12+

ISSN 1992-2752

Вестник Сыктывкарского университета

Серия 1:
Математика
Механика
Информатика

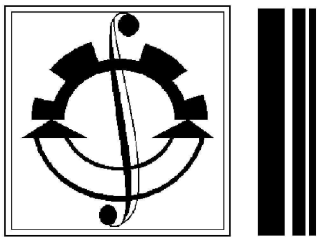
Памяти профессора

В. Л. Никитенкова (1952–2015)

4(25) ВЫПУСК **17**

12+

ISSN 1992-2752



Вестник Сыктывкарского университета

Серия 1:
Математика
Механика
Информатика

Памяти профессора
В. Л. Никитенкова (1952–2015)

4(25) ВЫПУСК **17**

Вестник Сыктывкарского университета	Серия 1: *Математика* *Механика* *Информатика*	12+ ISSN 1992-2752
Основан в 1995 году		Выпуск 4 (25)
Выходит 4 раза в год		2017

Учредитель и издатель: ФГБОУ ВО «Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина» (167001, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., д. 55)

Зарегистрирован Федеральной службой РФ по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство ПИ № ФС77-37565 от 17 сентября 2009 года

Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика : сборник. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2017. — Выпуск 4 (25). 2017. — 87 с.

Адрес редакции
Вестника Сыктывкарского университета
167001, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., д. 55
Тел. (8212)390-308.
Электронный адрес: https://syktsu.ru/_fac/math/vestnik/site/index.htm

Содержание

Слово главного редактора

Данный выпуск журнала посвящен заслуженному работнику высшей школы Российской Федерации, доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Леонидовичу Никитенкову, основная трудовая деятельность которого была посвящена нашему университету. В ноябре текущего года ему исполнилось бы 65 лет.

Владимир Леонидович сразу после получения диплома Ленинградского государственного университета (ныне — Санкт-Петербургский государственный университет) по приглашению первого ректора СГУ В. А. Витязевой приступил к работе в нашем университете в 1976 году. Именно у нас он состоялся как ученый, педагог и наставник. Его успехи обусловлены большим талантом к математике и механике, благодатной средой Санкт-Петербургской научной школы Валентина Валентиновича Новожилова, последователем которой в нашем университете в ту пору был Евгений Ильич Михайловский. Научные интересы Владимира Леонидовича в большей степени складывались под влиянием Е. И. Михайловского. Вместе они создали Сыктывкарскую научную школу механики.

Зарождение Сыктывкарской школы механики началось с прикладных задач, решение которых важно для развития Севера. Так, в 1978 году между СГУ и ВПО «Комигазпром» были начаты работы по оптимальному проектированию искусственных оснований под буровые вышки в шельфовой зоне полуострова Ямал. Основу прикладных исследований составляла нелинейная теория упругости. В данном направлении появились научные результаты, что позволило в 1989 году на базе университета организовать Всесоюзную научную конференцию. Ее участниками были ученые из Брянска, Владивостока, Днепропетровска, Ростова-на-Дону, Саратова, Санкт-Петербурга, Тулы, Тюмени, Москвы, Киева и других городов. Это было первым признанием Сыктывкарской школы механики. Сложившаяся в результате научной деятельности команда единомышленников открыла для себя новое направление, связанное с прочностным анализом и параметрическим синтезом большегрузных автоклавов для строительства. Ведущие позиции школы по данному вопросу нашли отражение в проведении в Сыктывкаре Всесоюзного семинара «Автоклавы. Расчет, проектирование, опыт эксплуатации» (январь 1990).

В организации и проведении всех научных мероприятий активное участие принимал Владимир Леонидович. Он уделял большое внимание использованию IT-методов в инженерных расчетах, занимаясь обучением информатизации студентов и слушателей программ повышения

квалификации. Им подготовлены к изданию учебные пособия и методические указания по программированию. В. Л. Никитенков пользовался непререкаемым авторитетом среди студентов и аспирантов.

В память о научных достижениях нашего коллеги, в знак признания его таланта и человечности в данном выпуске журнала публикуются работы по прикладной математике и механике, информатике, а также методические материалы.

О. А. Сотникова,
д-р. пед. наук, доцент

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (25). 2017

UDC 512.643.8+517.954+517.968

ON FACTORIZATION OF TRIANGLE MATRIX FUNCTIONS

M. Dubatovskaya, L. Primachuk, S. Rogosin

The paper is devoted to an analysis of the efficient factorization method for triangular matrix-functions of arbitrary order, which generalizes G. N. Chebotarev's method. Results are illustrated by examples.
Keywords: matrix-functions factorization, triangular matrices, continuous fractions.

1. Introduction

Let Γ be a simple smooth closed curve on the complex plane $\mathbb{C}$ dividing $\mathbb{C}$ into two domains $D^+ \ni 0$ and $D^- \ni \infty$. By the factorization of a non-singular continuous complex-valued matrix-function $G \in (\mathscr{C}(\Gamma))^{n\times n}$ it is understood the determination of two matrices $G^{\pm}$ analytic in $D^{\pm}$, respectively, together with their inverses $(G^{\pm})^{-1}$, and of the diagonal matrix

$$\Lambda(t) = diag\left\{t^{\kappa_1}, \ldots, t^{\kappa_n}\right\}, \quad \kappa_1, \ldots, \kappa_n \in \mathbb{Z},$$

such that the following representation holds on Γ:

$$G(t) = G^+(t)\Lambda(t)G^-(t), \quad t \in \Gamma. \tag{1}$$

The representation (1) is called the *left (continuous or standard) factorization*. Interchanging and we arrive at the *right (continuous or standard) factorization*. If the left (right) factorization exists, then the integer numbers $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in \mathbb{Z}$ are determined uniquely up to their order (thus, one can always suppose $\kappa_1 \geq \ldots \geq \kappa_n$). These numbers are called *partial indices*. The factors G^+, G^- in (1) are determined non-uniquely (they

can be found up to multiplying on special non-singular polynomial matrices, see [7]).

Initially, the factorization problem is linked to B.Riemann or, more precisely, with two problems formulated by him, known as the *Riemann boundary value problem* (or *Riemann-Hilbert boundary value problem*, see [4]), and the *Riemann monodromy problem* (or the *21st Hilbert problem*, or the *Riemann-Hilbert problem*, see [2]). In the present day, the factorization problem is interesting due to its connections to notable mathematical problems (vector-matrix boundary value problems, systems of singular integral equations, the Wiener-Hopf and other convolution type equations, the Riemann-Hilbert problem, classification of vector bundles on the Riemann sphere, nonlinear evolution equations, the Toeplitz operators, etc), as well as to applied problems (elasticity and elasto-plasticity, radiation and neutron transport, wave diffraction, fracture mechanics, geomechanics, signal processing, financial mathematics, etc, see, e.g. [5,6]). Sometimes the factorization problem is called the Wiener-Hopf factorization, since it is connected with the Wiener-Hopf technique developed initially for the study of the Wiener-Hopf integral equation (see, e.g. [6]).

In spite of the extended interest to the factorization problem and its rather developed theory, the constructive direction of this branch is far from completeness (see, the recent survey on constructive methods of factorization [10]). For special classes of matrix-functions there exist several important approaches describing determination of partial indices and construction of factors. Among others (see [10]) we can mention here the paper by G.N.Chebotarev [3] on factorization of triangular matrix-functions of the second order, and the results by V.M.Adukov [1] presenting an algorithm of the constructive factorization of meromorphic matrix-functions. Chebotarev's method was recently generalized for triangular matrix-functions of arbitrary order [9]. Here we briefly describe the later approach illustrating it by certain examples. Without loss of generality we take the unit circle $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ as the curve Γ in these examples.

2. Factorization of triangular matrix-functions of arbitrary order

The central aim of [9] is to provide an inductive approach and to reduce to factorization of the matrix-functions of higher order to the factorization of lower order of matrices. The basic tools making this method efficient are two statements.

Lemma 1. *([3]) Let us consider a 2-nd order non-singular triangular*

matrix-function

$$A(t) = \begin{pmatrix} \zeta_1(t) & 0 \\ a(t) & \zeta_2(t) \end{pmatrix}.$$

Let $\kappa_j = ind_\Gamma \zeta_j(t)$ *and let* $x_j^\pm(z)$ *be canonical functions for the homogeneous Riemann boundary value problems with coefficients* $\zeta_j(t), j = 1, 2$, *respectively (see [3]). Let* $\mu \geq 1$ *be the order at infinity of the following function*

$$\phi^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{a(\tau) x_1^-(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D^\pm.$$

If $\kappa_1 \leq \kappa_2 + \mu$, *then matrix-function possesses factorization*

$$A(t) = X^+(t) \begin{pmatrix} t^{\kappa_1} & 0 \\ 0 & t^{\kappa_2} \end{pmatrix} X^-(t), \quad X^\pm(t) = \begin{pmatrix} x_1^\pm & 0 \\ x_2^\pm \phi^\pm & x_2^\pm \end{pmatrix},$$

with partial indices κ_1, κ_2.

If $\kappa_1 > \kappa_2 + \mu$, *then the function* $\frac{1}{\phi^-(z)}$ *is represented in the continued fraction*

$$\frac{1}{\phi^-(z)} = q^{\gamma_0}(z) + \frac{1}{q^{\gamma_1}(z) + \frac{1}{q^{\gamma_2}(z) + \ldots}},$$

where $q^{\gamma_i}(z)$ *are polynomials of order* γ_i, $\gamma_0 = \mu$. *Denote* $\mu_1 = \gamma_0 + \gamma_1$, $\mu_2 = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2$, $\ldots$. *If* $\mu_{i-1} + \mu_i < \kappa_1 - \kappa_2$, *but* $\mu_i + \mu_{i+1} \geq \kappa_1 - \kappa_2$, *then the partial indices of the matrix* $A(t)$ *are equal* $\kappa_1 - \mu_i$, $\kappa_2 + \mu_i$, *and the factors are constructed by using representation of the function* $\frac{1}{\phi^-(z)}$ *and elementary transformations of the columns.*

Lemma 2. *([9]) Let* $B(t), t \in \Gamma$, *be a non-singular Hölder continuous square matrix-function of the order* n *having the following form:*

$$B(t) = \begin{pmatrix} A(t) & \mathbf{0} \\ b_1(t) \ldots b_{n-1}(t) & c(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Let the non-singular matrix-function $A(t)$ *of the order* $n - 1$ *admits factorization*

$$A(t) = A^+(t)\Lambda(t)A^-(t) = A^+(t) diag\left\{t^{\kappa_1}, \ldots, t^{\kappa_{n-1}}\right\} A^-(t).$$

Then the matrix-function $B(t)$ *possesses factorization if the following matrix does:*

$$\begin{pmatrix} \Lambda(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}(t)|\mathbf{Y}_1(t) \ldots \mathbf{b}(t)|\mathbf{Y}_{n-1}(t) & c(t) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

where $\mathbf{Y}_j(t)$ *is the* j*-th column of the matrix* $Y(t) = (A^-(t))^{-1}$,

$$\mathbf{b}(t)|\mathbf{Y}_j(t) = \sum_{k=1}^{n-1} b_k(t) Y_{kj}(t).$$

Example 1. *Let us illustrate the reduction of the factorization problem of the matrix-function of the form (2) to the factorization of the triangular matrix function of the form (3). Consider the matrix-function*

$$B(t) = \begin{pmatrix} & A(t) & \mathbf{0} \\ \dfrac{1}{t+2} & \dfrac{1}{t+2} & \dfrac{t-2}{t+3}\dfrac{3t+2}{3t-1} \end{pmatrix},$$

where $A(t)$ *is the second order non-singular square matrix*

$$A(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{t^3-3t^2+1}{t-3} & \dfrac{-3t^4+7t^3+6t^2+3t-1}{3t^2-7t-6} \\ \dfrac{t^3-6t^2+1}{t-2} & \dfrac{-9t^4+12t^3+12t^2+3t-1}{3t^2-4t-4} \end{pmatrix}.$$

The matrix-function $A(t)$ possesses the following (bounded) factorization

$$A(t) = A^+(t)\Lambda(t)A^-(t),$$

where

$$A^+(t) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{t-3} \\ 3 & \dfrac{1}{t-2} \end{pmatrix},\ \Lambda(t) = \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A^-(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \dfrac{3t-1}{3t+2} \end{pmatrix}.$$

The corresponding matrix $Y(t) = (A^-(t))^{-1}$ can be found directly

$$Y(t) = (A^-(t))^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{3t-1}{6t+1} & \dfrac{3t+2}{6t+1} \\ -\dfrac{3t+2}{6t+1} & \dfrac{3t+2}{6t+1} \end{pmatrix}.$$

Thus

$$\mathbf{Y}_1(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{3t-1}{6t+1} \\ -\dfrac{3t+2}{6t+1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{3t+2}{6t+1} \\ \dfrac{3t+2}{6t+1} \end{pmatrix}.$$

By simple calculation we arrive at the following representation of the matrix $B(t)$

$$B(t) = B^+(t)D_3(t)B^-(t),$$

where

$$B^+(t)=\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{t-3} & 0\\ 3 & \dfrac{1}{t-2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ B^-(t)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 1 & \dfrac{3t-1}{3t+2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$D_3(t)=\begin{pmatrix} t^2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -\dfrac{3}{(t+2)(6t+1)} & \dfrac{2(3t+2)}{(t+2)(6t+1)} & \dfrac{t-2}{t+3}\dfrac{3t+2}{3t-1}\end{pmatrix}$$

Note that without loss of generality we can take element $c(t)$ of the matrix $D_3(t)$ equal to 1. Really, the function $c(t)$ possesses the following factorization

$$c(t)=\frac{t-2}{t+3}\cdot\frac{3t+2}{3t-1}=c^+(t)\cdot c^-(t).$$

Hence, by taking

$$\widetilde{B}^+(t)=\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{t-3} & 0\\ 3 & \dfrac{1}{t-2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & c^+(t)\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{B}^+(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & c^-(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 1 & \dfrac{3t-1}{3t+2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

we obtain the following representation of the matrix $B(t)$:

$$B(t)=\widetilde{B}^+(t)\widetilde{D}_3(t)\widetilde{B}^-(t),$$

with

$$\widetilde{D}_3(t)=\begin{pmatrix} t^2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -\dfrac{3(t+3)}{(t+2)(6t+1)(t-2)} & \dfrac{2(3t+2)(t+3)}{(t+2)(6t+1)(t-2)} & 1\end{pmatrix}.$$

It was shown in [8] that factorization problem for the matrix $G(t)$ is equivalent to the construction of the *canonical matrix-functions* $X^{\pm}(z)$, i.e. matrix-functions satisfying the homogeneous boundary condition

$$X^+(t)=G(t)X^-(t),\quad t\in\Gamma, \tag{4}$$

such that $X^-(z)$ has the normal form at infinity, i.e. the sum of the orders at infinity of the columns of $X^-(z)$ is equal to the index of the determinant of the matrix $G(t)$

$$\kappa = ind_\Gamma G(t) = wind_\Gamma G(t).$$

Note that the order of a column of the analytic matrix-function is equal to the minimal order of the elements of the column.

Therefore, instead of the direct determination of a solution to the factorization problem we can construct the canonical matrix-function for the matrix boundary value problem (4). Moreover, it follows from Lemma 2, that we can take a non-singular triangular matrix-function of the third order $G(t)$ in the special form, namely

$$G(t) = \begin{pmatrix} \zeta_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2(t) & 0 \\ a_1(t) & a_2(t) & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

As before, we suppose that all entries of the matrix are Hölder-continuous on Γ and indices of $\zeta_1(t), \zeta_2(t)$ are equal κ_1, κ_2, respectively. Note that by inductive consideration the same form can be taken for the matrices of higher order, i.e. with diagonal entries $(\zeta_1(t), \zeta_2(t), \ldots, \zeta_{n-1}(t), 1)$, the entries of the last row $(a_1(t), a_2(t), \ldots, a_{n-1}(t), 1)$, and remaining entries equal to zero.

Let us present few details of the algorithm proposed in [9] for the matrix-function of the form (5). First, the functions $\zeta_j(t), j = 1, 2$, satisfy the following factorization equality

$$x_j^+(t) = \zeta_j(t) x_j^-(t), \quad t \in \Gamma.$$

Introduce the functions

$$\phi_j^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{a_j(\tau) x_j^-(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D^\pm, j = 1, 2.$$

Then the analytic in $D^\pm$ matrices

$$X^\pm(z) = \begin{pmatrix} x_1^\pm(t) & 0 & 0 \\ 0 & x_2^\pm(t) & 0 \\ \phi_1^\pm(t) & \phi_2^\pm(t) & 1 \end{pmatrix}$$

satisfy the boundary condition (4). Denote by $\gamma_1 \geq 1, \gamma_2 \geq 1$ the orders of the functions $\phi_1^-(z), \phi_2^-(z)$ at infinity.

If $\kappa_1 \le \gamma_1$, $\kappa_2 \le \gamma_2$, then $X^-(z)$ has the normal form at infinity and thus $X^{\pm}(z)$ is the canonical matrix. In this case partial indices are equal $(\kappa_1, \kappa_2, 0)$. If at least one of the above inequalities fails, then $X^-(z)$ does not have the normal form at the infinity. In this case it is necessary to do elementary transformations with the columns of $X^-(z)$ (see for details [9]).

