НАСТАВНИК-УЧЕНИК

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (25). 2017

УДК 004.272.32

ЕВКЛИДОВА И НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЭКСКУРС ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

Н. И. Попов, Е. П. Габова

В статье описаны элементы евклидовой и неевклидовой геометрии на доступном для школьников математическом языке. Приведены примеры моделей геометрии Н. И. Лобачевского. Работа направлена на расширение научного мировоззрения и математического кругозора учащихся средних общеобразовательных учреждений.

Ключевые слова: евклидова геометрия, неевклидова геометрия, модели геометрии Лобачевского.

Переход на федеральный государственный образовательный стандарт (ФГОС) основного общего и среднего общего образования требует разработки уроков и внеклассных мероприятий, направленных на творческое развитие талантливой молодежи. Элективные курсы и дополнительные школьные занятия по геометрии расширяют и углубляют математические знания учащихся, развивают их логическое мышление и геометрическую интуицию.

Современная программа по математике для общеобразовательных учреждений в разделе «Математика в историческом развитии» содержит материал о выдающихся учёных Евклиде Александрийском и Н. И. Лобачевском. В учебно-методических пособиях для средних общеобразовательных учреждений материал по теме «Н. И. Лобачевский и его вклад в науку» присутствует, но не в достаточном объёме. Имеющиеся в интернет-источниках научные статьи иногда являются сложными для восприятия учащимися и даже учителями, поэтому важны доступные для понимания школьников формы изложения научно-познавательной информации [1].

Евклидова геометрия (элементарная геометрия) — раздел математики, основанный на системе аксиом, впервые изложенный в важнейшем труде Евклида Александрийского «Начала» («Элементы») [3], написанном около 300 г. до н. э. Работа «Начала» оказала существенное влияние на развитие математической науки вплоть до XIX века, в тринадцати книгах Евклида систематически изложены различные разделы математики, являвшиеся итогом ее развития до появления трудов Евклида. В книгах I–IV отражены знания по геометрии, их содержание восходило к трудам учёных пифагорейской школы, в книге V изложено учение о пропорциях, которое исходит от Евдокса Книдского, в более поздних трудах содержалось учение о числах, представляющее собой разработки пифагорейских первоисточников, а научные труды X–XIII посвящены разделам стереометрии и теории иррациональности.

В [3] сформулированы следующие пять постулатов: «допустим:

1. Что от всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию.

2. И что ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.

3. И что из всякого центра и всяким раствором может быть описан круг.

4. И что все прямые углы равны между собой.

5. И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух, прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы, меньшие двух прямых».

Научный труд «Начала» был построен на основе аксиом, постулатов и определений. Никто из учёных не сомневался в истинности постулатов Евклида, включая пятый постулат. Следует отметить, что уже с древности именно постулат о параллельных прямых привлек к себе серьезное внимание некоторых геометров, которые считали его наличие неестественным среди других утверждений. Вероятно, что это было связано с относительно меньшей наглядностью и очевидностью пятого постулата: в неявном виде он предполагает достижимость любых, сколь угодно далеких частей плоскости, выражая при этом свойство, которое обнаруживается только при бесконечном продолжении прямых линий.

Возможно, что сам Евклид пытался доказать пятый постулат о параллельных прямых. В пользу этого говорит тот факт, что первые двадцать восемь предложений труда «Начала» не опираются на указанный постулат. Знаменитый математик как бы старался отодвинуть использование пятого постулата до тех пор, пока его применение не станет существенно необходимым. Некоторые математики пытались доказать постулат о параллельных прямых, применяя другие теоремы и постулаты. Но, к сожалению, все такие попытки оказались неудачными. Общий недостаток таких подходов заключался в том, что в доказательстве утверждений неявно применялось какое-нибудь предположение, равносильное доказываемому постулату. Были и сторонники такого подхода: математики предлагали по-другому определить параллельные прямые или же заменить пятый постулат каким-нибудь, по их мнению, более очевидным утверждением.

Отметим, что в геометрии Лобачевского не выполняется пятый постулат Евклида (аксиома о параллельных прямых). Утверждается, что существует бесконечное множество прямых, проходящих через не лежащую на прямой l точку и не пересекающих l.

