ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (25). 2017

УДК 512.643

МОДИФИЦИРОВАННОЕ ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ЕГО СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

А. Б. Певный, С. М. Ситник

Предлагается модифицированное дискретное преобразование Фурье порядка n. При $n = 4m$ матрица этого преобразования имеет 4 собственных числа, все кратности m.
Ключевые слова: дискретное преобразование Фурье, собственные числа.

1. Введение

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) является одним из самых известных и полезных математических инструментов.

ДПФ определяется матрицей F размера $n \times n$ с элементами

$$F(k,j) = \frac{1}{\sqrt{n}}\omega^{-kj}, \qquad k,j \in 0 : n-1,$$

где $\omega = exp\frac{2\pi i}{n}$. Здесь $0 : n-1$ обозначает множество целых чисел от 0 до $n-1$.

Рассмотрим задачу о нахождении спектра ДПФ при любом n. Известно, что $F^4 = E$, где E — единичная матрица, поэтому собственными значениями могут быть лишь числа ± 1, $\pm i$. Основная сложность состоит в вычислении кратностей этих значений. Кратности были найдены для любого n знаменитым математиком Исайей Шуром [1] в 1921 году.

В таблице обращает на себя внимание факт, что при $n = 4m$ кратности собственных чисел не равны.

Данная работа возникла из желания исправить этот недостаток. Хотелось бы модифицировать ДПФ так, чтобы при $n = 4m$ кратности собственных чисел были равны.

Таблица

Общие формулы И. Шура для кратностей собственных значений

n	1	i	-1	$-i$
$4m$	$m+1$	$m-1$	m	m
$4m+1$	$m+1$	m	m	m
$4m+2$	$m+1$	m	$m+1$	m
$4m+3$	$m+1$	m	$m+1$	$m+1$

2. Новый вид ДПФ и его свойства

Обобщённые ДПФ были предложены в работе [2]. Мы подробно исследуем одно новое преобразование и докажем, что при $n = 4m$ кратности чисел спектра будут равны.

Рассмотрим матрицу F с элементами

$$F(k,j) = \frac{1}{\sqrt{n}}\omega^{k(1-j)}, \quad k,j \in 0 : n-1. \tag{1}$$

Приведем вид F при $n = 6$:

$$F = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \omega & 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \omega^{-3} & \omega^{-4} \\ \omega^2 & 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \omega^{-6} & \omega^{-8} \\ \omega^3 & 1 & \omega^{-3} & \omega^{-6} & \omega^{-9} & \omega^{-12} \\ \omega^4 & 1 & \omega^{-4} & \omega^{-8} & \omega^{-12} & \omega^{-16} \\ \omega^5 & 1 & \omega^{-5} & \omega^{-10} & \omega^{-15} & \omega^{-20} \end{bmatrix}.$$

В нулевой строке F стоят единицы, в первой — все корни n-й степени из 1, начиная с ω и далее привлекаем корни, двигаясь по окружности по часовой стрелке.

Как и в обычном ДПФ, матрица F является унитарной. Для исследования её спектральных свойств нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Матрица $P = F^2$ обладает свойствами:*

(i) $P^2 = \omega E$ при всех n;

(ii) При чётном n след $\mathrm{tr}(P)$ равен нулю и матрица P имеет два собственных числа $\sqrt{\omega}$ и $-\sqrt{\omega}$, каждое кратности $n/2$.

Доказательство. Матрица $P = F^2$ имеет характерный вид с двумя ненулевыми диагоналями. Например, при $n = 6$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При n чётном на главной диагонали P стоят одни нули, и поэтому $\mathrm{tr}(P) = 0$.

Используя двухдиагональный вид, можно показать, что $P^2 = \omega E$. Отсюда собственными числами матрицы P могут быть только числа $\sqrt{\omega} = exp\frac{2\pi i}{n}$ и $-\sqrt{\omega}$ с кратностями k_1 и k_2.

Сумма всех собственных чисел равна следу матрицы. Поэтому при n чётном $k_1\sqrt{\omega} - k_2\sqrt{\omega} = \mathrm{tr}(P) = 0$, откуда $k_1 = k_2 = n/2$. Лемма доказана. □

Ещё потребуется вычислить сумму

$$R_{4m} = \sum_{k=0}^{4m-1} \omega^{k(k-1)}, \quad \text{где} \quad \omega = exp\left(\frac{2\pi i}{4m}\right).$$

ЛЕММА 2. *Справедливо равенство*

$$R_{4m} = 0. \tag{2}$$

Доказательство. Введём обозначение $v_k = \omega^{k(k-1)}$ и найдём сумму $v_k + v_{k+2m}$. Имеем

$$(k + 2m)(k + 2m - 1) = k(k - 1) + 2m(2k + 2m - 1),$$

$v_{k+2m} = v_k\omega^{2ms}$, где $s = 2k + 2m - 1$.