Example 2. *Let us consider factorization problem for the matrix-function*

$$G(t) = \begin{pmatrix} t^2(t+2) & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{t+2}{t+3}\dfrac{2t-1}{2t+1} & 0 \\ -\dfrac{3(t+3)}{(t-2)(2t+1)(6t+1)} & \dfrac{2(3t+2)(t+3)}{(t-2)(2t+1)(6t+1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

In this case $x_1^+(z) = z+2$, $x_1^-(z) = \frac{1}{z^2}$, and $x_2^+(z) = \dfrac{z+2}{z+3}$, $x_2^-(z) = \dfrac{2z+1}{2z-1}$, and indices of the diagonal elements are equal $(\kappa_1, \kappa_2, 0) = (2, 0, 0)$. Consider the functions

$$\phi_1(z) = -\frac{3(z+3)}{(z-2)(2z+1)(6z+1)} x_1^-(z) = -\frac{3(z+3)}{z^2(z-2)(2z+1)(6z+1)},$$

$$\phi_2(z) = \frac{2(3z+2)(z+3)}{(z-2)(2z+1)(6z+1)} x_2^-(z) = \frac{2(3z+2)(z+3)}{(z-2)(2z-1)(6z+1)}.$$

Let us expand the functions $\phi_1(t), \phi_2(t)$ in simple fractions

$$\phi_1(t) = \frac{-129/4}{t} + \frac{9/2}{t^2} + \frac{-6}{2t+1} + \frac{2754/13}{6t+1} + \frac{-3/52}{t-2},$$

$$\phi_2(t) = \frac{-49/12}{2t-1} + \frac{153/52}{6t+1} + \frac{80/39}{t-2}.$$

Thus

$$\phi_1^-(t) = \frac{-129/4}{t} + \frac{9/2}{t^2} + \frac{-6}{2t+1} + \frac{2754/13}{6t+1},\ \phi_2^-(t) = \frac{-49/12}{2t-1} + \frac{153/52}{6t+1}.$$

Hence $\gamma_1 = 1 < \kappa_1 = 2$, but $\gamma_2 = 1 > \kappa_2 = 0$. Therefore we have to do elementary transformations with the first and third columns. For this we expand the function $1/\phi_1^-(t)$ in continued fraction

$$\frac{1}{\phi_1^-(z)} = \frac{52(12z^4+8z^3+z^2)}{3(12z^3+32z^2+65z+78)} = q_1^{\gamma_{1,0}}(z) + \frac{1}{q_1^{\gamma_{1,1}}(z) + \frac{1}{q_1^{\gamma_{1,2}}(z)+\ldots}}.$$

Here $q_1^{\gamma_{1,0}}(z) = 52/3z - 104/3$ is a polynomial of the order 1. Applying Chebotarev's algorithm we get the partial Multiplying the first column on $-q_1^{\gamma_{1,0}}(z)$ and adding to the third column we obtain that the transformed matrix in the form

$$\widetilde{X}^-(z) = \begin{pmatrix} x_1^{\pm}(z) & 0 & -\dfrac{52/3}{z} + \dfrac{104/3}{z^2} \\ 0 & x_2^{\pm}(z) & 0 \\ \phi_1^{\pm}(z) & \phi_2^{\pm}(z) & \dfrac{52(z+3)}{z^2(2z+1)(6z+1)} \end{pmatrix}.$$

It has the normal form at infinity and its partial indices are equal (1,0,1)[1].

References

1. **Adukov V. M.** Wiener-Hopf factorization of meromorphic matrix-functions, *St. Petersburg Math. J.*, 1993, vol. 4 (1), pp. 51–69.

2. **Bolibruch A. A.** Monodromy Problems in the Analytic Theory of Differential Equations, Moscow: MTsNMO, 2009 (in Russian).

3. **Chebotarev G. N.** Partial indices of the Riemann boundary value problem with a triangular matrix of the second order, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1956, vol. XI (3(69)), pp. 192–202 (in Russian).

4. **Gakhov F. D.** *Boundary Value Problems*, 3rd ed., Moscow: Nauka. 1977, 544 p. (in Russian).

5. **Khrapkov A.A.** *Wiener-Hopf method in mixed elasticity problems*, Sankt Petersburg, 2001.

6. **Lawrie J. B., Abrahams, I. D.** A brief historical perspective of the Wiener-Hopf technique, *J. Engrg. Math.*, 2007, vol. 59 (4), pp. 351–358.

7. **Litvinchuk G. S., Spitkovsky I. M.** *Factorization of measurable matrix functions*, Basel-Boston: Birkhäuser, 1987, 371 p.

8. **Muskhelishvili N. I.** *Singular Integral Equation*, 3rd ed., Moscow: Nauka, 1968, 600 p. (in Russian).

[1]Calculation in these examples are performed by using "Alfa Mathematica".

9. **Primachuk L., Rogosin S.** Factorization of Triangular Matrix-Functions of an Arbitrary Order, *Lobachevsky J. of Math.*, 2018, vol. 39 (1), pp. 129–137.

10. **Rogosin S., Mishuris G.** Constructive methods for factorization of matrix-functions, *IMA J. Appl. Math.*, 2016, vol. 81 (2), pp. 365–391.

Аннотация

Дубатовская М. В., Примачук Л. П., Рогозин С. В. О факторизации треугольных матриц функций

Статья посвящена анализу эффективного метода факторизации треугольных матриц функций произвольного порядка, обобщающего метод Г. Н.Чеботарева. Результаты проиллюстрированы примерами.

Ключевые слова: факторизация матриц-функций, треугольные матрицы, цепные дроби.

Список литературы

1. **Адуков В. М.** Факторизация Винера-Хопфа мероморфных матриц-функций // *Алгебра и Анализ. 1992. Т. 4 (1). С. 51–69.*

2. **Болибрух А. А.** Обратная задача о монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: МЦНМО, 2009.

3. **Чеботарев Г. Н.** Частные индексы краевой задачи Римана с треугольной матрицей второго порядка // *Успехи мат. наук. 1956. Т. XI (3(69)). С. 192–202.*

4. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. 3-е изд. М.: Наука, 1977. 544 с.

5. **Khrapkov A. A.** Wiener-Hopf method in mixed elasticity problems. Sankt Petersburg, 2001.

6. **Lawrie J. B., Abrahams, I. D.** A brief historical perspective of the Wiener-Hopf technique // *J. Engrg. Math. 2007. Vol. 59 (4). Pp. 351–358.*

7. **Litvinchuk G. S., Spitkovsky I. M.** Factorization of measurable matrix functions. Basel-Boston: Birkhäuser, 1987. 371 p.

8. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд. М.: Наука, 1968. 600 с.

9. **Primachuk L., Rogosin S.** Factorization of Triangular Matrix-Functions of an Arbitrary Order // *Lobachevsky J. of Math. 2018. Vol. 39 (1). Pp. 129–137.*

10. **Rogosin S., Mishuris G.** Constructive methods for factorization of matrix-functions // *IMA J. Appl. Math. 2016. Vol. 81 (2). Pp. 365–391.*

Для цитирования: Dubatovskaya M., Primachuk L., Rogosin S. On factorization of triangle matrix functions // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 4 (25). С. 5–14.*

For citation: Dubatovskaya M., Primachuk L., Rogosin S. On factorization of triangle matrix functions, *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, №4 (25), pp. 5–14.

Belarusian State University, Minsk, Belarus *Поступила 01.12.2017*

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (25). 2017

УДК 512.643

МОДИФИЦИРОВАННОЕ ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ЕГО СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

А. Б. Певный, С. М. Ситник

Предлагается модифицированное дискретное преобразование Фурье порядка n. При $n = 4m$ матрица этого преобразования имеет 4 собственных числа, все кратности m.
Ключевые слова: дискретное преобразование Фурье, собственные числа.

1. Введение

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) является одним из самых известных и полезных математических инструментов.

ДПФ определяется матрицей F размера $n \times n$ с элементами

$$F(k,j) = \frac{1}{\sqrt{n}}\omega^{-kj}, \qquad k,j \in 0 : n-1,$$

где $\omega = exp\frac{2\pi i}{n}$. Здесь $0 : n-1$ обозначает множество целых чисел от 0 до $n-1$.

Рассмотрим задачу о нахождении спектра ДПФ при любом n. Известно, что $F^4 = E$, где E — единичная матрица, поэтому собственными значениями могут быть лишь числа ± 1, $\pm i$. Основная сложность состоит в вычислении кратностей этих значений. Кратности были найдены для любого n знаменитым математиком Исайей Шуром [1] в 1921 году.

В таблице обращает на себя внимание факт, что при $n = 4m$ кратности собственных чисел не равны.

Данная работа возникла из желания исправить этот недостаток. Хотелось бы модифицировать ДПФ так, чтобы при $n = 4m$ кратности собственных чисел были равны.

Таблица

Общие формулы И. Шура для кратностей собственных значений

n	1	i	-1	$-i$
$4m$	$m+1$	$m-1$	m	m
$4m+1$	$m+1$	m	m	m
$4m+2$	$m+1$	m	$m+1$	m
$4m+3$	$m+1$	m	$m+1$	$m+1$

2. Новый вид ДПФ и его свойства

Обобщённые ДПФ были предложены в работе [2]. Мы подробно исследуем одно новое преобразование и докажем, что при $n = 4m$ кратности чисел спектра будут равны.

Рассмотрим матрицу F с элементами

$$F(k,j) = \frac{1}{\sqrt{n}}\omega^{k(1-j)}, \quad k,j \in 0 : n-1. \tag{1}$$

Приведем вид F при $n = 6$:

$$F = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \omega & 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \omega^{-3} & \omega^{-4} \\ \omega^2 & 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \omega^{-6} & \omega^{-8} \\ \omega^3 & 1 & \omega^{-3} & \omega^{-6} & \omega^{-9} & \omega^{-12} \\ \omega^4 & 1 & \omega^{-4} & \omega^{-8} & \omega^{-12} & \omega^{-16} \\ \omega^5 & 1 & \omega^{-5} & \omega^{-10} & \omega^{-15} & \omega^{-20} \end{bmatrix}.$$

В нулевой строке F стоят единицы, в первой — все корни n-й степени из 1, начиная с ω и далее привлекаем корни, двигаясь по окружности по часовой стрелке.

Как и в обычном ДПФ, матрица F является унитарной. Для исследования её спектральных свойств нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Матрица $P = F^2$ обладает свойствами:*

(i) $P^2 = \omega E$ при всех n;

(ii) При чётном n след $\mathrm{tr}(P)$ равен нулю и матрица P имеет два собственных числа $\sqrt{\omega}$ и $-\sqrt{\omega}$, каждое кратности $n/2$.

Доказательство. Матрица $P = F^2$ имеет характерный вид с двумя

ненулевыми диагоналями. Например, при $n = 6$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При n чётном на главной диагонали P стоят одни нули, и поэтому $\mathrm{tr}(P) = 0$.

Используя двухдиагональный вид, можно показать, что $P^2 = \omega E$. Отсюда собственными числами матрицы P могут быть только числа $\sqrt{\omega} = exp\frac{2\pi i}{n}$ и $-\sqrt{\omega}$ с кратностями k_1 и k_2.

Сумма всех собственных чисел равна следу матрицы. Поэтому при n чётном $k_1\sqrt{\omega} - k_2\sqrt{\omega} = \mathrm{tr}(P) = 0$, откуда $k_1 = k_2 = n/2$. Лемма доказана. □

Ещё потребуется вычислить сумму

$$R_{4m} = \sum_{k=0}^{4m-1} \omega^{k(k-1)}, \quad \text{где} \quad \omega = exp\left(\frac{2\pi i}{4m}\right).$$

ЛЕММА 2. *Справедливо равенство*

$$R_{4m} = 0. \tag{2}$$

Доказательство. Введём обозначение $v_k = \omega^{k(k-1)}$ и найдём сумму $v_k + v_{k+2m}$. Имеем

$$(k + 2m)(k + 2m - 1) = k(k - 1) + 2m(2k + 2m - 1),$$

$v_{k+2m} = v_k\omega^{2ms}$, где $s = 2k + 2m - 1$.

Поскольку $\omega^{2m} = e^{\pi i} = -1$, s — нечётное, то $v_{k+2m} = -v_k$. Итак, в сумме R_{4m} слагаемые разбиваются на пары, и в каждой паре сумма равна нулю. Лемма доказана. □

ЗАМЕЧАНИЕ. *Сумма R_{4m} аналогична гауссовым суммам $G_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}$, где $\omega = exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$. Гаусс вычислил эти суммы для всех n. При $n = 4m+2$ слагаемые k и $k+2m+1$ уничтожаются и $G_{4m+2} = 0$. Мы не видели в литературе такого способа вычисления гауссовой суммы (правда в простейшем случае $n = 4m + 2$).*

3. Собственные числа матрицы F

ТЕОРЕМА 1. *При $n = 4m$ матрица F вида (1) имеет собственные числа — корни 4-й степени из ω, все одинаковой кратности m.*

Доказательство. По лемме 1 $F^4 = P^2 = \omega E$, поэтому собственными числами могут быть только корни 4-й степени из ω:

$$\varepsilon_1 = exp\frac{\pi i}{2n}, \quad \varepsilon_2 = i\varepsilon_1, \quad \varepsilon_3 = -\varepsilon_1, \quad \varepsilon_4 = -i\varepsilon_1.$$

Кратности этих собственных чисел обозначим a, b, c, d, $a + b + c + d = n$. Имеем $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_3^2 = \sqrt{\omega}$. При чётном n число $\sqrt{\omega}$ имеет кратность $n/2$ для матрицы P (см. лемму 1). Поэтому $a + c = n/2$, $b + d = n/2$ при чётном n.

Далее пользуемся тем, что сумма всех собственных чисел равна следу матрицы:

$$a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3 + d\varepsilon_4 = \mathrm{tr}(F).$$

Имеем $\mathrm{tr}(F) = \frac{1}{4m}\sum_{k=0}^{4m-1}\omega^{k(1-k)} = \frac{1}{4m}\overline{R_{4m}}$. Но в силу (2) $R_{4m} = 0$, поэтому $\mathrm{tr}(F) = 0$.

Значит, сумма всех собственных чисел равна нулю:

$$a\varepsilon_1 + b(i\varepsilon_1) + c(-\varepsilon_1) + d(-i\varepsilon_1) = 0.$$

После сокращения на ε_1 получаем $a - c + i(b - d) = 0$, откуда $a = c$, $b = d$. Ранее было установлено, что $a + c = n/2$, $b + d = n/2$. Окончательно получаем

$$a = c = b = d = n/4.$$

Теорема доказана. □

Список литературы

1. **Schur I.** Über die Gaussschen Summen // *Nach. Gessel. Göttingen. Math.-Phys. Klasse. 1921. Pp. 147–153.*

2. **Ситник С. М.** Обобщённые дискретные преобразования Фурье и их спектральные свойства // *Новые информационные технологии в автоматизированных системах. М.: МИЭТ, 2014.*

Summary

Pevnyi A. B., Sitnik S. M. Modified discrete Fourier transform and its spectral properties

Modified discrete Fourier transform of the order n is suggested. For $n = 4m$ the matrix of this transform has 4 eigenvalues with multiplicities m.

Keywords: discrete Fourier transform, eigenvalues.

References

1. **Schur I.** Über die Gaussschen Summen, *Nach. Gessel. Göttingen. Math.-Phys. Klasse*, 1921, pp. 147–153.

2. **Sitnik S. M.** Obobshhjonnye diskretnye preobrazovanija Fur'e i ih spektral'nye svojstva (Generalized discrete Fourier transform and its spectral properties), *New information technologies in automized systems*, M., MIET, 2014.

Для цитирования: Певный А. Б., Ситник С. М. Модифицированное дискретное преобразование Фурье и его спектральные свойства // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 4 (25). С. 15–19.*

For citation: Pevnyi A. B., Sitnik S. M. Modified discrete Fourier transform and its spectral properties, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, №4 (25), pp. 15–19.

СГУ им. Питирима Сорокина,
Белгородский госуниверситет

Поступила 06.11.2017

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (25). 2017

УДК 548.52

ДИНАМИКА СЕТКИ МЕЖМОЛЕКУЛЯРНЫХ СВЯЗЕЙ И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕДАХ

В. Н. Чередов, Л. А. Куратова

Предложен новый подход к исследованию молекулярной структуры жидкой и твердой фазы вещества — модель мерцающих связей. Данный подход основывается на развитии модели тепловых колебаний атомов (молекул) вещества и их влиянии на динамику молекулярной структуры и структуру сетки межмолекулярных связей твердой и жидкой фаз вещества.

Выявлена температурная зависимость динамики свойств сетки межмолекулярных связей твердой и жидкой фаз вещества, а также динамики свойств указанной сетки связей в фазовых переходах первого рода «твердое тело — жидкость» и «жидкость — газ». На основе построенной модели изучена динамика структуры H_2O и ее фазовых переходов.

