МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (25). 2017

УДК 517.2

О РЕШЕНИИ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ ОСНОВАМ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

Л. Н. Чиркова

Статья посвящена вопросу решения оптимизационных задач линейного программирования при обучении основам системного анализа студентов вуза.
Ключевые слова: системный анализ, экономическая система, оптимизационные задачи линейного программирования.

Программа модернизации образования ставит перед высшей школой задачу формирования у студентов юридических и экономических направлений новой системы универсальных знаний, умений и навыков, а также опыта самостоятельной деятельности и личной ответственности, что входит в понятие компетенций. Одной из важных дисциплин при обучении студентов данных направлений являются основы системного анализа.

Системный анализ — научный метод познания, представляющий собой последовательность действий по установлению структурных связей между элементами исследуемых сложных систем — технических, экономических, юридических. Системный анализ опирается на комплекс общенаучных, экспериментальных, естественно-научных, математических методов и, конечно, проводится с использованием современных средств вычислительной техники. Результатом системных исследований является выбор вполне определенного плана развития исследуемой системы [1]. Специалист таможенного дела должен хорошо понимать функционирование экономических систем, разбираться в вопросах экспорта и импорта, иметь знания, умения и навыки юриста, психолога, лингвиста. И наряду с другими важнейшую роль в процессе обучения будущих специалистов направления «Таможенное дело» играют предметные компетенции, в частности математические. В процессе изучения основ системного анализа студенты рассматривают модели сложных систем и методы моделирования, существенные характеристики экономических систем, основы управления в сложных системах, методы количественного и качественного оценивания систем, а также проводят оценку сложных систем в условиях неопределенности. Приемы и методы системного анализа направлены на выдвижение альтернативных вариантов решения проблемы, выявление масштабов неопределенности по каждому варианту и сопоставление вариантов по их эффективности.

При решении конкретных задач применение методов системного анализа предполагает построение экономических и математических моделей для задач принятия решения в сложных ситуациях или в условиях неопределенности, изучение взаимосвязей, определяющих впоследствии принятие решений, и установление критериев эффективности, позволяющих оценивать преимущество того или иного варианта действия. Примером профессионально ориентированной задачи может служить следующая: *для обеспечения экономической безопасности функционирования предприятия необходимо обеспечить систему выборочного контроля продукции; требуется выбрать такие формы его проведения — назначить размеры контрольных партий, указать последовательность контрольных операций, определить правила отбраковки, — чтобы обеспечить необходимое качество при минимальных расходах [2].*

Одной из важных тем при обучении основам системного анализа будущих специалистов направления «Таможенное дело» является решение и анализ оптимизационных задач линейного программирования. Задачи линейного программирования, возникающие в практической деятельности, как правило, содержат большое число переменных и ограничений, и их решение без применения средств вычислительной техники — работа весьма трудная. Применение компьютерных технологий в ходе решения задач линейного программирования позволяет при достижении учащимися базового уровня знаний ставить задачи исследовательского плана, что способствует углублению уровня знаний. В ходе решения данных задач используются составление соответствующей программы на языке программирования, инструмент «Поиск решения» программы MS Excel и др. Прежде чем использовать компьютер при решении задачи линейного программирования, необходимо четкое понимание математической сути построения и исследования математической модели рассматриваемой экономической ситуации.

Вначале следует рассмотреть задачу, где число переменных равно двум: *на мебельную фабрику для изготовления столов и парт привезли 120 м^3 сосны и 150 м^3 липы. От одного стола фабрика получит 1500 руб. прибыли, одной парты — 2000 руб. Сколько столов и парт должна изготовить из этого материала фабрика, чтобы обеспечить наибольшую прибыль, если на один стол расходуется 0,11 м^3 сосны и 0,06 м^3 липы, а на одну парту — 0,05 м^3 сосны и 0,12 м^3 липы.*