Поскольку $\omega^{2m} = e^{\pi i} = -1$, s — нечётное, то $v_{k+2m} = -v_k$. Итак, в сумме R_{4m} слагаемые разбиваются на пары, и в каждой паре сумма равна нулю. Лемма доказана. □

ЗАМЕЧАНИЕ. *Сумма R_{4m} аналогична гауссовым суммам $G_n = \sum_{k=0}^{n-1}\omega^{k^2}$, где $\omega = exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$. Гаусс вычислил эти суммы для всех n. При $n = 4m+2$ слагаемые k и $k+2m+1$ уничтожаются и $G_{4m+2} = 0$. Мы не видели в литературе такого способа вычисления гауссовой суммы (правда в простейшем случае $n = 4m + 2$).*

3. Собственные числа матрицы F

ТЕОРЕМА 1. *При $n = 4m$ матрица F вида (1) имеет собственные числа — корни 4-й степени из ω, все одинаковой кратности m.*

Доказательство. По лемме 1 $F^4 = P^2 = \omega E$, поэтому собственными числами могут быть только корни 4-й степени из ω:

$$\varepsilon_1 = exp\tfrac{\pi i}{2n}, \quad \varepsilon_2 = i\varepsilon_1, \quad \varepsilon_3 = -\varepsilon_1, \quad \varepsilon_4 = -i\varepsilon_1.$$

Кратности этих собственных чисел обозначим a, b, c, d, $a + b + c + d = n$. Имеем $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_3^2 = \sqrt{\omega}$. При чётном n число $\sqrt{\omega}$ имеет кратность $n/2$ для матрицы P (см. лемму 1). Поэтому $a + c = n/2$, $b + d = n/2$ при чётном n.

Далее пользуемся тем, что сумма всех собственных чисел равна следу матрицы:

$$a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3 + d\varepsilon_4 = \mathrm{tr}(F).$$

Имеем $\mathrm{tr}(F) = \frac{1}{4m}\sum_{k=0}^{4m-1}\omega^{k(1-k)} = \frac{1}{4m}\overline{R_{4m}}$. Но в силу (2) $R_{4m} = 0$, поэтому $\mathrm{tr}(F) = 0$.

Значит, сумма всех собственных чисел равна нулю:

$$a\varepsilon_1 + b(i\varepsilon_1) + c(-\varepsilon_1) + d(-i\varepsilon_1) = 0.$$

После сокращения на ε_1 получаем $a-c+i(b-d) = 0$, откуда $a = c$, $b = d$. Ранее было установлено, что $a + c = n/2$, $b + d = n/2$. Окончательно получаем

$$a = c = b = d = n/4.$$

Теорема доказана. □

Список литературы

1. **Schur I.** Über die Gaussschen Summen // *Nach. Gessel. Göttingen. Math.-Phys. Klasse. 1921. Pp. 147–153.*

2. **Ситник С. М.** Обобщённые дискретные преобразования Фурье и их спектральные свойства // *Новые информационные технологии в автоматизированных системах. М.: МИЭТ, 2014.*

Summary

Pevnyi A. B., Sitnik S. M. Modified discrete Fourier transform and its spectral properties

Modified discrete Fourier transform of the order n is suggested. For $n = 4m$ the matrix of this transform has 4 eigenvalues with multiplicities m.

Keywords: discrete Fourier transform, eigenvalues.

References

1. **Schur I.** Über die Gaussschen Summen, *Nach. Gessel. Göttingen. Math.-Phys. Klasse*, 1921, pp. 147–153.

2. **Sitnik S. M.** Obobshhjonnye diskretnye preobrazovanija Fur'e i ih spektral'nye svojstva (Generalized discrete Fourier transform and its spectral properties), *New information technologies in automized systems*, M., MIET, 2014.

Для цитирования: Певный А. Б., Ситник С. М. Модифицированное дискретное преобразование Фурье и его спектральные свойства // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 4 (25). С. 15–19.*

For citation: Pevnyi A. B., Sitnik S. M. Modified discrete Fourier transform and its spectral properties, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, №4 (25), pp. 15–19.

СГУ им. Питирима Сорокина,
Белгородский госуниверситет

Поступила 06.11.2017