Ключевые слова: межмолекулярные связи, фазовые переходы, кристаллизация, структура решетки.

1. Введение

Исследования организации вещества в молекулярные (атомные) структуры неизменно находятся в центре внимания физиков и химиков. В последнее время особое значение данные исследования получили в связи с повышенным вниманием науки к наноструктурам. В последние годы развитие получили оригинальные модели процессов организации вещества на наноуровне, которые используются для решения широкого круга физических проблем.

В данной работе в развитие теории самоорганизации вещества на наноуровне предлагается модель мерцающих связей для исследования

структуры межмолекулярных связей кристаллической и жидкой фаз вещества, фазовых переходов 1-го рода. Данная модель существенно расширяет наши возможности анализа фазовых переходов, понимания природы и структуры конденсированного состояния вещества.

2. Модель мерцающих связей

Рассмотрим однородный участок твердой или жидкой фазы в гипотетическом состоянии, когда все связи между молекулами (атомами) являются устойчивыми. Пусть данный участок вещества получает некоторый небольшой объем тепла ΔQ. Тогда внутренняя энергия молекул увеличивается на такую же величину $\Delta E_i = \Delta Q$. Вполне естественно, что увеличение внутренней энергии молекул может привести к разрыву некоторых межмолекулярных связей.

Природа разрыва связей между молекулами (атомами) зависит от типа этих связей. В общем виде разрыв связи можно представить как временное перераспределение электронной плотности у атомов, образующих молекулы и участвующих в связи, в состояние отсутствия связи. Например, для водородной и вандервальсовой связи разрыв связи между молекулами означает временное изменение электронной плотности, при котором одна из молекул, участвующих в связи, теряет на время дипольные свойства [1].

Может реализоваться ситуация, когда часть связей между молекулами в структуре вещества находится в устойчивом состоянии, а часть времени в разорванном состоянии. Если вещество находится в состоянии с постоянной температурой и давлением, т. е. с одинаковой суммарной внутренней энергией молекул, то часть межмолекулярных связей всегда находится в разорванном состоянии. Разорванные связи восстанавливаются, переходят в устойчивое состояние, а другие устойчивые связи в это же время рвутся. Происходит как бы «мерцание» или «осцилляция» разрывов связей внутри объема вещества.

Применяя принцип однородности пространства, приходим к понятию мерцающей связи. Распределение разорванных связей в пространстве и во времени должно быть равномерно. То есть каждая межмолекулярная связь во всем объеме вещества должна мерцать, время от времени разрываться и потом опять возникать.

При дальнейшем увеличении внутренней энергии молекул происходит увеличение количества разорванных связей молекулы H и, соответственно, уменьшение количества устойчивых связей молекулы F ($F + H = K_m$, где K_m — координационное число молекулы). То есть суммарная внутренняя энергия молекул и температура вещества определяются в данной модели количеством устойчивых межмолекулярных

связей молекулы вещества.

Разрыв связи, который произошел в одном месте решетки, прекращается, связь восстанавливается, и одновременно происходит разрыв связи в другом месте решетки, и т. д. Конкретная межмолекулярная связь находится в двух состояниях. Часть времени τ_f межмолекулярная связь устойчива, а часть времени τ_g неустойчива или разорвана, при этом время мерцания связи $\tau_m = \tau_f + \tau_g$. В данной формулировке все межмолекулярные связи мерцающие и все реально существующие, т. е. в идеале их количество в конкретный момент времени определяется эмпирическим путем. Тем не менее, внутренняя энергия вещества в конкретный момент времени определяется исключительно количеством устойчивых связей $F = K_m\tau_f/\tau_m$ или в силу однородности вещества количеством устойчивых связей одной молекулы $H = K_m\tau_g/\tau_m$, где N_m — общее количество связей вещества, K_m — количество связей одной молекулы вещества.

Рассмотрим ряд условий и обстоятельств, характеризующих модель мерцающих связей. Во-первых, термодинамическое состояние вещества определяется в каждый момент времени исключительно соотношением количества устойчивых и разорванных связей между молекулами (атомами). Данное условие исключает рассмотрение случаев, при которых другие факторы могут изменять термодинамическое состояние вещества.

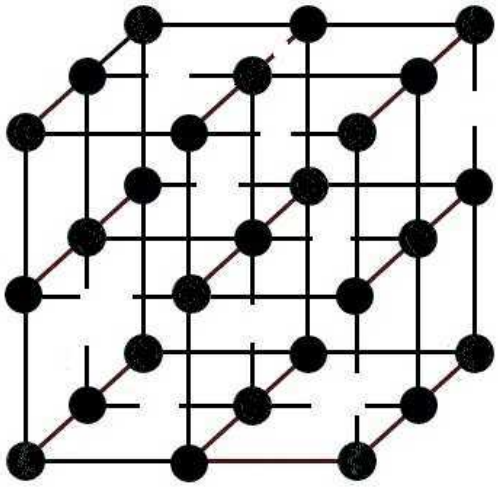


Рис. 1. Мгновенная структура твердого тела с простой кубической кристаллической решеткой с мерцающими связями (разорванные связи показаны разорванной линией)

Во-вторых, в течение какого времени количество и, соответственно, доля разорванных связей в общей доле межмолекулярных связей в одном термодинамическом состоянии сохраняется? В данном представлении термодинамическое состояние твердого тела или внутренняя энергия тела определяется мгновенным «снимком» всех связей структуры: разорванных и устойчивых (рис. 1). В каждый последующий момент времени мгновенная структура вещества будет постоянно меняться.

В-третьих, связи между молекулами (атомами), как устойчивые, так и разорванные, распределены по всему объему вещества равномерно. Данное условие ограничивает исследуемые объекты модели мерцающих (осциллирующих) связей. Фактически в данной модели рассматриваются объекты вещества, весь объем которых находится в одном термодинамическом состоянии, исключая неоднородности как самого вещества, так и его состояния. Другими словами, если весь объект нагревается (или охлаждается), то нагреваются (или охлаждаются) одинаково все части объекта. Если объект переходит из одной фазы вещества в другую, то каждая его часть одновременно переходит из той же фазы в другую. Это ограничивает объекты рассмотрения до участков одной фазы при фазовых переходах или до размеров толщины границы фазового перехода (фронта кристаллизации), т. е. до наноразмеров.

В-четвертых, на поверхности твердой и жидкой фазы вещества количество разорванных связей молекул много больше, чем в объеме вещества. Соответственно, количество устойчивых связей молекул в поверхностном слое вещества меньше, чем у молекул объема. Это приводит к различию термодинамических свойств вещества на поверхности и в объеме. В частности, температура плавления тонких пленок должна быть меньше, чем в объеме вещества. Твердое тело должно начинать плавится на своей поверхности.

В-пятых, в твердом агрегатном состоянии вещества в среднем молекулы (атом) имеют не менее 3-х устойчивых межмолекулярных связей. В противном случае происходит фазовый переход из твердого агрегатного состояния вещества в жидкое и наоборот. В общем случае, обратное утверждение неверно. Учитывая, что равновесное (без учета тепловых колебаний) положение молекул в твердом теле (кристалле) устойчиво, следует предположить, что количество устойчивых межмолекулярных связей одной молекулы в твердом теле должно быть в среднем не менее 3-х. Так как в трехмерном пространстве существует три поступательные степени свободы, то 3-х неразорванных межмолекулярных связей для одной молекулы вполне достаточно для ее устойчивого положения в структуре твердого тела и сохранения структурой устойчивой решетки.

Таким образом, ограничение снизу на среднее количество устойчивых связей молекул твердой фазы вещества: $F \geq 3$.

Для наглядности рассмотрим решетку твердого тела с однородной структурой в форме прямоугольного параллелепипеда с количеством связей у молекулы k, l, m по 3-м пространственным осям x, y, z. Общее количество межмолекулярных связей $N = 3 * k * l * m$. На рис. 2 представлен граф устойчивых связей, являющийся гипотетическим состоянием решетки твердого тела, при котором количество межмолекулярных связей у каждой молекулы равно 3-м. У молекул, количество связей которых меньше 3-х, отсутствующие связи не изображены, так как они соединяют данные молекулы с молекулами за пределами данного участка вещества. Подчеркнем, что данное состояние решетки нам необходимо исключительно для наглядности и представляет собой один из практически бесконечного множества вариантов пространственной решетки распределения устойчивых связей.

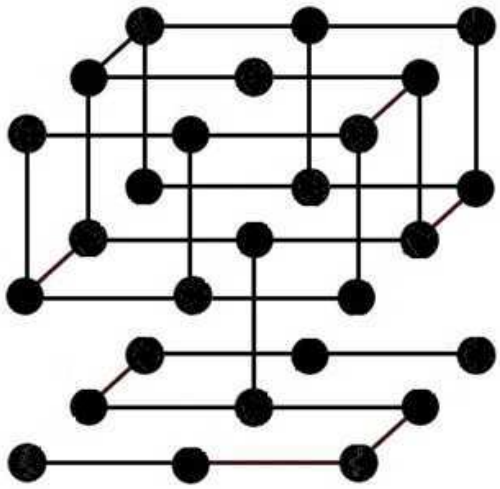


Рис. 2. Граф одномоментных устойчивых связей в простой кубической решетке твердого тела (размерами $k*l*m$), у которого каждая молекула имеет 3 межмолекулярные связи (изображены только устойчивые связи)

В-шестых, в жидком агрегатном состоянии вещества в среднем молекулы (атомы) имеют не менее 2-х устойчивых межмолекулярных связей: $F \geq 2$. В случае снижения количества устойчивых межмолекулярных связей до меньшего числа происходит фазовый переход из жидкого агрегатного состояния вещества в газообразное и наоборот.

На рис. 3 представлено гипотетическое состояние решетки жидкой

фазы, при котором количество межмолекулярных связей у каждой молекулы равно 2-м. Фактически получилась замкнутая одномерная цепочка молекул. Подчеркнем, что данное состояние решетки нам необходимо исключительно для наглядности и оно реально невозможно в связи с необходимостью соблюдения принципа однородности пространства, а также в данном случае и в связи с невозможностью данного состояния из-за эффекта поверхностного натяжения жидкости. Тем не менее, при перераспределении устойчивых межмолекулярных связей однородно по всей трехмерной структуре общее их количество не изменится, а вышеперечисленные соображения удовлетворяются (см. рис.).

Рис. 3. Гипотетическое трансформированное состояние решетки жидкой фазы вещества, у которого каждая молекула имеет две устойчивые межмолекулярные связи (изображены только устойчивые связи)

В зависимости от того, сколько связей молекулы в данный момент времени находится в устойчивом или в разорванном состоянии, молекула занимает более или менее возбужденное равновесное состояние (положение в структуре), характеризующееся, соответственно, большим или меньшим значением внутренней энергии молекулы. При этом под воздействием оставшихся связей молекул-соседей сама молекула немного смещается в пространстве. При восстановлении связи, т. е. при приобретении связью устойчивого характера, молекула опять занимает свое исходное пространственное положение и переходит в исходное менее возбужденное состояние с меньшей энергией.

То же самое происходит при «мерцании» всех остальных связей данной молекулы. При этом следует учитывать, что молекулы, с которыми выбранная молекула имеет связи, сами по себе также колеблются около положения равновесия при «мерцании» своих связей. Это придает колебаниям молекулы хаотический характер со степенями свободы, соответствующими степеням свободы тепловых колебаний.

Описанный механизм колебания молекул и является в модели мер-

цающих связей основным механизмом теплового колебания. При этом в данной модели первично не тепловое колебание молекул вещества, а «мерцание» связей молекул вещества. Модель мерцающих связей дает дополнительные возможности компьютерного моделирования динамики теплового колебания молекул вещества.

Осцилляция связей молекул жидкой и твердой фазы вещества имеет тепловую природу и определяется температурой вещества. В связи с этим мы предполагаем, что количество мерцающих связей в разорванном состоянии в общем количестве связей постоянно и определяется прежде всего температурой T и, соответственно, внутренней энергией молекулы E_i. Чем больше T, тем больше H и тем меньше F.

Молекулам вещества, находящегося при $T = 0\ K$, чтобы освободится от межмолекулярных связей, необходимо придать энергию, называемую энергией сублимации E_s и равную:

$$E_s = \frac{i}{2} k_B T_b + \Delta Q_m + \Delta Q_b = K_m \frac{E_m}{2}, \tag{1}$$

где i — число степеней свободы сублимированной молекулы, k_B — постоянная Больцмана, T_b — температура кипения, ΔQ_m — теплота плавления из расчета на одну молекулу, ΔQ_b — теплота парообразования из расчета на одну молекулу, K_m — координационное число молекулы в твердой фазе, E_m — энергия разрыва одной связи при $T = 0\ K$.

Формула (1) показывает, какую энергию вещество в твердой фазе при абсолютном нуле температуры должно получить, чтобы все молекулы стали свободными и молекула из твердой фазы перешла в газообразную, т. е. стала свободна от межмолекулярных связей. Данная энергия сублимации равняется энергии связи молекулы при нулевой температуре. Деление на 2 в правой части формулы (1) возникает вследствие того, что разрыв одной связи относится сразу к двум молекулам. По формуле (1) можно рассчитать энергию разрыва одной связи молекулы.

Энергия связи молекулы $E_b = FE_m = (K_m - H)E_m$ будет определяться формулой:

$$E_b = F\frac{E_m}{2} = E_s - E_i = K_m \frac{E_m}{2} - E_i. \tag{2}$$

Для твердой фазы внутренняя энергия молекул определяется энергией их тепловых колебаний (энергией образования и динамики дефектов кристаллической решетки [2] пренебрегаем, так как она значительно меньше последней).

Как уже отмечалось ранее, мерцание межмолекулярных связей приводит к тепловым колебаниям молекул, а последние описываются в

термодинамике моделями Дюлонга и Пти, моделью Энштейна и самой близкой к реальности моделью Дебая [3]. Поэтому для определения энергии связи молекул в условиях мерцания межмолекулярных связей, которая равна в модели мерцающих связей энергии тепловых колебаний молекул, используем модель Дебая [3].

Тогда энергия связи молекул твердой фазы определяется следующими формулами:

$$E_b = F^{sp}\frac{E_m}{2} = K_m\frac{E_m}{2} - 9k_BT\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3\int_0^{\Theta_D/T}\frac{x^3dx}{e^x-1}, \qquad (3)$$

где F^{sp} — количество устойчивых связей молекулы в твердой фазе при температуре T, Θ_D — температура Дебая.

При температуре плавления $T = Tm$ формула (3) позволяет рассчитать количество устойчивых связей молекулы в твердой фазе при температуре плавления F_m^{sp} из выражения для энергии связи:

$$E_b = F_m^{sp}\frac{E_m}{2} = K_m\frac{E_m}{2} - 9k_BT_m\left(\frac{T_m}{\Theta_D}\right)^3\int_0^{\Theta_D/T_m}\frac{x^3dx}{e^x-1}, \qquad (4)$$

где F_m^{sp}— количество устойчивых связей молекулы в твердой фазе при температуре плавления $T = T_M$.

Подставляя в формулу (4) константы и известные данные, получаем количество устойчивых связей молекулы в твердой фазе при температуре плавления F_m^{sp}. При температуре плавления в твердой фазе у молекулы имеется F_m^{sp} устойчивых связей, а значит, $K_m - F_m^{sp}$ связей разорвано.

В жидкой фазе при температуре плавления (кристаллизации) необходимо вычесть из выражения энергии связи в формуле (4) теплоту плавления, приведенную на одну молекулу. Соответственно, получаем выражение для количества устойчивых связей молекулы в жидкой фазе при температуре плавления F_m^{lp}:

$$E_b = F_m^{lp}\frac{E_m}{2} = K_m\frac{E_m}{2} - 9k_BT_m\left(\frac{T_m}{\Theta_D}\right)^3\int_0^{\Theta_D/T_m}\frac{x^3dx}{e^x-1} - \Delta Q_m, \qquad (5)$$

где F_m^{lp} — количество устойчивых связей молекулы в жидкой фазе при температуре плавления $T = T_m$.

Для газообразной фазы необходимо учесть теплоту парообразования, приведенную на одну молекулу. Для этого подставим формулу (1)

в формулу (2). Получаем формулу энергии связи молекулы газообразной фазы при температуре кипения $T = Tb$:

$$E_b = F_b^{gp}\frac{E_m}{2} = K_m\frac{E_m}{2} - \frac{i}{2}k_B T_b - \Delta Q_m - \Delta Q_b = 0, \tag{6}$$

где F_b^{gp} — количество устойчивых связей молекулы в газообразной фазе при температуре кипения $T = T_b$ ($F_b^{gp} = 0$).

В жидкой фазе при температуре кипения:

$$E_b = F_b^{lp}\frac{E_m}{2} = K_m\frac{E_m}{2} - \frac{i}{2}k_B T_b - \Delta Q_m = \Delta Q_b, \tag{7}$$

где F_b^{lp} — количество устойчивых связей молекулы в жидкой фазе при температуре кипения $T = T_b$.