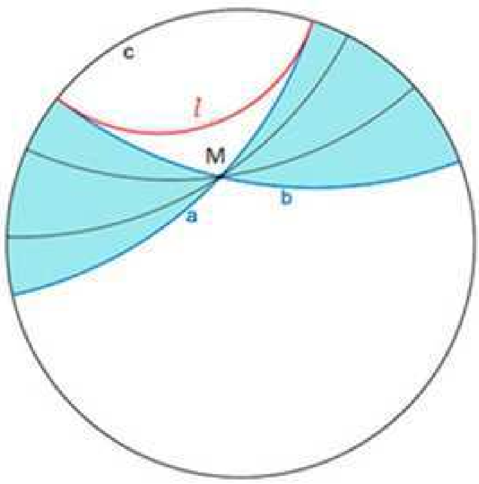

Рис. 1. Модель Пуанкаре

Геометрию Лобачевского можно реализовать на обычной евклидовой плоскости [2]. Воспользуемся моделью Пуанкаре для круга (рис. 1). В данной модели «плоскостью» называется внутренность обычного круга радиуса 1, а «прямыми» — дуги окружностей, перпендикулярных границе круга (окружности называются перпендикулярными, если перпендикулярны их касательные в точках пересечения). При этом граница круга называется «абсолютом» и считается не принадлежащей плоскости. Нетрудно заметить, что через точку M, не лежащую на прямой l, действительно можно провести множество непересекающихся прямых, которые находятся внутри угла, образованного прямыми a и b. Параллельными (в указанной модели) называются прямые, имеющие общую точку на абсолюте. Например, прямые l и a, а также l и b параллельны между собой, но при этом прямые a и b не являются параллельными (см. рис. 1).

Расстояние между точками в плоскости Лобачевского можно вычислить следующим образом. Если Q, R — точки на плоскости, а P, S — точки, в которых прямая, проходящая через Q и R, пересекает абсолют, то искомое расстояние между Q и R равно

$$d(Q,R) = ln\left(\frac{PR}{PQ} : \frac{RS}{QS}\right), \tag{1}$$

где PR, RS, PQ, QS — расстояния между двумя точками.

Опираясь на рис. 1, отметим, что параллельные прямые сближаются друг с другом с одного конца и бесконечно отдаляются с другого. Если же прямые не параллельны и не пересекаются, то точки, движущиеся по этим прямым к абсолюту, всегда бесконечно отдаляются. Отметим, что при приближении к абсолюту точка бесконечно удаляется от центра круга.

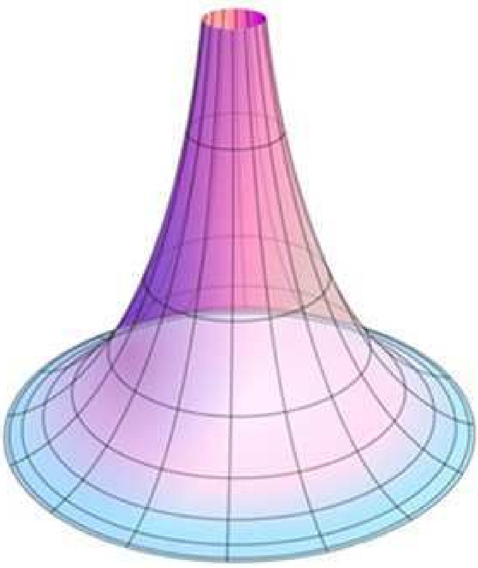

Рис. 2. Псевдосфера

Другая реализация геометрии Лобачевского возможна на специальной поверхности в трехмерном пространстве — псевдосфере (см. рис. 2).

Псевдосфера представляет собой поверхность вращения кривой

$$z = ln\left(tg\frac{t}{2}\right) + cos(t), \quad x = sin(t)$$

вокруг оси Oz. Прямыми Лобачевского на указанной поверхности являются геодезические линии, т. е. линии кратчайшей длины, соединяющие две заданные точки. Геодезическую линию можно получить, натянув по поверхности нить. Большая часть таких геодезических линий на псевдосфере представляет собой спирали, навивающиеся на так называемую «граммофонную трубу» (см. рис. 2). Но геодезическими также являются сечения псевдосферы плоскостями, проходящими через ее ось вращения. В рассматриваемой модели расстояния определяются как обычные евклидовы длины геодезических линий.

Отметим, что кроме модели Пуанкаре и псевдосферы существуют и другие модели для геометрии Лобачевского [5]. При рассмотрении плоскости Лобачевского учитываются следующие факторы:

— это некоторая двумерная поверхность;

— прямыми на такой плоскости являются некоторые кривые на поверхности;

— существует способ определения расстояния (метрики) на такой плоскости (1), при котором кратчайший путь между двумя точками всегда был бы определен по «прямой».