Первый этап решения — анализ условия задачи и построение ее математической модели. Преподаватель с помощью серии вопросов должен подвести студентов к построению математической модели представленной задачной ситуации экономического содержания. При ответе на вопросы «Что требуется определить в задаче?» и «Как на языке математики это выразить?» формулируется утверждение: пусть необходимо изготовить x и y парт, чтобы обеспечить оптимальный вариант производства. При выяснении формы записи того, что на столы и парты расходуется не более 120 м^3 сосны (150 м^3 липы), приходим к неравенствам: $0,11x + 0,05y \leqslant 120$; $0,06x + 0,12y \leqslant 150$. Осталось выразить условие об общей прибыли, учитывая, что от реализации одного стола фабрика получит 1500 руб. прибыли, одной парты – 2000 руб.: $1500x + 2000y$. Таким образом, можно записать целевую функцию, выражающую значение дохода в зависимости от производства x столов и y парт: $F = 1500x+2000y$. По условию необходимо найти наибольшее значение целевой функции при некоторой паре чисел $(x; y)$. Осталось добавить ограничения на количества столов и парт: $x \geqslant 0, y \geqslant 0$. Итак, в результате рассуждений получена математическая модель экономической ситуации, состоящая в определении максимального значения функции $F = 1500x + 2000y$ при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 0,11x + 0,05y \leqslant 120, \\ 0,06x + 0,12y \leqslant 150, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

Отметим, что построение математической модели реальной ситуации может быть сложным в связи с многообразием действующих факторов, степенью их влияния на исследуемый объект, взаимодействием отдельных факторов и их групп, поэтому часто математическая модель лишь приближенно отражает рассматриваемый процесс или явление. На втором этапе решения задачи необходимо решить данную систему неравенств графическим способом, для чего следует изобразить систему координат Oxy, в ней построить прямые по уравнениям $0,11x + 0,05y = 120$, $0,06x + 0,12y = 150$, $x = 0$, $y = 0$, далее выделить многоугольник решений этой системы как пересечение областей, являющихся решениями каждого неравенства в отдельности. При осмыслении полученного студенты приходят к выводу, что любая точка, принадлежащая четырехугольнику, определяет план выпуска продукции при имеющихся запасах сырья, но из них нужно найти такую точку с координатами x и y, при которых $F = 1500x + 2000y$ будет иметь максимальное значение. Пусть функция $F = 1500x + 2000y$ принимает какое-нибудь постоянное значение c: $1500x + 2000y = c$. Это уравнение на плоскости задает соответствующую прямую, и каждому значению c будет соответствовать некоторая прямая. Все эти линии параллельны между собой и называются линиями уровня функции F.

Далее требуется определить направление возрастания функции, для чего нужно построить линию уровня с большим значением (это будет прямая, параллельная построенной, но расположенная правее). В результате студенты приходят к выводу, что в заданном направлении значение целевой функции возрастает и нужно сдвинуть ее как можно дальше в этом направлении, сдвиг же можно продолжать до тех пор, пока перемещаемая прямая пересекает многоугольник допустимых решений. Последнее положение прямой, когда она имеет одну общую точку с четырехугольником, соответствует максимальному значению целевой функции. В данной задаче получим, что функция F примет наибольшее значение в том случае, когда прямая $1500x + 2000y = c$ будет проходить через точку пересечения прямых $0,11x + 0,05y = 120$, $0,06x + 0,12y = 150$. Решая систему из этих уравнений, студенты найдут ответ: $x \approx 676$, $y \approx 912$. Подставив найденные значения в выражение $1500x + 2000y$, они найдут максимальное значение функции: $F = 2838000$. На этом исследование построенной модели заканчивается.

Результат исследования математической модели выводит студентов на потребность третьего этапа моделирования — перевести полученный результат на профессиональный язык, т. е. целью является придание математическим значениям x, y, F практического смысла. Анализируя, какие элементы в начале решения обозначены x и y, учащиеся приходят к выводу: $x = 676$ и $y = 912$ — количество парт, т. е. план производства при максимальной прибыли в 2838000 руб. и наилучшем расходе сырья обоих видов. Остается найти расход сырья: для сосны $0,11 \cdot 676 + 0,05 \cdot 912 = 119.96$ м^3, для липы $0,06 \cdot 676 + 0,12 \cdot 912 = 150$ м^3.