В жидкой фазе для $T_m < T < T_b$ количество устойчивых связей молекулы меняется в следующем диапазоне $F_b^{lp} < F^{lp} < F_m^{lp}$, причем при увеличении температуры количество связей падает. Так как в термодинамике на сегодняшний день отсутствует полноценная модель внутренней энергии молекул жидкости, поэтому аппроксимируем функцию внутренней энергии жидкой фазы от температуры линейной зависимостью, тем более что в реальных жидкостях, например воде, она близка к линейной. Тогда для количества устойчивых связей молекулы получим следующую формулу:

$$E_b = F^{lp}\frac{E_m}{2} = \frac{E_m}{2}\left(F_m^{lp} - \frac{T - T_m}{\Delta\Theta_{ch}^{lp}}\right), \tag{8}$$

где F^{lp} — количество устойчивых связей молекулы в жидкой фазе при температуре $T_m < T < T_b$, $\Delta\Theta_{ch}^{lp}$ — величина характеристической разности температур жидкой фазы вещества $(T_m + \Delta\Theta_{ch}^{lp}) - T_m$.

В формуле (8) вводится величина характеристической разности температур жидкой фазы вещества, которая определяется по следующему соотношению:

$$\Delta\Theta_{ch}^{lp} = \frac{T_b - T_m}{F_m^{lp} - F_m^{gp}}. \tag{9}$$

Характеристическая разность температур жидкой фазы вещества $\Delta\Theta_{ch}^{lp}$ является разностью температур, при увеличении на которую температуры жидкости от температуры плавления, должна разорваться дополнительно ровно одна межмолекулярная связь молекулы. Данная характеристическая разность температур также вводится в настоящей работе и является уникальным параметром для каждого вещества.

В газообразной фазе количество среднее устойчивых связей молекулы можно считать равным нулю $F^{gp} = 0$.

Сводя воедино все участки количества устойчивых связей молекулы F воедино, т. е. формулы (3) и (8), получаем:

$$F = \begin{cases} F^{sp} = K_m - 9\frac{2}{E_m} k_B T \left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3 \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}, \\ \text{при } 0 \le T \le T_m \text{ (твердая фаза);} \\ F^{lp} = F_m^{lp} - \frac{T - T_m}{\Delta\Theta_{ch}^{lp}}, \\ \text{при } T_m \le T \le T_b \text{ (жидкая фаза);} \\ F^{gp} = 0, \\ \text{при } T \le T_b \text{ (газообразная фаза).} \end{cases} \tag{10}$$

Для удобства и наглядности введем два показателя: долю устойчивых связей молекул $f = F/K_m$ и долю разорванных связей молекул $h = H/K_m$. Координационное число соответствует координационному числу молекул в соответствующей фазе, т. е. для молекул твердой фазы K_m, в жидкой фазе K_m^{lp} (может быть как больше, так и меньше K_m), в газообразной фазе $K_m^{gp} = 0$. Область изменения показателей f и h определена от 0 до 1. При этом всегда $f + h = 1$.

3. Структура воды в модели мерцающих связей

Отобразим полученные выше результаты на графике температурной зависимости показателей F из сводной формулы 10 для H_2O (рис. 4).

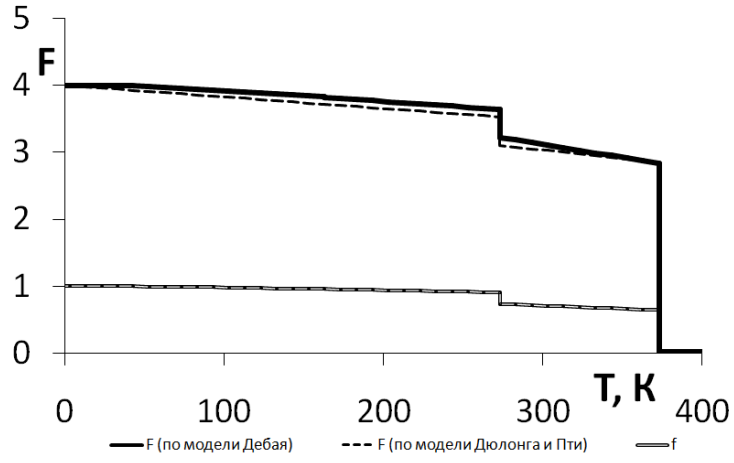


Рис. 4. Фазовые переходы и температурная зависимость количества и доли устойчивых связей молекулы в решетке H_2O

Данные по воде брались из работ [4–6]. Расчеты по формулам 4, 5, 7 дают для воды следующие значения количества устойчивых связей для льда при температуре плавления $F_m^{sp} = 3,64$. При температуре плавления во льду у молекулы имеется 3,64 устойчивых связей, а значит, 0,36 связей разорвано. В жидкой фазе при температуре плавления (кристаллизации) для воды получаем $F_m^{lp} = 3,22$. В жидкой фазе при температуре кипения для воды получается значение $F_b^{lp} = 2,84$.

4. Заключение

Впервые представлена модель мерцающих связей, в рамках которой построена модель структуры кристалла и жидкости как непрерывной сетки межмолекулярных связей однородной по количеству устойчивых межмолекулярных связей.

Выявлена температурная зависимость количества устойчивых связей молекул для твердой и жидкой фазы, его изменения при фазовых переходах первого рода «твердое тело — жидкость» и «жидкость — газ». На примере воды показана зависимость количества устойчивых межмолекулярных связей в зависимости от температуры и фазы вещества, ее изменение в процессе фазовых переходов.

Список литературы

1. **Каплан И. Г.** Межмолекулярные взаимодействия. Физическая интерпретация, компьютерные расчёты и модельный потенциал. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. 400 с.

2. **Чередов В. Н.** Статика и динамика дефектов в синтетических кристаллах флюорита. СПб.: Наука, 1993. 112 с.

3. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Статистическая физика. М.: Физматлит, 2010. Ч. 1. 616 с.

4. **Енохович А. С.** Справочник по физике и технике. М.: Просвещение, 1989. 224 с.

5. **Зацепина Г. Н.** Физические свойства и структура воды. М.: МГУ, 1998. 184 с.

6. **Эйзенберг Д., Кауцман В.** Структура и свойства воды. М.: Директ-медиа, 2012. 284 с.

Summary

Cheredov V. N., Kuratova L. A. Dynamics of a network of intermolecular bonds and phase transitions in condensed media

A new approach to the investigation of the molecular structure of the liquid and solid phases of matter — the model of flickering bonds — is proposed. This approach is based on the development of the model of thermal vibrations of atoms (molecules) of a matter and their effect on the dynamics of the molecular structure and the structure of the intermolecular bond network of the solid and liquid phases of matter.

The temperature dependence of the dynamics of the properties of the network of intermolecular bonds of the solid and liquid phases of matter, as well as the dynamics of the properties of this bond network in the first-order phase transitions «solid-liquid» and «liquid-gas» is revealed. On the basis of the constructed model, the dynamics of the structure of H_2O and its phase transitions is studied.

Keywords: intermolecular bonds, phase transitions, crystallization, lattice structure.

References

1. **Kaplan I. G.** *Mezhmolekuljarnye vzaimodejstvija. Fizicheskaja interpretacija, komp'juternye raschjoty i model'nye potencial* (Intermolecular interactions. Physical interpretation, computer calculations and model potentials), Moscow: BINOM, Laboratory of Knowledge, 2012, 400 p.

2. **Cheredov V. N.** *Statika i dinamika defektov v sinteticheskih kristallah fljuorita* (Statics and dynamics of defects in synthetic fluorite crystals), Saint-Petersburg: Nauka, 1993, 112 p.

3. **Landau L. D., Lifshitz E. M.** *Statisticheskaja fizika* (Statistical physics), part 1, Moscow: Fizmatlit, 2010, 616 p.

4. **Enochovich A. S.** *Spravochnik po fizike i tehnike* (Reference book on physics and techniques), Moscow: Prosveshenie, 1989, 224 p.

5. **Zatsepina G. N.** *Fizicheskie svojstva i struktura vody* (Physical properties and structure of water), Moscow: Moscow State University, 1998, 184 p.

6. **Eisenberg D., Kautsman V.** *Struktura i svojstva vody* (Structure and properties of water), Moscow: Direct-Media, 2012, 284 p.

Для цитирования: Чередов В. Н., Куратова Л. А. Динамика сетки межмолекулярных связей и фазовые переходы в конденсированных средах // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 4 (25). С. 20–32.*

For citation: Cheredov V. N., Kuratova L. A. Dynamics of a network of intermolecular bonds and phase transitions in condensed media, *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, №4 (25), pp. 20–32.

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 19.12.2017*

ИНФОРМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (25). 2017

УДК 004.272.32

ЭФФЕКТИВНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ПОТОЧНОГО ШИФРА CHACHA20

И. Ф. Королев

Статья посвящена эффективной реализации алгоритма поточного шифрования ChaCha20 для архитектуры ARM. Данный алгоритм обладает возможностью параллельных вычислений. В статье описывается использование этой возможности для ускорения работы алгоритма шифрования с помощью технологии ARM NEON, векторные инструкции которой работают по принципу SIMD.
Ключевые слова: ChaCha20, ARM NEON, SIMD.

Введение

Поточный шифр — симметричный шифр, который выполняет преобразование открытого входного сообщения по биту (или байту) за операцию, тем самым осуществляя операцию шифрования в реальном времени: скорость шифрования соизмерима со скоростью поступления входной информации. Наиболее часто используется в тех случаях, когда открытый текст поступает по частям, имеющим разную длину.

Примером является Salsa20 — семейство поточных шифров, разработанных в 2005 году Даниэлем Бернштейном (Daniel J. Bernstein). Алгоритм шифрования был представлен на конкурсе «eSTREAM», который проводился с целью поиска новых поточных шифров, пригодных для широкого применения, на основе критериев безопасности, простоты, гибкости и производительности (в отношении блочного шифра AES — утвержденного правительством США стандартом, а также других кандидатов), которые могли бы стать новым европейским стандартом для шифрования данных. Алгоритм Salsa20 прошёл все этапы конкурса и стал победителем.

Родственным к данному семейству поточных шифров является семейство ChaCha, опубликованное Даниэлем Бернштейном в 2008 году. Алгоритм ChaCha основан на тех же принципах, что и Salsa20. Изменения в алгоритме шифрования призваны улучшить перемешивание данных за один раунд, предположительно увеличивая устойчивость к криптоанализу, при той же или даже немного большей скорости [2]. Этот алгоритм помимо своего прямого назначения — симметричного шифрования — используется как основа для алгоритма аутентификации сообщений Poly1305, разработанного тем же автором. Алгоритмы ChaCha и Poly1305 обладают высокой производительностью в программных реализациях. Как отдельно друг от друга, так и в «комбинированном режиме» они используются, например, в наборе сетевых инструментов OpenSSH [6], в протоколе TLS [5], а также корпорацией Google в браузере Google Chrome [7].

Семейство Salsa20 включает в себя кроме основного алгоритма его сокращённые версии — Salsa20/12 и Salsa20/8, с двенадцатью и восемью раундами вместо двадцати оригинальных. Семейство ChaCha имеет аналогичные версии оригинального алгоритма. Сокращённые версии применяются в тех случаях, когда скорость важнее безопасности. Существуют атаки, использующие 2^{249} операций против Salsa20/8, а также атаки на такие версии алгоритмов с сокращённым количеством раундов, как Salsa20/7, ChaCha7 и некоторые другие. Единственная известная атака против алгоритмов Salsa20/12, Salsa20/20 [3], ChaCha8, ChaCha12 и ChaCha20 — это атака полным перебором.

Алгоритмы шифрования Salsa20 и ChaCha были сконструированы таким образом, чтобы преобразования над данными можно было осуществлять параллельно, т. е. одновременно. Это даёт существенный выигрыш в скорости для большинства современных платформ. Технология ARM NEON, включенная в большую часть новых планшетов и смартфонов с процессорами на основе архитектуры ARM, позволяет использовать возможности параллелизации обработки данных.

Целью данной статьи является описание эффективной реализации алгоритма поточного шифрования ChaCha20, которая подразумевает под собой использование технологии ARM NEON для параллелизации вычислений и ускорения работы алгоритма шифрования.

Архитектура поточных шифров Salsa20 и ChaCha

Существует несколько моделей построения поточных шифров. Salsa20 и ChaCha используют одну из наиболее распространённых моделей. Пусть M — исходное сообщение (открытый текст) длиной L байт, $L \in \{0, 1, ..., 2^{70}\}$, K — ключ шифрования, N — уникальный номер со-

общения (который служит так называемым вектором инициализации). Тогда зашифрованный текст C получается путём применения к нему функции шифрования E, представляющей собой результат операции побитового исключающего ИЛИ (обозначается знаком $\oplus$) над открытым текстом M и потоком, генерируемым хеш-функцией $H(K, N)$:

$$C = E(M) = M \oplus H(K, N).$$

Исходный текст M получается путём применения к зашифрованному тексту C функции дешифрования D, которая по своей сути является функцией шифрования зашифрованного текста C:

$$M = D(C) = E(C) = C \oplus H(K, N).$$

Открытый текст и зашифрованный текст не влияют на поток. Salsa20 следует этой модели: ядром алгоритма является хеш-функция, генерирующая поток, представляющий собой L-байтную последовательность, которая делится на части по 64 байта. Salsa20 зашифровывает часть открытого текста — блок длиной в 64 байта, выполняя операцию исключающее ИЛИ над этим блоком и значением хеш-функции от ключа, вектора инициализации и номера блока.

Функция шифрования Salsa20 представляет собой длинную цепочку из трех простых операций над 32-битными словами — элементами множества $\{0, 1, ..., 2^{32} - 1\}$:

- 32-битное сложение — $(a + b) \mod 2^{32}$;
- 32-битное исключающее ИЛИ — $a \oplus b$;
- 32-битный циклический сдвиг влево на постоянное значение — $a <<< const$.

Наличие только этих простых операций позволяет алгоритму шифрования достигать высоких скоростей на большинстве вычислительных устройств, при этом алгоритм шифрования не становится от этого менее безопасным [3].

Функция четвертьраунда (*quarterround*) алгоритма Salsa20, являющаяся основой хеш-функции, представляет собой следующую последовательность операций:

$$z1 = y1 \oplus ((y0 + y3) <<< 7),$$

$$z2 = y2 \oplus ((z1 + y0) <<< 9),$$

$$z3 = y3 \oplus ((z2 + z1) <<< 13),$$
$$z0 = y0 \oplus ((z3 + z2) <<< 18),$$

где $quarterround(y) = (z0, z1, z2, z3)$, $y = (y0, y1, y2, y3)$ — вектор из четырёх 32-битных слов. Результатом функции является новый вектор. Можно представить функцию $quarterround(y)$ как модификацию исходного вектора y, т. е. $y1$ изменяется на $z1, y2$ — на $z2, y3$ — на $z3$ и $y0$ — на $z0$.

Salsa20 помещает четыре входных слова (вектор инициализации и номер блока), восемь ключевых слов и четыре константы в матрицу состояния 4×4 следующим образом:

$$\begin{pmatrix} constant & key & key & key \\ key & constant & input & input \\ input & input & constant & key \\ key & key & key & constant \end{pmatrix}$$

Хеш-функция $H(K, N)$ представляет собой преобразование данной матрицы в десяти двойных раундах. В каждом двойном раунде происходят преобразования сначала столбцов, а затем строк с помощью функции четвертьраунда. Таким образом, преобразования ведутся только с четырьмя словами из 16 за раз. После десяти раундов результат преобразований складывается с исходной матрицей для получения выходного блока, состоящего из 16 слов (64 байт).

ChaCha, как и Salsa20, использует по четыре операции сложения, исключающего ИЛИ и циклического сдвига для обновления четырёх 32-битных слов. Однако ChaCha применяет операции в другом порядке и, в частности, обновляет каждое слово дважды, а не один раз:

$$a+ = b; \qquad d\oplus = a; \qquad d <<<= 16,$$
$$c+ = d; \qquad b\oplus = c; \qquad b <<<= 12,$$
$$a+ = b; \qquad d\oplus = a; \qquad d <<<= 8,$$
$$c+ = d; \qquad b\oplus = c; \qquad b <<<= 7.$$

Функция четвертьраунда ChaCha, в отличие от аналогичной функции Salsa20, дает возможность каждому входному слову влиять на каждое выходное слово. Ещё одно менее очевидное различие состоит в том, что теперь размытие битов в исходных данных происходит быстрее [2].

ChaCha подобно Salsa20 создает матрицу состояния 4×4, преобразует её с помощью десяти двойных раундов и добавляет результат к

исходной матрице, чтобы получить 64-байтовый выходной блок. Однако порядок слов в матрице другой:

$$\begin{pmatrix} constant & constant & constant & constant \\ key & key & key & key \\ key & key & key & key \\ input & input & input & input \end{pmatrix}$$

Ещё одно изменение в алгоритме состоит в том, что теперь в каждом двойном раунде происходят преобразования не столбцов и строк, а столбцов и диагоналей.

Архитектура ARM

Архитектура ARM (от англ. Advanced RISC Machine) — семейство лицензируемых микропроцессорных ядер, разрабатываемых компанией ARM Limited. Основным преимуществом данного семейства является низкое энергопотребление, благодаря чему процессоры на основе ARM чаще всего встречаются в мобильных устройствах. Архитектура ARM поддерживается множеством операционных систем. Наиболее широко используемые: Linux (в том числе Android), iOS, Windows Phone.

