне согласуются с известными данными о распространении электромагнитных волн в бигиротропных средах [1,3,5,11]. Вместе с тем предложенный операторный метод позволил получить решение данной задачи более простым путём, чем известные методы.

4. Выводы

Таким образом, в данной работе развит операторный подход к рассмотрению электромагнитных волновых процессов в стационарных, однородных, бигиротропных средах. С помощью этого метода получены волновые уравнения в общем случае, а также для волн, распространяющихся параллельно и перпендикулярно оси гиротропии. В явном виде получены решения и дисперсионные соотношения для гироэлектрической и гиромагнитной волн, а также указан ход получения решения для волн, распространяющихся параллельно оси гиротропии. Выполнена проверка полученных решений в случае изотропной среды.

С помощью описанного формализма можно построить решения для волн, распространяющихся в произвольном направлении по отношению к оси гиротропии. Задача при этом в общем виде сводится к дифференциальному уравнению в частных производных четвёртого порядка. Также существует возможность применить разработанный метод к электродинамике неоднородных сред с произвольной взаимной ориентацией осей электрической и магнитной гиротропии.

Список литературы

1. **Шавров В. Г., Щеглов В. И.** Магнитостатические и электромагнитные волны в сложных структурах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. 360 с.

2. **Веселаго В. Г.** Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ε и μ // *УФН. 1967. Т. 92. № 3. С. 517–526.*

3. **Виноградов А. П.** Электродинамика композитных материалов. М.: УРСС, 2001. 207 с.

4. **Щеглов В. И.** Расчет динамической проницаемости среды, содержащей магнитную и электрическую компоненты // *Журнал радиоэлектроники. 2001. № 7. URL: http://jre.cplire.ru/win/aug01/4/text.html (дата обращения: 29.03.2018).*

5. **Ерицян О. С.** Оптические задачи электродинамики гиротропных сред // *УФН. 1982. Т. 138. № 4. С. 645–674.*

6. **Barta O., et al.** Magneto-optics in bi-gyrotropic garnet waveguide // *Opto-electronics review. Vol. 9. № 3. 2001. Pp. 320–325.*

7. **Bukhanko A. F., Sukstanskii A. L.** Optics of a ferromagnetic superlattice with noncollinear orientation of equilibrium magnetization vectors in layers // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials. Vol. 250. 2002. Pp. 338–352.*

8. **Dadoenkova N. N., et al.** Complex waveguide based on a magneto-optic layer and a dielectric photonic crystal // *Superlattices and Microstructures, vol. 100, 2016, pp. 45–56.*

9. **Eliseeva S. V., Sannikov D. G., Sementsov D. I.** Anisotropy, gyrotropy and dispersion properties of the periodical thin-layer structure of magnetic-semiconductor // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials. Vol. 322. 2010. Pp. 3807–3816.*

10. **Rychly J. et al.** Magnonic crystals — Prospective structures for shaping spin waves in nanoscale // *Low Temperature Physics. Vol. 41. № 10. 2015. Pp. 745–759.*

11. **Гуревич А. Г., Мелков Г. А.** Магнитные колебания и волны. М.: Наука, 1994. 464 с.

12. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика: Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 656 с.

13. **Greer J. B., Bertozzi A. L., Sapiro G.** Fourth order partial differential equations on general geometries // *Journal of Computational Physics. Vol. 216. № 1. 2006. Pp. 216–246.*

14. **Эльсгольц Л. Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: УРСС, 2002. 320 с.

15. **Кузнецов Е. А., Шапиро Д. А.** Методы математической физики : курс лекций. Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2011. Ч. I. 131 с.

Summary

Makarov P. A., Shcheglov V. I. On the application of the operators formalism to the solution of the electrodynamics problems for bigyrotropic media

The operator formalism is developed to consider electromagnetic wave processes in stationary, homogeneous, bihyrotropic media. Wave equations are obtained in the general case, and also for waves propagating in parallel

and perpendicular to the gyrotropy axis. The solutions of the wave equation and the dispersion relations for the gyroelectric and gyromagnetic waves are analytically obtained. The general method of the solution for waves propagating parallel to the gyrotropy axis is showed.
Keywords: electrodynamics, Maxwell's equations, bihyrotropic medium, propagation of electromagnetic waves.