После выполнения подробного разбора всех этапов решения задачи можно приступать к применению инструмента «Поиск решения» табличного процессора MS Excel [3]. Поскольку проведен анализ условия задачи и составлена ее математическая модель (первый этап решения), студенты создают расчетную таблицу с исходными данными и формулами, задают условия и ограничения для поиска решений. Результат совпадет с полученным ранее (количество изделий округлить до целых). После получения результатов решения необходимо их перевести на язык задачи.

При решении задач линейного программирования необходимо владеть следующими умениями: составлять краткую запись условия задачи в виде таблицы; обозначать искомые величины через переменные; выражать величины через переменные; оформлять в виде равенств (неравенств) зависимости между величинами; решать системы уравнений (неравенств) известными методами; определять направление возрастания (убывания) значения функции по графику; находить искомые величины, используя полученный результат; интерпретировать результат решения данной задачи.

Проводя со студентами анализ решения данной задачи, нужно четко выделить этапы:

1. Анализ условия задачи и составление ее математической модели. В результате активной поисковой деятельности учащиеся приходят к следующему: найти такие значения переменных x и y, удовлетворяющих системе ограничений, чтобы при найденных значениях функция $F = 1500x + 2000y$ принимала максимальное значение.

2. Составление плана исследования модели и его реализация (графический метод, инструмент «Поиск решения» MS Excel).

3. Практическое истолкование найденных координат искомой точки и значения функции в этой точке. Студенты интерпретируют результат решения: план производства при максимальной прибыли в 2838000 руб. и наилучшем расходе сырья обоих видов составляет 676 столов и 912 парт.

Первый и третий этапы решения задачи линейного программирования как без применения компьютера, так и с его применением одинаковы, а с использованием информационной технологии автоматизируется второй этап — исследование математической модели экономической ситуации. Следовательно, высвобождается время для решения большого количества задач по теме, так как компьютерное выполнение рутинных операций и поиск значений сложной функции позволяет уделять больше внимания выработке логического мышления у учащихся и умению находить решения задач самостоятельно, студенты учатся строить алгоритмы решения сложных задач. Это особенно важно, если переменных больше двух, поскольку задачи, возникающие в практической деятельности, как правило, содержат большое число переменных и ограничений и их решение без применения средств вычислительной техники очень трудоемко. Так, с помощью опции «Поиск решения» MS Excel эффективно решаются так называемые транспортные задачи — важные частные случаи задач линейного программирования (решение данного вида задач трудоемко без применения вычислительных средств). Пример закрытой транспортной задачи: *предприятия П1, П2, П3, П4 производят однородную продукцию в количестве 246, 186, 196 и 197 единиц; товар поступает в пять магазинов М1, М2, М3, М4, М5, которые готовы ежедневно принимать 136, 171, 71, 261 и 186 единиц товара. Требуется минимизировать транспортные расходы по перевозке продукции (в табл. 1 указана стоимость перевозки продукции с учетом удаленности).* Таким образом, задача ставится так: найти объемы перевозок для каждой пары «поставщик — потребитель», чтобы мощности всех поставщиков были реализованы, спросы всех потребителей были удовлетворены, суммарные затраты на перевозку были минимальны.

Таблица 1

Стоимость перевозки продукции

Производители	Потребители					Объем производства
	М1	М2	М3	М4	М5	
П1	4,2	4	3,35	5	4,65	246
П2	4	3,85	3,5	4,9	4,55	186
П3	4,75	3,5	3,4	4,5	4,4	196
П4	4,75	3,5	3,4	4,5	4,4	197
Объем потребления	136	171	71	261	186	

На первом этапе необходимо построить экономико-математическую модель данной задачи (искомый объем перевозки от i-го поставщика к j-му потребителю обозначим $x_{ij} \geqslant 0$). Чтобы мощность каждого из поставщиков и спрос каждого из потребителей были выполнены, необходимо составить уравнения баланса для каждых строки и столбца таблицы поставок:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=246\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=186\\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=196\\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}=197\\ x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=136\\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=171\\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=71\\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=261\\ x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}=186. \end{cases}$$