Технология ARM NEON включает в себя расширенный набор команд, предназначенный для увеличения производительности алгоритмов кодирования/декодирования аудио и видео, обработки изображений, 3D-графики, сигналов. Векторные инструкции ARM NEON работают по принципу SIMD — одной командой обрабатывается множество данных. Это позволяет уменьшить время работы алгоритма за счёт меньшего числа команд. Ещё одно преимущество использования ARM NEON заключается в том, что это расширение предоставляет гораздо больше места в регистрах, тем самым позволяя уменьшить количество операций загрузки и выгрузки данных [4].

Эффективная реализация алгоритма ChaCha20

Благодаря тому, что в алгоритме шифрования ChaCha преобразования каждого столбца и каждой диагонали, выполняемые функцией четвертьраунда, не зависят друг от друга, вычисления, необходимые для шифрования, можно выполнить параллельно. Если представить матрицу состояния в виде четырёх векторов, то четыре четвертьраунда можно выполнить одновременно с помощью операций над векторами. Таким образом, нижним уровнем алгоритма будет являться не функция четверьраунда, а преобразования столбцов и диагоналей в виде векторов.

Для проверки описанных теоретических основ алгоритм шифрования ChaCha20 был реализован на языке программирования Си. Данная

реализация стала опорной, и впоследствии её программный код был расширен ассемблерными вставками: преобразования столбцов и диагоналей матрицы состояния были реализованы с помощью векторных команд ARM NEON.

```
void columnround_asm(uint32_t y[16])
{
     asm(
           "vldm.32 %[y], {q0, q1, q2, q3}\n\t"
           /*
           *   y[0],   y[4],  y[8],   y[12]
           *   y[1],   y[5],  y[9],   y[13]
           *   y[2],   y[6],  y[10],  y[14]
           *   y[3],   y[7],  y[11],  y[15]
           *  q0 = a, q1 = b  q2 = c, q3 = d
           */
           "vadd.i32 q0, q1\n\t"              // a += b;
           "veor q4, q3, q0\n\t"              // e = d ^ a;
           "vshl.i32 q3, q4, #16\n\t"         // d = e <<< 16;
           "vsri.32 q3, q4, #16\n\t"
           "vadd.i32 q2, q3\n\t"              // c += d;
           "veor q4, q1, q2\n\t"              // e = b ^ c;
           "vshl.i32 q1, q4, #12\n\t"         // b = e <<< 12;
           "vsri.32 q1, q4, #20\n\t"
           "vadd.i32 q0, q1\n\t"              // a += b;
           "veor q4, q3, q0\n\t"              // e = d ^ a;
           "vshl.i32 q3, q4, #8\n\t"          // d = e <<< 8;
           "vsri.32 q3, q4, #24\n\t"
           "vadd.i32 q2, q3 \n\t"             // c += d;
           "veor q4, q1, q2\n\t"              // e = b ^ c;
           "vshl.i32 q1, q4, #7\n\t"          // b = e <<< 7;
           "vsri.32 q1, q4, #25\n\t"
           "vstm.32 %[y], {q0, q1, q2, q3}\n\t"
           :
           : [y] "r" (y)
           : "q0", "q1", "q2", "q3", "q4"
     );
}
```

Рис. Преобразования столбцов матрицы состояния

На рис. приведён код, реализующий преобразования столбцов матрицы состояния с помощью векторных команд ARM NEON.

С подробным описанием команд ARM NEON можно ознакомиться в [1].

Алгоритм, реализованный с использованием технологии ARM NEON, был протестирован. В качестве критерия эффективности принята скорость работы алгоритма. За эталонную версию программной реализации, с которой производилось сравнение, была взята реализация, представленная самим автором алгоритма и находящаяся в открытом доступе. Код программы был скомпилирован с помощью Linaro GCC 6.3.1 с ключом оптимизации -O3.

Тестирование производилось с помощью шифрования одного и того же файла разными реализациями алгоритма на каждом устройстве. Характеристики устройств, на которых производилось тестирование, приведены в табл. 1. По результатам шифрования каждого блока исходных данных проводилась сверка на совпадение результатов шифрования. Также была замерена скорость работы каждой реализации алгоритма. Все вычисления производились на одном ядре процессора.

Таблица 1

Характеристики устройств

Тип устройства	Смартфон	Планшет
Процессор	Qualcomm Snapdragon 801, 1,0 ГГц	NVidia Tegra 3, 1,3 ГГц
Оперативная память	2 ГБ, LPDDR3, 933 МГц	1 ГБ, LPDDR2, 1066 МГц
Операционная система	Android 4.4.4	Android 5.1

При создании эффективной реализации были обнаружены следующие проблемы, приводящие к низкой скорости выполнения (см. строку с начальной реализацией в табл. 2):

1. Специфичность выполнения команд в архитектуре ARM: если выполнение команды зависит от результата выполнения предыдущей команды, то это приводит к простоям обработки команд, увеличивая тем самым время работы алгоритма.

2. Несовершенство компилятора: код программы компилируется таким образом, что для выполнения каждого из десяти двойных

раундов данные из матриц, хранимые в регистрах, постоянно сохраняются в стек и загружаются из него. Это увеличивает дополнительную нагрузку на память и, соответственно, увеличивает время работы.

Первая проблема была решена благодаря выполнению преобразований сразу над несколькими матрицами: выполнение команд происходит последовательно для каждой матрицы, т. е. сначала выполняется команда преобразования данных первой матрицы, потом — второй матрицы, далее — третьей и так далее. Такой подход возможен благодаря независимости матриц состояний друг от друга. В эффективной реализации одновременно загружались три матрицы состояний, поскольку большее число матриц не помещалось в регистры ARM NEON, с учетом того, что последние также были необходимы для хранения результатов промежуточных вычислений.

Вторая проблема была решена с помощью написания цикла, выполняющего роль десяти двойных раундов напрямую с помощью ассемблерного кода. Это позволило обойтись без загрузки-выгрузки регистров в стек и увеличить скорость работы реализации алгоритма.

После внесения соответствующих корректировок в код программы скорость работы алгоритма значительно возросла (см. строку с конечной реализацией в табл. 2), а именно: на 40 % и 122 % для процессоров NVIDIA Tegra 3 и Qualcomm Snapdragon 801 соответственно. Данные результаты подтверждают состоятельность подхода, изложенного в статье. Полный код проекта, содержащий конечную и эталонную реализации алгоритма, расположен на сервисе GitHub[1].

Таблица 2

Результаты замера скорости реализаций алгоритма

	Qualcomm 801 Snapdragon 801	NVIDIA Tegra 3
Эталонная реализация	66,66 МБ/с	25,5 МБ/с
Начальная реализация	100 МБ/с	24,4 МБ/с
Конечная реализация	148,14 МБ/с	35,9 МБ/с

[1]https://github.com/ExceLLent404/ChaCha

Заключение

Результаты, приведённые выше, позволяют сделать заключение о том, что цель, поставленная в данной работе, была достигнута, а именно: использование технологии ARM NEON позволило эффективно реализовать алгоритм поточного шифрования ChaCha20.

На основе проделанной работы можно сделать следующий вывод: для достижения ожидаемых результатов при реализации алгоритма следует учитывать особенности архитектуры вычислительных устройств и используемого компилятора.

Представленное увеличение скорости работы программной реализации алгоритма (по сравнению с эталонной реализацией) не является исчерпывающим и его можно наращивать дальше, используя, например, подход, в котором для хранения и преобразования матриц состояния участвуют и регистры ARM NEON, и регистры ARM общего назначения. Помимо увеличения скорости работы алгоритма за счёт использования технологии ARM NEON, интерес вызывает вопрос об энергоэффективности данного подхода, изучение которого выходит за рамки данной работы.

Список литературы

1. ARM Architecture Reference Manual ARMv7-A and ARMv7-R edition. 2012. 2734 p.

2. **Bernstein D. J.** ChaCha, a variant of Salsa20. 2008. URL: https://cr.yp.to/chacha/chacha-20080128.pdf (дата обращения: 20.05.2017)

3. **Bernstein D. J.** The Salsa20 family of stream ciphers. 2007. URL: https://cr.yp.to/snuffle/salsafamily-20071225.pdf (дата обращения: 20.05.2017)

4. **Bernstein D. J., Schwabe P.** NEON crypto. 2012. URL: https://cryptojedi.org/papers/neoncrypto-20120320.pdf (дата обращения: 20.05.2017)

5. Internet Engineering Task Force (IETF), Google, Inc. ChaCha20-Poly1305 Cipher Suites for Transport Layer Security (TLS). 2016. URL: https://tools.ietf.org/html/rfc7905 (дата обращения: 20.05.2017)

6. OpenBSD: PROTOCOL.chacha20poly1305, v 1.3 2016/05/03. URL: http://bxr.su/OpenBSD/usr.bin/ssh/PROTOCOL.chacha20poly1305 (дата обращения: 20.05.2017)

7. Speeding up and strengthening HTTPS connections for Chrome on Android. URL: https://security.googleblog.com/2014/04/speeding-up-and-strengthening-https.html (дата обращения: 20.05.2017)

Summary

Korolev I. F. Efficient implementation of ChaCha20 stream cipher

The article is about efficient implementation of ChaCha20 stream cipher for ARM architecture. This algorithm has the ability to parallel computations. The article describes the use of the ability to accelerate the operation of the encryption algorithm using ARM NEON which has SIMD vector instructions.

Keywords: theory of plates, contact problem, antiphase.

References

1. ARM Architecture Reference Manual ARMv7-A and ARMv7-R edition. 2012. 2734 p.

2. **Bernstein D. J.** *ChaCha, a variant of Salsa20.* 2008. URL: https://cr.yp.to/chacha/chacha-20080128.pdf (date of the application: 20.05.2017)

3. **Bernstein D. J.** *The Salsa20 family of stream ciphers.* 2007. URL: https://cr.yp.to/snuffle/salsafamily-20071225.pdf (date of the application:
20.05.2017)

4. **Bernstein D. J., Schwabe P.** *NEON crypto.* 2012. URL: https://cryptojedi.org/papers/neoncrypto-20120320.pdf (date of the application: 20.05.2017)

5. Internet Engineering Task Force (IETF), Google, Inc. ChaCha20-Poly1305 Cipher Suites for Transport Layer Security (TLS). 2016. URL: https://tools.ietf.org/html/rfc7905 (date of the application: 20.05.2017)

6. OpenBSD: PROTOCOL.chacha20poly1305, v 1.3 2016/05/03. URL: http://bxr.su/OpenBSD/usr.bin/ssh/PROTOCOL.chacha20poly1305 (date of the application: 20.05.2017)

7. Speeding up and strengthening HTTPS connections for Chrome on Android. URL: https://security.googleblog.com/2014/04/speeding-up-and-strengthening-https.html (date of the application: 20.05.2017)

Для цитирования: Королев И. Ф. Эффективная реализация поточного шифра CHACHA20 // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 4 (25). С. 33–43.*

For citation: Korolev I. F. Efficient implementation of ChaCha20 stream cipher, *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, №4 (25), pp. 33–43.

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 20.12.2017*

ИНФОРМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (25). 2017

УДК 517.443, 519.688

ПРИМЕНЕНИЕ БПФ В ЗАДАЧАХ СПОРТИВНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Н. О. Котелина

В этой статье рассматривается использование БПФ для решения одной задачи спортивного программирования.
Ключевые слова: дискретное преобразование Фурье, программирование.

1. Дискретное преобразование Фурье [2, 3]

Пусть имеется многочлен степени меньше n:

$$A(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}.$$

Будем считать, что n является степенью 2. Если в действительности это не так, то добавим недостающие коэффициенты, положив их равными нулю.

Обозначим за $\omega_{n,k} = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$, $k = 0, \ldots, n-1$, комплексные корни n-й степени из 1. Очевидно, что все корни $\omega_{n,k}$ являются степенями главного значения корня n-й степени из единицы $\omega_n = \omega_{n,1}$:

$$\omega_{n,k} = \omega_n^k.$$

Дискретным преобразованием Фурье (ДПФ) многочлена $A(x)$ или, что то же самое, ДПФ вектора его коэффициентов $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ называется вектор y значений этого многочлена в точках $x_k = \omega_n^k$, $k = 0, \ldots, n-1$:

$$y = \mathrm{DFT_n}(a) = (A(\omega_n^0), A(\omega_n^1), \ldots, A(\omega_n^{n-1})).$$

Можно определить и обратное дискретное преобразование Фурье DFT_n^{-1}. Обратным ДПФ для вектора y значений многочлена $A(x)$ в точках $x_k = \omega_n^k$, $k = 0, \ldots, n-1$, называется вектор его коэффициентов $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$:

$$a = \mathrm{DFT_n^{-1}}(y).$$

Известно, что ДПФ можно применять для вычисления коэффициентов произведения полиномов [3].

Пусть даны два многочлена $A(x)$ и $B(x)$ степени меньше n. Найдем вектор коэффициентов их произведения $C(x) = A(x)B(x)$. Очевидно, что полином $C(x)$ имеет степень меньше $2n-1$ (и тем более меньше $2n$). Пусть c — вектор его коэффициентов (включая нулевые) длины $2n$. Если дополнить векторы a и b нулевыми коэффициентами до длины $2n$, то элементы вектора c можно найти по формуле

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}, \qquad k = 0, \ldots, 2n-1.$$

Вектор c называется свёрткой векторов a и b и обозначается $c = a \otimes b$.

Справедлива теорема о свёртке, аналогичная теореме 5.1 из книги [4]: Для любых векторов a и b размерности n, где n — степень 2, выполнено равенство

$$c = \mathrm{DFT_{2n}^{-1}}(\mathrm{DFT_{2n}}(a) \cdot \mathrm{DFT_{2n}}(b)),$$

если дополнить векторы a и b нулевыми элементами до длины $2n$ (точка здесь обозначает поэлементное произведение векторов). Для полноты изложения приведём краткое доказательство теоремы о свёртке.

Доказательство. Рассмотрим i-й элемент вектора $\mathrm{DFT_{2n}}(c)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{DFT_{2n}}(c)[i] &= \sum_{k=0}^{2n-1} c_k \omega_{2n}^{ik} = \sum_{k=0}^{2n-1} \Big(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \Big) \omega_{2n}^{ij} \omega_{2n}^{i(k-j)} = \\
&= \sum_{k=0}^{2n-1} \Big(\sum_{j=0}^{k} a_j \omega_{2n}^{ij} b_{k-j} \omega_{2n}^{i(k-j)} \Big) = \sum_{j=0}^{2n-1} a_j \omega_{2n}^{ij} \Big(\sum_{k=0}^{2n-1-j} b_k \omega_{2n}^{ik} \Big) = \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega_{2n}^{ij} \Big(\sum_{k=0}^{2n-1-j} b_k \omega_{2n}^{ik} \Big) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega_{2n}^{ij} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} b_k \omega_{2n}^{ik} \Big) = \\
&= \mathrm{DFT_{2n}}(a)[i] \cdot \mathrm{DFT_{2n}}(b)[i].
\end{aligned}$$

Отсюда следует искомая формула. □

2. Быстрое преобразование Фурье

Быстрое преобразование Фурье (fast Fourier transform) — это метод быстрого вычисления ДПФ за время $\Theta(n \log n)$, основанный на свойствах комплексных корней из единицы [2; 3, с. 723].

Быстрое преобразование Фурье использует метод «разделяй и властвуй», который заключается в разделении вектора коэффициентов на два вектора, рекурсивном вычислении ДПФ для них и объединении результатов в одно ДПФ. Для схемы «разделяй и властвуй» известна асимптотическая оценка $\Theta(n \log_2 n)$ [3]. Найти обратное ДПФ, т. е. по вектору значений y полинома $A(x)$ перейти к его вектору коэффициентов a также можно за время $\Theta(n \log_2 n)$, если применить тот же алгоритм БПФ, но с другими данными [3], поскольку для ДПФ и обратного ДПФ справедливы формулы

$$y_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega_n^{kj}, \quad a_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y_j \omega_n^{-kj}, \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

Таким образом, по теореме о свёртке, вектор коэффициентов c произведения $A(x)B(x)$ может быть найден за время $\Theta(2n \log_2 2n) = \Theta(n \log_2 n)$.

3. Постановка задачи

Рассмотрим задачу «Вор в магазине» с ресурса [1], которая предлагалась на соревнованиях по спортивному программированию Educational Codeforces Round 9. Условие задачи таково.

Вор пробрался в магазин. Как всегда у него с собой любимый рюкзак. В рюкзаке может поместиться k предметов. В магазине присутствует n типов товаров, причём товаров каждого типа бесконечное количество. Стоимость единицы товара i-го типа равна a_i. Вор жадный, поэтому решил набить рюкзак до отказа. Таким образом, он возьмёт с собой ровно k товаров, причём товары некоторых типов он может взять в нескольких экземплярах. Определите всевозможные суммы стоимостей товаров, которые могут оказаться в рюкзаке вора.