References

1. **Shavrov V. G., Shcheglov V. I.** *Magnitostaticheskiye i elektromagnitnyye volny v slozhnykh strukturakh* (Magnetostatic and electromagnetic waves in complex structures), M.: FIZMATLIT, 2017, 360 p.

2. **Veselago V. G.** Elektrodinamika veshchestv s odnovremenno otritsatel'nymi znacheniyami ε i μ (The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ε μ), *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, v. 92, № 3, 1967, pp. 517–526.

3. **Vinogradov A. P.** *Elektrodinamika kompozitnykh materialov* (Electrodynamics of composite materials), M.: URSS, 2001, 207 p.

4. **Shcheglov V. I.** Raschet dinamicheskoy pronitsayemosti sredy, soderzhashchey magnitnuyu i elektricheskuyu komponenty (The dynamic permittivity calculation of media having magnetic and electric components), *Journal of radio electronics*, URL: http://jre.cplire.ru/win/contents.html: № 7. 2001. URL: http://jre.cplire.ru/win/aug01/4/text.html (date of the application: 29.03.2018).

5. **Eritsyan O. S.** Opticheskiye zadachi elektrodinamiki girotropnykh sred (Optical problems in the electrodynamics of gyrotropic media), *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, v. 138, № 4, 1982, pp. 645–674.

6. **Barta O., et al.** Magneto-optics in bi-gyrotropic garnet waveguide, *Opto-electronics review*, vol. 9, № 3, 2001, pp. 320–325.

7. **Bukhanko A. F., Sukstanskii A. L.** Optics of a ferromagnetic superlattice with noncollinear orientation of equilibrium magnetization vectors in layers, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 250, 2002, pp. 338–352.

8. **Dadoenkova N. N., et al.** Complex waveguide based on a magnetooptic layer and a dielectric photonic crystal, *Superlattices and Microstructures*, vol. 100, 2016, pp. 45–56.

9. **Eliseeva S. V., Sannikov D. G., Sementsov D. I.** Anisotropy, gyrotropy and dispersion properties of the periodical thin-layer structure of magnetic-semiconductor, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 322, 2010, pp. 3807–3816.

10. **Rychly J. et al.** Magnonic crystals — Prospective structures for shaping spin waves in nanoscale, *Low Temperature Physics*, vol. 41, № 10, 2015, pp. 745–759.

11. **Gurevich A. G., Melkov G. A.** *Magnitnyye kolebaniya i volny* (Magnetic oscillations and waves), M.: Nauka, 1994, 464 p.

12. **Landay L. D., Lifhitz E. M.** *Teoreticheskaya fizika: T. VIII. Elektrodinamika sploshnykh sred* (Theoretical physics: Vol. VIII. Electrodynamics of Continuous Media), M.: FIZMATLIT, 2005, 656 p.

13. **Greer J. B., Bertozzi A. L., Sapiro G.** Fourth order partial differential equations on general geometries, *Journal of Computational Physics*, vol. 216, № 1, 2006, pp. 216–246.

14. **Elsgolz L. E.** *Differentsial'nyye uravneniya i variatsionnoye ischisleniye* (Differential equations and the calculus of variations), M.: URSS, 2002, 320 p.

15. **Kuznetcov E. A., Shapiro D. A.** *Metody matematicheskoy fiziki: kurs lektsiy* (Methods of mathematical physics: Course of lectures), P.I, Novosibirsk State University, 2011, 131 p.

Для цитирования: Макаров П. А., Щеглов В. И. О применении операторного формализма к решению задач электродинамики бигиротропных сред // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 1 (26). С. 3–16.*

For citation: Makarov P. A., Shcheglov V. I. On the application of the operators formalism to the solution of the electrodynamics problems for bigyrotropic media, *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2018, 1 (26), pp. 3–16.

СГУ им. Питирима Сорокина,
ФГБУН ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН *Поступила 29.03.2018*