Суммарные затраты на перевозку выражаются через коэффициенты затрат следующим образом:

$$\begin{aligned} F = 4,2x_{11} + 4x_{12} + 3,35x_{13} + 5x_{14} + 4,65x_{15} + \\ + 4x_{21} + 3,85x_{22} + 3,5x_{23} + 4,9x_{24} + 4,55x_{25} + \\ + 4,75x_{31} + 3,5x_{32} + 3,4x_{33} + 4,5x_{34} + 4,4x_{35} + \\ + 5x_{41} + 3x_{42} + 3,1x_{43} + 5,1x_{44} + 4,4x_{45}. \end{aligned}$$

Теперь можно дать математическую формулировку задачи (без обращения к ее содержательному экономическому смыслу): на множестве неотрицательных решений системы ограничений найти такое ее решение, при котором линейная функция F принимает минимальное значение. Далее студенты приступают к применению инструмента «Поиск решения» табличного процессора MS Excel [3]. Поскольку проведен анализ условия задачи и составлена ее математическая модель (первый этап решения), студенты создают расчетную таблицу с исходными данными и формулами, задают условия и ограничения для поиска решений. Результат работы инструмента представлен в табл. 2.

Студенты интерпретируют результат решения, переводя его на язык задачи, и находят значение функции затрат.

Изучению вопросов, связанных с решением оптимизационных задач линейного программирования, при обучении основам системного анализа студентов вуза уделяется большое внимание, поскольку такие задачи являются не только средством формирования многих математических понятий, но и умений строить математические модели реальных процессов и явлений, а также средством развития мышления учащихся.

Таблица 2

Объемы поставок

Производители	Потребители					Объем производства
	М1	М2	М3	М4	М5	
П1	0	0	69	30	147	246
П2	136	0	0	35	15	186
П3	0	0	0	196	0	196
П4	0	171	2	0	24	197
Объем потребления	136	171	71	261	186	

Список литературы

1. **Вдовин В. М.** Теория систем и системный анализ : учебник / В. М. Вдовин, Л. Е. Сурков, В. А. Валентинов. М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К», 2016. 644 с.

2. **Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришин И. М., Фридман М. Н.** Исследование операций в экономике : учебное пособие для вузов/ под ред. проф. Н. Ш. Кремера. М.: Юрайт; ИД «Юрайт», 2013. 438 с.

3. **Берман Н. Д., Шадрина Н. И.** Решение задач линейного программирования в Microsoft Excel 2010 : методические указания к выполнению лабораторных работ по информатике для обучающихся по всем программам бакалавриата и специалитета дневной формы обучения. Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2015. 27 с.

Summary

Chirkova L. N. Regarding the solution of optimization problems linear programming in learning the basics of system analysis

This article is devoted to the solution of optimization problems linear programming in learning the basics of system analysis students of the university.

Keywords: system analysis, economic system, the optimization problems of linear programming.

References

1. **Vdovin V. M.** *Teorija sistem i sistemnyj analiz* (Systems theory and systems analysis): Textbook/ V. M. Vdovin, L. E. Syrkov, V. A. Valentinov, Moscow: Publishing and trading corporation «Dashkov and C», 2016, 644 p.

2. **Kremer N. Sh., Pytko B. A., Trishin I. M., Fridman M. N.** *Issledovanie operacij v jekonomike* (Research of operations in economy): textbook for university/under the editorship of prof. N. Sh. Kremer. Moscow: Publisher Urait, 2013, 438 p.

3. **Berman N. D., Shadrina N. I.** *Reshenie zadach linejnogo programmirovanija v Microsoft Excel 2010* (The decision problems of linear programming in Microsoft Excel 2010): methodical instructions to performance of laboratory works on computer science for bachelors and specialists, Chabarovsk: Publisher University of the Pacific, 2015, 27 p.

Для цитирования: Чиркова Л. Н. О решении оптимизационных задач линейного программирования при обучении основам системного анализа // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 4 (25). С. 59–67.*

For citation: Chirkova L. N. Regarding the solution of optimization problems linear programming in learning the basics of system analysis, *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, №4 (25), pp. 59–67.

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 09.12.2017*