Входные данные

В первой строке находится пара целых чисел n и k ($1 \leq n$, $k \leq 1000$) — количество типов товаров и количество предметов, которые вор украдёт. Во второй строке находятся n целых чисел a_i ($1 \leq a_i \leq 1000$) — стоимости товаров по типам от 1 до n.

Выходные данные

В единственной строке следует вывести через пробел всевозможные суммы стоимостей товаров, которые могут оказаться в рюкзаке вора. Числа нужно выводить в порядке возрастания.

Нетрудно видеть, что полный перебор всевозможных наборов товаров является неэффективным. Одно из эффективных решений данной задачи использует быстрое преобразование Фурье [1].

Обозначим за W максимально возможную стоимость украденных вором товаров. Тогда $W = k \max\{a_i,\, i \in 1 : n\} \leq 10^6$.

Рассмотрим многочлен P степени $d = \max\{a_i,\, i \in 1 : n\}$ с целочисленными коэффициентами, коэффициенты которого при степенях a_i, $i \in 1 : n$, равны единице, а остальные равны нулю. Тогда при возведении P в степень k получим полином с ненулевыми коэффициентами при степенях $\{a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} \mid 1 \leq i_j \leq n,\, j \in 1 : k\}$, при этом коэффициент при степени val означает количество способов набрать k товаров с суммарной стоимостью val. Таким образом, эти степени и являются ответом на задачу. Если возводить полином в степень напрямую, то количество операций умножения будет равно $d^2 + 2d^2 + 3d^2 + \cdots + (k-1)d^2 = d^2 \dfrac{k(k-1)}{2}$ и при максимальных d и k может быть величиной порядка 10^{12}, что при существующих ограничениях на время работы программы слишком много. Покажем, что при помощи БПФ можно быстро возвести полином P в степень k так, чтобы общее число операций не превышало величину порядка 10^8.

4. Быстрое возведение полинома в степень

Как было замечено выше, при использовании быстрого преобразования Фурье асимптотическая сложность умножения двух полиномов степени n и, следовательно, возведения полинома степени n в квадрат равна $\Theta(n \log n)$. Пусть в нашей задаче максимальная суммарная стоимость товаров равна W, а $t = \lceil \log_2 W \rceil$, тогда по условию задачи $t \leq 20$. С другой стороны, W — это степень полинома, который получается в результате возведения в степень исходного полинома P. Тогда если дополнить исходный полином нулевыми коэффициентами до степени W, то время работы программы можно оценить следующим образом

$$(k-1) W log W \leq 10^3 2^{20} 20 \approx 2 \cdot 10^{10}.$$

Эта величина все еще является слишком большой, поэтому, чтобы сократить количество умножений полиномов с $k-1$ до $\log_2 k$, можно воспользоваться алгоритмом бинарного возведения в степень [2; 3, с. 758]. Тогда общее число операций можно оценить так

$$W log W \log_2 k \leq 10 \cdot 2^{20} 20 \approx 2 \cdot 10^8.$$

Данное количество операций удовлетворяет временным ограничениям задачи. На практике по времени проходит решение, использующее итеративную, а не рекурсивную реализацию БПФ, поскольку, несмотря на одинаковую асимптотическую сложность, итеративная реализация имеет меньшую константу [2; 3, с. 728].

Список литературы

1. Codeforces (c). Copyright 2010–2017. Михаил Мирзаянов. Соревнования по программированию 2.0. URL: http://codeforces.com. (дата обращения: 12.09.2017).

2. MAXimal. URL: http://e-maxx.ru. (дата обращения: 12.09.2017).

3. **Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.** Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 2001. 960 с.

4. **Малозёмов В. Н., Машарский С. М.** Основы дискретного гармонического анализа. СПб.: Лань, 2012. 302 с.

Summary

Kotelina N. O. The application of FFT in problems of competitive programming

In this paper the use of FFT in problems of competitive programming is considered.

Keywords: discrete Fourier transform, competitive programming.

References

1. Codeforces (c). Copyright 2010–2017. Mihail Mirzayanov. *Sorevnovaniya po programmirovaniyu 2.0*: URL: http://codeforces.com. (date of the application: 12.09.2017).

2. *MAXimal*. URL: http://e-maxx.ru. (date of the application: 12.09.2017).

3. **Kormen T., Leiserson Ch., R. Rivest** *Algoritmy: postroeniye i analiz* (Algorithms: construction and analysis), M.: MCNMO, 2001, 960 p.

4. **Malozyomov V. N., Masharsky S. M.** *Osnovy diskretnogo garmonicheskogo analiza* (Fundamentals of discrete harmonic analysis), SPb.: Lan, 2012, 302 p.

Для цитирования: Котелина Н. О. Применение БПФ в задачах спортивного программирования // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 4 (25). С. 44–49.*

For citation: Kotelina N. O. The application of FFT in problems of competitive programming, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, №4 (25), pp. 44–49.

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 20.11.2017*

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (25). 2017

УДК 004.021, 004.043, 378

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ СТРУКТУРНОГО ТИПА ДАННЫХ В ПРОГРАММАХ, НАПИСАННЫХ НА ЯЗЫКАХ СИ И СИ++

П. А. Макаров

В работе рассматриваются некоторые особенности методики преподавания языков программирования Си/Си++ студентам физико-математических специальностей вузов. Обсуждается применение структурного типа данных в программах как средство логической организации решения задачи. Описываются особенности перехода от процедурной парадигмы программирования к объектно-ориентированной.

Ключевые слова: процедурная и объектно-ориентированная парадигмы программирования, структурный тип данных, методы, конструкторы, перегрузка операций.

1. Введение

Программирование для студентов математических и физических специальностей — это одна из важнейших дисциплин, позволяющая глубже раскрыть содержание всех основных предметов образовательной программы. Параллельное изучение программирования оказывается полезным при освоении предметов как общего математического цикла, так и специальных курсов физико-математической и технической направленности.

В данной работе не рассматриваются механизмы защиты данных, классы, подробности создания конструкторов и деструкторов объектов и другие относительно сложные понятия, свойственные для объектно-ориентированной парадигмы (ООП) программирования. Все эти вопросы достойны более подробного и детального обсуждения, так как методика преподавания соответствующих тем студентам имеет множество особенностей [1].

По нашему мнению, удачным методическим решением при изучении языков программирования Си и Си++ является выбор в качестве основных учебных пособий классической книги Б. Кернигана и Д. Ритчи [2] и очень лаконичного введения в язык Си++ А. В. Столярова [3]. Конечно, одним только выбором учебных пособий методика преподавания предмета не ограничивается. Опыт практического решения разнообразных задач вместе с хорошей теоретической подготовкой играет основную роль при изучении программирования [4, 5]. При этом весьма важно то, чтобы решаемые студентами задачи были близки к их области специализации.

В данной работе основной акцент делается именно на методике обучения студентов использованию структур в конкретных задачах. С одной стороны, это позволяет повысить уровень абстракций при написании программ, что улучшает понимание студентами алгоритмов и логику работы программы. С другой стороны, применение структур — это прекрасный методический пример, показывающий студентам некоторую ограниченность процедурной парадигмы программирования (и, как следствие, языка Си), а также возможные пути решения указанной проблемы. Для этого, в частности, обсуждаются некоторые элементы ООП и средства их поддержки в языке Си++.

2. Высокий уровень абстракций и структуры

Практический опыт преподавания программирования показывает, что для решения подавляющего большинства математических, физических и технических задач удобно оперировать понятиями более высокого уровня абстракции, чем числа различных типов, символы или строки. В качестве некоторых примеров можно привести следующие объекты программ:

- геометрическая точка P в евклидовом (или псевдоевклидовом) пространстве R^n;
- элементарная частица массы m, обладающая электрическим зарядом q, спином s и временем жизни τ;
- IP-адрес устройства в компьютерной сети TCP/IP.

Программируя на языках Си и Си++, требуемого уровня абстракции можно достичь, используя структурный тип данных `struct`. На этом сходство данных языков программирования заканчивается и возникают достаточно существенные отличия.

В языке программирования Си ключевое слово `struct` вводит новый тег структуры, а не полноценный структурный тип. Поэтому введение нестандартных типов данных обычно оказывается удобным упростить с помощью оператора `typedef` [2].

Программирование структур на языке Си++ имеет свои отличительные особенности [1, 3]. В частности, с технической точки зрения в Си++ отпадает необходимость использовать ключевое слово `typedef`, так как идентификатор, стоящий после слова `struct`, непосредственно представляет собой имя нового типа. Более того, для поддержки программирования в стиле ООП, в языке Си++ структуры рассматриваются как совокупность свойств и методов. Методами, как известно [1,3], называются функции-члены структуры. Такой подход позволяет существенно повысить уровень абстракции понятий, используемых в программе.

3. Применение структур для решения задач

Рассмотрим конкретные методические особенности преподавания структур при изучении языков программирования Си и Си++ студентами физико-математических специальностей. В качестве примера рассмотрим одну из базовых задач в области геометрии.

Как известно из аналитической геометрии, прямую, проведённую через две заданные несовпадающие точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, можно определить следующей системой уравнений:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{1}$$

Таким образом, множество точек с координатами (x, y, z), удовлетворяющими системе уравнений (1), образует прямую в пространстве R^3. На основе системы (1) можно сформулировать набор различных геометрических задач. В качестве конкретного примера рассмотрим следующую постановку задачи.

Задача 1. Даны координаты трёх точек A, B и C. Требуется определить, принадлежит ли точка C прямой AB.

Пример решения этой задачи на языке Си с использованием структур приведён в листинге 1. При разборе текста программы со студентами обязательно необходимо обсудить следующие ключевые моменты:

1. Применение оператора `typedef` в строках 2 и 5 при объявлении новых структурных типов данных `point` и `line`.

2. Использование введённых структурных типов в строках 11, 12 и 27.

3. Напоминание назначения строк 8 и 9, в которых описаны прототипы функций, используемых в главной функции программы.

4. Использование в строках программы 14, 16 и 19 функции `scanf()` не сопровождается проверками корректности ввода данных пользователем программы. Это может привести к двум типам ошибок при выполнении программы: чисто технической проблеме при неправильном наборе данных пользователем и логической ошибке, состоящей в том, что пользователь по невнимательности введёт одинаковые координаты точек A и B. Следует продемонстрировать конкретные примеры ввода таких данных и попросить объяснить студентов происходящее.

5. После обсуждения возможных проблем из предыдущего пункта необходимо предложить студентам придумать способы их устранения. Пример кода, устраняющий чисто техническую проблему, приведён в листинге 2. Необходимо объяснить студентам, что подобные фрагменты всегда следует использовать в реальных задачах вместо строк 14, 16 и 19, реализующих простейший ввод.

6. Фрагмент программы, устраняющий проблему, связанную с возможной идентичностью точек A и B, приведён в листинге 3. При обсуждении этого фрагмента очень полезно обсудить некоторую «избыточность» логического выражения в операторе `if` с точки зрения ООП. Таким образом можно подвести студентов к некоторым идеям полиморфизма (в частности, перегрузки символов стандартных операций, в том числе операции сравнения `==`).

7. Следует раскрыть смысл строки 17, в которой фактически происходит инициализация полей структуры `line`, и провести параллели с конструкторами объектов в языке Си++.

8. Алгоритм работы функций `set_line()` и `belong_point()`, описанных в строках 26–30 и 31–39 соответственно. Для функции `belong_point()` необходимо провести параллели с методами в языке Си++.

9. Также нужно обратить внимание на строки 33 и 34 и пояснить, как этот текст программы соотносится с системой уравнений (1).

10. Объясняя строки программы 35–38 и 20–23, следует напомнить студентам об отсутствии в языке Си специального логического типа данных.

Листинг 1. Пример решения задачи 1 на языке Си

```
#include <stdio.h>
typedef struct {
    double x, y, z;
} point;
typedef struct {
    point M1, M2;
} line;
line set_line(point M1, point M2);
int belong_point(line MM, point P);
int main(void) {
    point A, B, C;
    line AB;
    printf("Type the coordinates of the point A: ");
    scanf("%lg %lg %lg", &A.x, &A.y, &A.z);
    printf("Type the coordinates of the point B: ");
    scanf("%lg %lg %lg", &B.x, &B.y, &B.z);
    AB = set_line(A, B);
    printf("Type the coordinates of the point C: ");
    scanf("%lg %lg %lg", &C.x, &C.y, &C.z);
    if(belong_point(AB, C))
        printf("The point C belongs to the line AB.\n");
    else
        printf("The point C doesn't belong to AB.\n");
    return 0;
}
line set_line(point M1, point M2) {
    line X;
    X.M1 = M1; X.M2 = M2;
    return X;
}
int belong_point(line MM, point P) {
    double a, b;
    a = P.x*(MM.M2.y-MM.M1.y) + P.y*(MM.M1.x-MM.M2.x) +
       MM.M2.x*MM.M1.y - MM.M1.x*MM.M2.y;
    b = P.x*(MM.M2.z-MM.M1.z) + P.z*(MM.M1.x-MM.M2.x) +
       MM.M2.x*MM.M1.z - MM.M1.x*MM.M2.z;
    if (a == 0 && b == 0)
        return 1;
    else
        return 0;
}
```

Листинг 2. Проверка на соответствие данных ожидаемому формату

```
1 if(scanf("%lg %lg %lg", &A.x, &A.y, &A.z) != 3) {
2     printf("Wrong input! Program aborted.\n");
3     return 1;
4 }
```

Листинг 3. Проверка на совпадение точек A и B

```
1 if(A.x == B.x && A.y == B.y && A.z == B.z) {
2     printf("Points are identical! Program aborted.\n");
3     return 2;
4 }
```

Методически целесообразно после проведённого со студентами анализа листинга 1 привести решение той же задачи на языке Си++. Пример такого решения с использованием структур и применением всех обсужденных ранее особенностей ООП приведён в листинге 4.

Листинг 4. Пример решения задачи 1 на языке Си++

```
1 #include <stdio.h>
2 struct point {
3   double x, y, z;
4   bool operator==(point Q) {
5     if(x == Q.x && y == Q.y && z == Q.z)
6       return true;
7     else
8       return false;
9   }
10 };
11 struct line {
12   point M1, M2;
13   line(point A, point B) {
14     M1 = A;
15     M2 = B;
16   }
17   bool belong_point(point P) {
18     double a, b;
19     a = P.x*(M2.y-M1.y) + P.y*(M1.x-M2.x) + M2.x*M1.y -
         M1.x*M2.y;
20     b = P.x*(M2.z-M1.z) + P.z*(M1.x-M2.x) + M2.x*M1.z -
         M1.x*M2.z;
21     if (a == 0 && b == 0)
22       return true;
23     else
```

```
24        return false;
25    }
26 };
27 int main(void) {
28    point A, B, C;
29    printf("Type the coordinates of the point A: ");
30    if(scanf("%lg %lg %lg", &A.x, &A.y, &A.z) != 3) {
31      printf("Wrong input! Program aborted.\n");
32      return 1;
33    }
34    printf("Type the coordinates of the point B: ");
35    if(scanf("%lg %lg %lg", &B.x, &B.y, &B.z) != 3) {
36      printf("Wrong input! Program aborted.\n");
37      return 1;
38    }
39    if(A == B) {
40      printf("Points are identical! Program aborted.\n");
41      return 2;
42    }
43    line AB = line(A, B);
44    printf("Type the coordinates of the point C: ");
45    if(scanf("%lg %lg %lg", &C.x, &C.y, &C.z) != 3) {
46      printf("Error - wrong input! Program aborted.\n");
47      return 1;
48    }
49    if(AB.belong_point(C))
50      printf("The point C belongs to the line AB.\n");
51    else
52      printf("The point C doesn't belong to AB.\n");
53    return 0;
54 }
```

Несмотря на то что новое решение задачи, представленное листингом 4, на пятнадцать строк больше исходного решения, приведённого в листинге 1, эту разницу оценивать некорректно, так как в новом решении учтены все замечания, сделанные ранее. Таким образом, длина обоих решений примерно сопоставима, однако логическая осмысленность второго текста гораздо выше. Это связано с тем, что в тексте программы 4 фактически описаны только два новых структурных типа данных и логически связанные с ними методы. Главная функция программы полноценно использует все особенности, заложенные при конструировании типов `point` и `line`.

Очевидно, что решение задачи 1 можно было организовать совершенно иначе, например в полностью процедурной парадигме без использования структур или с применением классов, однако такие решения выходят за рамки обозначенной в статье темы.

4. Выводы

Таким образом, в работе описаны методические особенности преподавания языков Си и Си++ студентам физикам и математикам. Основное внимание уделено применению структурного типа данных в программах как средству логической организации решения задачи. Также обсуждены методические моменты, позволяющие на конкретных примерах показать студентам преимущество перехода от процедурной парадигмы программирования к объектно-ориентированной.

Список литературы

1. **Эккель Б.** Философия C++. Введение в стандартный C++. 2-е изд. СПб.: Питер, 2004. 572 с.

2. **Керниган Б., Ритчи Д.** Язык программирования С. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Вильямс, 2015. 289 с.

3. **Столяров А. В.** Введение в язык Си++ : учеб. пос. 3-е изд. М.: МАКС Пресс, 2012. 128 с.