Указанная метрика (1) полностью определяет внутренние свойства поверхности, в частности каким образом и насколько рассматриваемая поверхность искривлена. Неевклидова геометрия представляет собой геометрию искривленной поверхности, в частности псевдосферы, а все модели геометрии Лобачевского — это разные системы координат, введенные на плоскости Лобачевского. Метрики моделей отличаются между собой, но при этом описывают одну и ту же геометрию [6, с. 47].

Как показывает анализ различных литературных источников (см., напр., [4; 6]), во многих архитектурных сооружениях есть и элементы геометрии Н.И. Лобачевского, в частности в архитектуре А. Гауди. Конструкции, созданные Антонио Гауди, значительно опередили свое время. При этом следует отметить, что именно нестандартное решение проблемы геометрических линий позволило знаменитому мастеру сделать шаг вперед на пути создания нового художественного метода.

Дополнительные знания по неевклидовой геометрии позволяют расширить научное мировоззрение и математический кругозор учащихся средних общеобразовательных учреждений, способствуют интеллектуальному развитию талантливой молодёжи.

Список литературы

1. **Габова Е. П.** Изучение творческой деятельности двух величайших математиков Евклида Александрийского и Н. И. Лобачевского // *Лобачевский и XXI век : материалы IV учебно-научной студенческой конференции, посвященной году Лобачевского в Казанском федеральном университете / под ред. Л. Р. Шакировой.* Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017. С. 50–67.

2. **Галимханова З. Т., Гузялова А. Н.** Элементы геометрии Н. И. Лобачевского в архитектуре А. Гауди // *Лобачевский и XXI век : материалы IV учебно-научной студенческой конференции, посвященной году Лобачевского в Казанском федеральном университете / под ред. Л. Р. Шакировой.* Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017. С. 67–82.

3. **Евклид.** Начала Евклида. Книги I-VI / пер. с греч. и коммент. А. Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. М.; Ленинград: Гостехиздат, 1950. 447 с.

4. **Пидоу Д.** Геометрия и искусство. М.: Мир, 1979. 332 с.

5. **Прасолов В. В.** Геометрия Лобачевского. М.: Изд-во МЦНМО, 2004. 89 с.

6. **Хенсберген Г.** Гауди-тореадор искусства. М.: Эксмо, 2004. 352 с.

Summary

Popov N. I., Gabova E. P. Euclidean and non-Euclidean geometry: a mathematical excursion for schoolchildren

The paper describes elements of Euclidean and non-Euclidean geometry in a mathematical language accessible to schoolchildren. Examples of models of geometry N.I. Lobachevsky are given. The work is aimed at expanding the scientific outlook and the mathematical outlook of students in secondary general education institutions.

Keywords: Euclidean geometry, non-Euclidean geometry, models of the Lobachevsky.

References

1. **Gabova E. P.** Izuchenie tvorcheskoj dejatel'nosti dvuh velichajshih matematikov Evklida Aleksandrijskogo i N. I. Lobachevskogo (A study of the creative activities of the two greatest mathematicians Euclid of Alexandria and N. Lobachevsky), *Lobachevsky and the XXI century: materials of the IV educational scientific student conference dedicated to the Year of Lobachevsky's in Kazan Federal University, ed. by L. R. Shakirova.* Kazan: University, 2017, pp. 50–67.

2. **Galimkhanova Z. T., Guzyalova A. N.** Jelementy geometrii N. I. Lobachevskogo v arhitekture A. Gaudi (Geometry of N. Lobachevsky in the Architecture of A. Gaudi), *Lobachevsky and the XXI century: materials of the IV educational scientific student conference dedicated to the Year of Lobachevsky'sin Kazan Federal University, ed. by L. R. Shakirova*, Kazan: University, 2017, pp. 67–82.

3. **Euclid.** *Nachala Evklida* (The Beginning). Books I-VI. Translation from Greek and comments ofA.D. Mordukhai-Boltovskiy, Moscow — Leningrad: Gostekhizdat, 1950, 447 p.

4. **Pidou D.** *Geometrija i iskusstvo* (Geometry and art), Moscow: Mir, 1979, 332 p.

5. **Prasolov V. V.** *Geometrija Lobachevskogo* (Geometry of Lobachevsky), Moscow: Eksmo, 2004, 89 p.

6. **Hensbergen G.** *Gaudi-toreador iskusstva* (Gaudi-toreador of art), Moscow: Eksmo, 2004, 352 p.

Для цитирования: Попов Н. И., Габова Е. П. Евклидова и неевклидова геометрия: математический экскурс для школьников // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 4 (25). С. 68–74.*

For citation: Popov N. I., Gabova E. P. Euclidean and non-Euclidean geometry: a mathematical excursion for schoolchildren, *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, №4 (25), pp. 68–74.

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 25.12.2017*