4. **Салимов Ф. В., Бухараев Н. Р.** Из опыта преподавания курса «Алгоритмы и структуры данных» в Казанском федеральном университете // *Казанский педагогический журнал. № 4 (99). 2013. С. 46–54.*

5. **Абрамян М. Э.** Применение электронного задачника при проведении практикума по динамическим структурам данных // *Компьютерные инструменты в образовании. № 3. 2013. С. 45–56.*

Summary

Makarov P. A. Methodical of the using struct type in C/C++ programs

Some features of the methodology of teaching C/C++ programming languages to students of physical and mathematical specialties of higher educational institutions are considered. The application of the structural

data type in programs as a means of logical organization of the solution of the problem is discussed. The features of the transition from procedural programming paradigm to object-oriented programming are described.

Keywords: procedural and object-oriented programming paradigms, structured data type, methods, constructors, operators overloading.

References

1. **Eckel B.** *Filosofija C++. Vvedenie v standartnyj C++* (Philosophy of C++. Introduction to C++), 2-e ed, SPb.: Piter, 2004, 572 p.

2. **Kernighan B., Ritchie D.** *Jazyk programmirovanija* (C programming language), 2-e ed., M.: Williams, 2015, 289 p.

3. **Stolyarov A. V.** *Vvedenie v jazyk Si++* (Introduction in C++ language), 3-e ed, M.: Max Press, 2012, 128 p.

4. **Salimov F. B., Bukharaev N. R.** Iz opyta prepodavanija kursa «Algoritmy i struktury dannyh» v Kazanskom federal'nom universitete (From the experience of teaching the course «Algorithms and Data Structures» at the Kazan Federal University), *Kazan Pedagogical Journal*, № 4 (99), 2013, pp. 46–54.

5. **Abrahamyan M. E.** Primenenie jelektronnogo zadachnika pri provedenii praktikuma po dinamicheskim strukturam dannyh (The use of an electronic task book in a workshop on dynamic data structures), *Computer tools in education*, № 3, 2013, pp. 45–56.

Для цитирования: Макаров П. А. Методические особенности применения структурного типа данных в программах, написанных на языках Си и Си++ // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 4 (25). С. 50–58.*

For citation: Makarov P. A. Methodical of the using struct type in C/C++ programs, *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, №4 (25), pp. 50–58.

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 11.12.2017*

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (25). 2017

УДК 517.2

О РЕШЕНИИ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ ОСНОВАМ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

Л. Н. Чиркова

Статья посвящена вопросу решения оптимизационных задач линейного программирования при обучении основам системного анализа студентов вуза.
Ключевые слова: системный анализ, экономическая система, оптимизационные задачи линейного программирования.

Программа модернизации образования ставит перед высшей школой задачу формирования у студентов юридических и экономических направлений новой системы универсальных знаний, умений и навыков, а также опыта самостоятельной деятельности и личной ответственности, что входит в понятие компетенций. Одной из важных дисциплин при обучении студентов данных направлений являются основы системного анализа.

Системный анализ — научный метод познания, представляющий собой последовательность действий по установлению структурных связей между элементами исследуемых сложных систем — технических, экономических, юридических. Системный анализ опирается на комплекс общенаучных, экспериментальных, естественно-научных, математических методов и, конечно, проводится с использованием современных средств вычислительной техники. Результатом системных исследований является выбор вполне определенного плана развития исследуемой системы [1]. Специалист таможенного дела должен хорошо понимать функционирование экономических систем, разбираться в вопросах экспорта и импорта, иметь знания, умения и навыки юриста, психолога,

лингвиста. И наряду с другими важнейшую роль в процессе обучения будущих специалистов направления «Таможенное дело» играют предметные компетенции, в частности математические. В процессе изучения основ системного анализа студенты рассматривают модели сложных систем и методы моделирования, существенные характеристики экономических систем, основы управления в сложных системах, методы количественного и качественного оценивания систем, а также проводят оценку сложных систем в условиях неопределенности. Приемы и методы системного анализа направлены на выдвижение альтернативных вариантов решения проблемы, выявление масштабов неопределенности по каждому варианту и сопоставление вариантов по их эффективности.

При решении конкретных задач применение методов системного анализа предполагает построение экономических и математических моделей для задач принятия решения в сложных ситуациях или в условиях неопределенности, изучение взаимосвязей, определяющих впоследствии принятие решений, и установление критериев эффективности, позволяющих оценивать преимущество того или иного варианта действия. Примером профессионально ориентированной задачи может служить следующая: *для обеспечения экономической безопасности функционирования предприятия необходимо обеспечить систему выборочного контроля продукции; требуется выбрать такие формы его проведения — назначить размеры контрольных партий, указать последовательность контрольных операций, определить правила отбраковки, — чтобы обеспечить необходимое качество при минимальных расходах [2].*

Одной из важных тем при обучении основам системного анализа будущих специалистов направления «Таможенное дело» является решение и анализ оптимизационных задач линейного программирования. Задачи линейного программирования, возникающие в практической деятельности, как правило, содержат большое число переменных и ограничений, и их решение без применения средств вычислительной техники — работа весьма трудная. Применение компьютерных технологий в ходе решения задач линейного программирования позволяет при достижении учащимися базового уровня знаний ставить задачи исследовательского плана, что способствует углублению уровня знаний. В ходе решения данных задач используются составление соответствующей программы на языке программирования, инструмент «Поиск решения» программы MS Excel и др. Прежде чем использовать компьютер при решении задачи линейного программирования, необходимо четкое понимание математической сути построения и исследования математиче-

ской модели рассматриваемой экономической ситуации.

Вначале следует рассмотреть задачу, где число переменных равно двум: *на мебельную фабрику для изготовления столов и парт привезли 120 м^3 сосны и 150 м^3 липы. От одного стола фабрика получит 1500 руб. прибыли, одной парты — 2000 руб. Сколько столов и парт должна изготовить из этого материала фабрика, чтобы обеспечить наибольшую прибыль, если на один стол расходуется 0,11 м^3 сосны и 0,06 м^3 липы, а на одну парту — 0,05 м^3 сосны и 0,12 м^3 липы.*

Первый этап решения — анализ условия задачи и построение ее математической модели. Преподаватель с помощью серии вопросов должен подвести студентов к построению математической модели представленной задачной ситуации экономического содержания. При ответе на вопросы «Что требуется определить в задаче?» и «Как на языке математики это выразить?» формулируется утверждение: пусть необходимо изготовить x и y парт, чтобы обеспечить оптимальный вариант производства. При выяснении формы записи того, что на столы и парты расходуется не более 120 м^3 сосны (150 м^3 липы), приходим к неравенствам: $0,11x + 0,05y \leqslant 120$; $0,06x + 0,12y \leqslant 150$. Осталось выразить условие об общей прибыли, учитывая, что от реализации одного стола фабрика получит 1500 руб. прибыли, одной парты – 2000 руб.: $1500x + 2000y$. Таким образом, можно записать целевую функцию, выражающую значение дохода в зависимости от производства x столов и y парт: $F = 1500x+2000y$. По условию необходимо найти наибольшее значение целевой функции при некоторой паре чисел $(x; y)$. Осталось добавить ограничения на количества столов и парт: $x \geqslant 0, y \geqslant 0$. Итак, в результате рассуждений получена математическая модель экономической ситуации, состоящая в определении максимального значения функции $F = 1500x + 2000y$ при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 0,11x + 0,05y \leqslant 120, \\ 0,06x + 0,12y \leqslant 150, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

Отметим, что построение математической модели реальной ситуации может быть сложным в связи с многообразием действующих факторов, степенью их влияния на исследуемый объект, взаимодействием отдельных факторов и их групп, поэтому часто математическая модель лишь приближенно отражает рассматриваемый процесс или явление. На втором этапе решения задачи необходимо решить данную

систему неравенств графическим способом, для чего следует изобразить систему координат Oxy, в ней построить прямые по уравнениям $0,11x + 0,05y = 120$, $0,06x + 0,12y = 150$, $x = 0$, $y = 0$, далее выделить многоугольник решений этой системы как пересечение областей, являющихся решениями каждого неравенства в отдельности. При осмыслении полученного студенты приходят к выводу, что любая точка, принадлежащая четырехугольнику, определяет план выпуска продукции при имеющихся запасах сырья, но из них нужно найти такую точку с координатами x и y, при которых $F = 1500x + 2000y$ будет иметь максимальное значение. Пусть функция $F = 1500x + 2000y$ принимает какое-нибудь постоянное значение c: $1500x + 2000y = c$. Это уравнение на плоскости задает соответствующую прямую, и каждому значению c будет соответствовать некоторая прямая. Все эти линии параллельны между собой и называются линиями уровня функции F.

Далее требуется определить направление возрастания функции, для чего нужно построить линию уровня с большим значением (это будет прямая, параллельная построенной, но расположенная правее). В результате студенты приходят к выводу, что в заданном направлении значение целевой функции возрастает и нужно сдвинуть ее как можно дальше в этом направлении, сдвиг же можно продолжать до тех пор, пока перемещаемая прямая пересекает многоугольник допустимых решений. Последнее положение прямой, когда она имеет одну общую точку с четырехугольником, соответствует максимальному значению целевой функции. В данной задаче получим, что функция F примет наибольшее значение в том случае, когда прямая $1500x + 2000y = c$ будет проходить через точку пересечения прямых $0,11x + 0,05y = 120$, $0,06x + 0,12y = 150$. Решая систему из этих уравнений, студенты найдут ответ: $x \approx 676$, $y \approx 912$. Подставив найденные значения в выражение $1500x + 2000y$, они найдут максимальное значение функции: $F = 2838000$. На этом исследование построенной модели заканчивается.

Результат исследования математической модели выводит студентов на потребность третьего этапа моделирования — перевести полученный результат на профессиональный язык, т. е. целью является придание математическим значениям x, y, F практического смысла. Анализируя, какие элементы в начале решения обозначены x и y, учащиеся приходят к выводу: $x = 676$ и $y = 912$ — количество парт, т. е. план производства при максимальной прибыли в 2838000 руб. и наилучшем расходе сырья обоих видов. Остается найти расход сырья: для сосны $0,11 \cdot 676 + 0,05 \cdot$ $\cdot 912 = 119.96$ м^3, для липы $0,06 \cdot 676 + 0,12 \cdot 912 = 150$ м^3.

После выполнения подробного разбора всех этапов решения задачи

можно приступать к применению инструмента «Поиск решения» табличного процессора MS Excel [3]. Поскольку проведен анализ условия задачи и составлена ее математическая модель (первый этап решения), студенты создают расчетную таблицу с исходными данными и формулами, задают условия и ограничения для поиска решений. Результат совпадет с полученным ранее (количество изделий округлить до целых). После получения результатов решения необходимо их перевести на язык задачи.

При решении задач линейного программирования необходимо владеть следующими умениями: составлять краткую запись условия задачи в виде таблицы; обозначать искомые величины через переменные; выражать величины через переменные; оформлять в виде равенств (неравенств) зависимости между величинами; решать системы уравнений (неравенств) известными методами; определять направление возрастания (убывания) значения функции по графику; находить искомые величины, используя полученный результат; интерпретировать результат решения данной задачи.

Проводя со студентами анализ решения данной задачи, нужно четко выделить этапы:

1. Анализ условия задачи и составление ее математической модели. В результате активной поисковой деятельности учащиеся приходят к следующему: найти такие значения переменных x и y, удовлетворяющих системе ограничений, чтобы при найденных значениях функция $F = 1500x + 2000y$ принимала максимальное значение.

2. Составление плана исследования модели и его реализация (графический метод, инструмент «Поиск решения» MS Excel).

3. Практическое истолкование найденных координат искомой точки и значения функции в этой точке. Студенты интерпретируют результат решения: план производства при максимальной прибыли в 2838000 руб. и наилучшем расходе сырья обоих видов составляет 676 столов и 912 парт.

Первый и третий этапы решения задачи линейного программирования как без применения компьютера, так и с его применением одинаковы, а с использованием информационной технологии автоматизируется второй этап — исследование математической модели экономической ситуации. Следовательно, высвобождается время для решения большого количества задач по теме, так как компьютерное выполнение рутинных

операций и поиск значений сложной функции позволяет уделять больше внимания выработке логического мышления у учащихся и умению находить решения задач самостоятельно, студенты учатся строить алгоритмы решения сложных задач. Это особенно важно, если переменных больше двух, поскольку задачи, возникающие в практической деятельности, как правило, содержат большое число переменных и ограничений и их решение без применения средств вычислительной техники очень трудоемко. Так, с помощью опции «Поиск решения» MS Excel эффективно решаются так называемые транспортные задачи — важные частные случаи задач линейного программирования (решение данного вида задач трудоемко без применения вычислительных средств). Пример закрытой транспортной задачи: *предприятия П1, П2, П3, П4 производят однородную продукцию в количестве 246, 186, 196 и 197 единиц; товар поступает в пять магазинов М1, М2, М3, М4, М5, которые готовы ежедневно принимать 136, 171, 71, 261 и 186 единиц товара. Требуется минимизировать транспортные расходы по перевозке продукции (в табл. 1 указана стоимость перевозки продукции с учетом удаленности).* Таким образом, задача ставится так: найти объемы перевозок для каждой пары «поставщик — потребитель», чтобы мощности всех поставщиков были реализованы, спросы всех потребителей были удовлетворены, суммарные затраты на перевозку были минимальны.

Таблица 1

Стоимость перевозки продукции

Производители	Потребители					Объем производства
	М1	М2	М3	М4	М5	
П1	4,2	4	3,35	5	4,65	246
П2	4	3,85	3,5	4,9	4,55	186
П3	4,75	3,5	3,4	4,5	4,4	196
П4	4,75	3,5	3,4	4,5	4,4	197
Объем потребления	136	171	71	261	186	

На первом этапе необходимо построить экономико-математическую модель данной задачи (искомый объем перевозки от i-го поставщика к j-му потребителю обозначим $x_{ij} \geqslant 0$). Чтобы мощность каждого из поставщиков и спрос каждого из потребителей были выполнены, необходимо составить уравнения баланса для каждых строки и столбца таблицы поставок:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=246 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=186 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=196 \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}=197 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=136 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=171 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=71 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=261 \\ x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}=186. \end{cases}$$

Суммарные затраты на перевозку выражаются через коэффициенты затрат следующим образом:

$$\begin{aligned} F = 4,2x_{11}+4x_{12}+3,35x_{13}+5x_{14}+4,65x_{15}+ \\ +4x_{21}+3,85x_{22}+3,5x_{23}+4,9x_{24}+4,55x_{25}+ \\ +4,75x_{31}+3,5x_{32}+3,4x_{33}+4,5x_{34}+4,4x_{35}+ \\ +5x_{41}+3x_{42}+3,1x_{43}+5,1x_{44}+4,4x_{45}. \end{aligned}$$

Теперь можно дать математическую формулировку задачи (без обращения к ее содержательному экономическому смыслу): на множестве неотрицательных решений системы ограничений найти такое ее решение, при котором линейная функция F принимает минимальное значение. Далее студенты приступают к применению инструмента «Поиск решения» табличного процессора MS Excel [3]. Поскольку проведен анализ условия задачи и составлена ее математическая модель (первый этап решения), студенты создают расчетную таблицу с исходными данными и формулами, задают условия и ограничения для поиска решений. Результат работы инструмента представлен в табл. 2.

Студенты интерпретируют результат решения, переводя его на язык задачи, и находят значение функции затрат.

Изучению вопросов, связанных с решением оптимизационных задач линейного программирования, при обучении основам системного анализа студентов вуза уделяется большое внимание, поскольку такие задачи являются не только средством формирования многих математических понятий, но и умений строить математические модели реальных процессов и явлений, а также средством развития мышления учащихся.

Таблица 2

Объемы поставок

Производители	Потребители					Объем производства
	М1	М2	М3	М4	М5	
П1	0	0	69	30	147	246
П2	136	0	0	35	15	186
П3	0	0	0	196	0	196
П4	0	171	2	0	24	197
Объем потребления	136	171	71	261	186	

Список литературы

1. **Вдовин В. М.** Теория систем и системный анализ : учебник / В. М. Вдовин, Л. Е. Сурков, В. А. Валентинов. М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К», 2016. 644 с.

2. **Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришин И. М., Фридман М. Н.** Исследование операций в экономике : учебное пособие для вузов/ под ред. проф. Н. Ш. Кремера. М.: Юрайт; ИД «Юрайт», 2013. 438 с.

3. **Берман Н. Д., Шадрина Н. И.** Решение задач линейного программирования в Microsoft Excel 2010 : методические указания к выполнению лабораторных работ по информатике для обучающихся по всем программам бакалавриата и специалитета дневной формы обучения. Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2015. 27 с.

Summary

Chirkova L. N. Regarding the solution of optimization problems linear programming in learning the basics of system analysis

This article is devoted to the solution of optimization problems linear programming in learning the basics of system analysis students of the university.

Keywords: system analysis, economic system, the optimization problems of linear programming.

References

1. **Vdovin V. M.** *Teorija sistem i sistemnyj analiz* (Systems theory and systems analysis): Textbook/ V. M. Vdovin, L. E. Syrkov, V. A. Valentinov, Moscow: Publishing and trading corporation «Dashkov and C», 2016, 644 p.

2. **Kremer N. Sh., Pytko B. A., Trishin I. M., Fridman M. N.** *Issledovanie operacij v jekonomike* (Research of operations in economy): textbook for university/under the editorship of prof. N. Sh. Kremer. Moscow: Publisher Urait, 2013, 438 p.

3. **Berman N. D., Shadrina N. I.** *Reshenie zadach linejnogo programmirovanija v Microsoft Excel 2010* (The decision problems of linear programming in Microsoft Excel 2010): methodical instructions to performance of laboratory works on computer science for bachelors and specialists, Chabarovsk: Publisher University of the Pacific, 2015, 27 p.

Для цитирования: Чиркова Л. Н. О решении оптимизационных задач линейного программирования при обучении основам системного анализа // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 4 (25). С. 59–67.*

For citation: Chirkova L. N. Regarding the solution of optimization problems linear programming in learning the basics of system analysis, *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, №4 (25), pp. 59–67.

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 09.12.2017*

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (25). 2017

УДК 004.272.32

ЕВКЛИДОВА И НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЭКСКУРС ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

Н. И. Попов, Е. П. Габова

В статье описаны элементы евклидовой и неевклидовой геометрии на доступном для школьников математическом языке. Приведены примеры моделей геометрии Н. И. Лобачевского. Работа направлена на расширение научного мировоззрения и математического кругозора учащихся средних общеобразовательных учреждений.
Ключевые слова: евклидова геометрия, неевклидова геометрия, модели геометрии Лобачевского.

Переход на федеральный государственный образовательный стандарт (ФГОС) основного общего и среднего общего образования требует разработки уроков и внеклассных мероприятий, направленных на творческое развитие талантливой молодежи. Элективные курсы и дополнительные школьные занятия по геометрии расширяют и углубляют математические знания учащихся, развивают их логическое мышление и геометрическую интуицию.

Современная программа по математике для общеобразовательных учреждений в разделе «Математика в историческом развитии» содержит материал о выдающихся учёных Евклиде Александрийском и Н. И. Лобачевском. В учебно-методических пособиях для средних общеобразовательных учреждений материал по теме «Н. И. Лобачевский и его вклад в науку» присутствует, но не в достаточном объёме. Имеющиеся в интернет-источниках научные статьи иногда являются сложными для восприятия учащимися и даже учителями, поэтому важны доступные для понимания школьников формы изложения научно-познавательной информации [1].

Евклидова геометрия (элементарная геометрия) — раздел математики, основанный на системе аксиом, впервые изложенный в важнейшем труде Евклида Александрийского «Начала» («Элементы») [3], написанном около 300 г. до н. э. Работа «Начала» оказала существенное влияние на развитие математической науки вплоть до XIX века, в тринадцати книгах Евклида систематически изложены различные разделы математики, являвшиеся итогом ее развития до появления трудов Евклида. В книгах I–IV отражены знания по геометрии, их содержание восходило к трудам учёных пифагорейской школы, в книге V изложено учение о пропорциях, которое исходит от Евдокса Книдского, в более поздних трудах содержалось учение о числах, представляющее собой разработки пифагорейских первоисточников, а научные труды X–XIII посвящены разделам стереометрии и теории иррациональности.

В [3] сформулированы следующие пять постулатов: «допустим:

1. Что от всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию.

2. И что ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.

3. И что из всякого центра и всяким раствором может быть описан круг.

4. И что все прямые углы равны между собой.

5. И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух, прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы, меньшие двух прямых».

Научный труд «Начала» был построен на основе аксиом, постулатов и определений. Никто из учёных не сомневался в истинности постулатов Евклида, включая пятый постулат. Следует отметить, что уже с древности именно постулат о параллельных прямых привлек к себе серьезное внимание некоторых геометров, которые считали его наличие неестественным среди других утверждений. Вероятно, что это было связано с относительно меньшей наглядностью и очевидностью пятого постулата: в неявном виде он предполагает достижимость любых, сколь угодно далеких частей плоскости, выражая при этом свойство, которое обнаруживается только при бесконечном продолжении прямых линий.

Возможно, что сам Евклид пытался доказать пятый постулат о параллельных прямых. В пользу этого говорит тот факт, что первые двадцать восемь предложений труда «Начала» не опираются на указанный постулат. Знаменитый математик как бы старался отодвинуть использование пятого постулата до тех пор, пока его применение не станет

существенно необходимым. Некоторые математики пытались доказать постулат о параллельных прямых, применяя другие теоремы и постулаты. Но, к сожалению, все такие попытки оказались неудачными. Общий недостаток таких подходов заключался в том, что в доказательстве утверждений неявно применялось какое-нибудь предположение, равносильное доказываемому постулату. Были и сторонники такого подхода: математики предлагали по-другому определить параллельные прямые или же заменить пятый постулат каким-нибудь, по их мнению, более очевидным утверждением.

Отметим, что в геометрии Лобачевского не выполняется пятый постулат Евклида (аксиома о параллельных прямых). Утверждается, что существует бесконечное множество прямых, проходящих через не лежащую на прямой l точку и не пересекающих l.

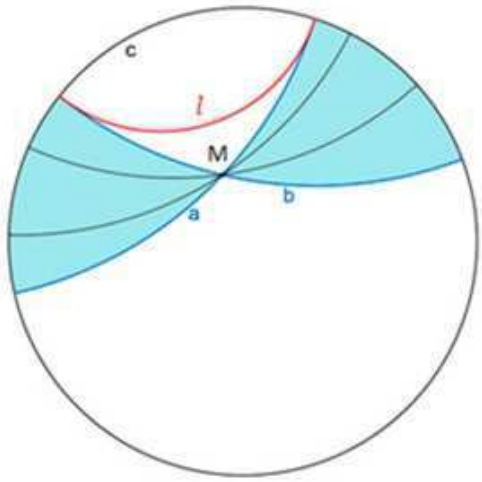


Рис. 1. Модель Пуанкаре

Геометрию Лобачевского можно реализовать на обычной евклидовой плоскости [2]. Воспользуемся моделью Пуанкаре для круга (рис. 1). В данной модели «плоскостью» называется внутренность обычного круга радиуса 1, а «прямыми» — дуги окружностей, перпендикулярных границе круга (окружности называются перпендикулярными, если перпендикулярны их касательные в точках пересечения). При этом граница круга называется «абсолютом» и считается не принадлежащей плоскости. Нетрудно заметить, что через точку M, не лежащую на прямой l, действительно можно провести множество непересекающихся прямых, которые находятся внутри угла, образованного прямыми a и b. Парал-

лельными (в указанной модели) называются прямые, имеющие общую точку на абсолюте. Например, прямые l и a, а также l и b параллельны между собой, но при этом прямые a и b не являются параллельными (см. рис. 1).

Расстояние между точками в плоскости Лобачевского можно вычислить следующим образом. Если Q, R — точки на плоскости, а P, S — точки, в которых прямая, проходящая через Q и R, пересекает абсолют, то искомое расстояние между Q и R равно

$$d(Q,R) = ln\left(\frac{PR}{PQ} : \frac{RS}{QS}\right), \tag{1}$$

где PR, RS, PQ, QS — расстояния между двумя точками.

Опираясь на рис. 1, отметим, что параллельные прямые сближаются друг с другом с одного конца и бесконечно отдаляются с другого. Если же прямые не параллельны и не пересекаются, то точки, движущиеся по этим прямым к абсолюту, всегда бесконечно отдаляются. Отметим, что при приближении к абсолюту точка бесконечно удаляется от центра круга.

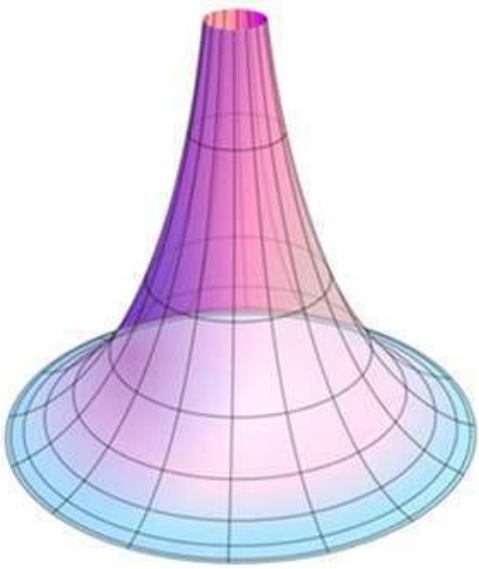


Рис. 2. Псевдосфера

Другая реализация геометрии Лобачевского возможна на специальной поверхности в трехмерном пространстве — псевдосфере (см. рис. 2).

Псевдосфера представляет собой поверхность вращения кривой

$$z = ln\left(tg\frac{t}{2}\right) + cos(t), \quad x = sin(t)$$

вокруг оси Oz. Прямыми Лобачевского на указанной поверхности являются геодезические линии, т. е. линии кратчайшей длины, соединяющие две заданные точки. Геодезическую линию можно получить, натянув по поверхности нить. Большая часть таких геодезических линий на псевдосфере представляет собой спирали, навивающиеся на так называемую «граммофонную трубу» (см. рис. 2). Но геодезическими также являются сечения псевдосферы плоскостями, проходящими через ее ось вращения. В рассматриваемой модели расстояния определяются как обычные евклидовы длины геодезических линий.

Отметим, что кроме модели Пуанкаре и псевдосферы существуют и другие модели для геометрии Лобачевского [5]. При рассмотрении плоскости Лобачевского учитываются следующие факторы:

— это некоторая двумерная поверхность;

— прямыми на такой плоскости являются некоторые кривые на поверхности;

— существует способ определения расстояния (метрики) на такой плоскости (1), при котором кратчайший путь между двумя точками всегда был бы определен по «прямой».

Указанная метрика (1) полностью определяет внутренние свойства поверхности, в частности каким образом и насколько рассматриваемая поверхность искривлена. Неевклидова геометрия представляет собой геометрию искривленной поверхности, в частности псевдосферы, а все модели геометрии Лобачевского — это разные системы координат, введенные на плоскости Лобачевского. Метрики моделей отличаются между собой, но при этом описывают одну и ту же геометрию [6, с. 47].

Как показывает анализ различных литературных источников (см., напр., [4; 6]), во многих архитектурных сооружениях есть и элементы геометрии Н.И. Лобачевского, в частности в архитектуре А. Гауди. Конструкции, созданные Антонио Гауди, значительно опередили свое время. При этом следует отметить, что именно нестандартное решение проблемы геометрических линий позволило знаменитому мастеру сделать шаг вперед на пути создания нового художественного метода.

Дополнительные знания по неевклидовой геометрии позволяют расширить научное мировоззрение и математический кругозор учащихся средних общеобразовательных учреждений, способствуют интеллектуальному развитию талантливой молодёжи.

Список литературы

1. **Габова Е. П.** Изучение творческой деятельности двух величайших математиков Евклида Александрийского и Н. И. Лобачевского // *Лобачевский и XXI век : материалы IV учебно-научной студенческой конференции, посвященной году Лобачевского в Казанском федеральном университете / под ред. Л. Р. Шакировой.* Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017. С. 50–67.

2. **Галимханова З. Т., Гузялова А. Н.** Элементы геометрии Н. И. Лобачевского в архитектуре А. Гауди // *Лобачевский и XXI век : материалы IV учебно-научной студенческой конференции, посвященной году Лобачевского в Казанском федеральном университете / под ред. Л. Р. Шакировой.* Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017. С. 67–82.

3. **Евклид.** Начала Евклида. Книги I-VI / пер. с греч. и коммент. А. Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. М.; Ленинград: Гостехиздат, 1950. 447 с.

4. **Пидоу Д.** Геометрия и искусство. М.: Мир, 1979. 332 с.

5. **Прасолов В. В.** Геометрия Лобачевского. М.: Изд-во МЦНМО, 2004. 89 с.

6. **Хенсберген Г.** Гауди-тореадор искусства. М.: Эксмо, 2004. 352 с.

Summary

Popov N. I., Gabova E. P. Euclidean and non-Euclidean geometry: a mathematical excursion for schoolchildren

The paper describes elements of Euclidean and non-Euclidean geometry in a mathematical language accessible to schoolchildren. Examples of models of geometry N.I. Lobachevsky are given. The work is aimed at expanding the scientific outlook and the mathematical outlook of students in secondary general education institutions.

Keywords: Euclidean geometry, non-Euclidean geometry, models of the Lobachevsky.

References

1. **Gabova E. P.** Izuchenie tvorcheskoj dejatel'nosti dvuh velichajshih matematikov Evklida Aleksandrijskogo i N. I. Lobachevskogo (A study of the creative activities of the two greatest mathematicians Euclid of Alexandria and N. Lobachevsky), *Lobachevsky and the XXI century: materials of the IV educational scientific student conference dedicated to the Year of Lobachevsky's in Kazan Federal University, ed. by L. R. Shakirova*. Kazan: University, 2017, pp. 50–67.

2. **Galimkhanova Z. T., Guzyalova A. N.** Jelementy geometrii N. I. Lobachevskogo v arhitekture A. Gaudi (Geometry of N. Lobachevsky in the Architecture of A. Gaudi), *Lobachevsky and the XXI century: materials of the IV educational scientific student conference dedicated to the Year of Lobachevsky'sin Kazan Federal University, ed. by L. R. Shakirova*, Kazan: University, 2017, pp. 67–82.

3. **Euclid.** *Nachala Evklida* (The Beginning). Books I-VI. Translation from Greek and comments ofA.D. Mordukhai-Boltovskiy, Moscow — Leningrad: Gostekhizdat, 1950, 447 p.

4. **Pidou D.** *Geometrija i iskusstvo* (Geometry and art), Moscow: Mir, 1979, 332 p.

5. **Prasolov V. V.** *Geometrija Lobachevskogo* (Geometry of Lobachevsky), Moscow: Eksmo, 2004, 89 p.

6. **Hensbergen G.** *Gaudi-toreador iskusstva* (Gaudi-toreador of art), Moscow: Eksmo, 2004, 352 p.

Для цитирования: Попов Н. И., Габова Е. П. Евклидова и неевклидова геометрия: математический экскурс для школьников // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 4 (25). С. 68–74.*

For citation: Popov N. I., Gabova E. P. Euclidean and non-Euclidean geometry: a mathematical excursion for schoolchildren, *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, №4 (25), pp. 68–74.

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 25.12.2017*

КРАТКИЕ НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (25). 2017

УДК 517.981

МЕРА НА БУЛЕВЫХ АЛГЕБРАХ

В. Н. Алексюк

Если на регулярных булевых алгебрах со счетной системой образующих имеется существенно положительная квазимера, то полные булевы алгебры с непрерывной внешней мерой нормируемы (в ZFC+CH).
Ключевые слова: булева алгебра, непрерывная внешняя мера, мера.

В заметке используются понятия из книги Д. А. Владимирова [1].

Пусть E — непрерывная счетно-полная булева алгебра. Непрерывная внешняя мера на булевой алгебре E — это функция $f : E \to [0, \infty)$, равная нулю лишь в нуле этой алгебры, монотонная (если $x \leq y$, то $f(x) \leq f(y)$), непрерывная сверху в нуле (если последовательность элементов $e_n \in E$ убывает к нулю, то $f(e_n) \to 0$), субаддитивная (если x, $y \in E$, то $f(x \vee y) \leq f(x) + f(y)$). Аддитивная внешняя мера называется мерой.

В статье Д. Магарам [2, с.167] предложен следующий вопрос: «Каждая ли безатомная счетно-полная булева алгебра E с непрерывной внешней мерой обладает мерой?».

В работе автором представлены следующие предложения на эту тему, имеющие место в теории множеств **ZFC+CH**.

Теорема. Если на любой регулярной булевой алгебре $E = E(C)$, порожденной счетной подалгеброй C, имеется существенно положительная квазимера, то:

1. Любая непрерывная регулярная булева алгебра $E = E(C)$ счетного веса нормируема.

2. Любая непрерывная счетно-полная булева алгебра $E(C)$ счетного веса с непрерывной внешней мерой нормируема.

3. Каждая непрерывная полная булева алгебра E с непрерывной внешней мерой нормируема.

Проблема (в ZFC+CH). Каждая полная булева алгебра со строго возрастающей непрерывной внешней мерой нормируема.

Список литературы

1. **Владимиров Д. А.** Булевы алгебры. М.: Наука, 1969. 320 с.

2. **Magaram D.** An algebraic characterisation of measure algebras // *Annals of Mathematics. 1947. V. 48. №1. P. 154–167.*

3. **Алексюк В. Н.** Теорема о миноранте. Счетность проблемы Магарам // *Математические заметки. 1977. Т. 21. №5. С. 597–604.*

4. **Владимиров Д. А.** Теория булевых алгебр. СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 2000. 616 с.

5. **Сикорский Р.** Булевы алгебры. М.: Мир, 1969. 376 с.

Summary

Aleksyuk V. N. Measure on Boolean algebras

If measures exist on all regular Boolean algebras with a countable system of generators, then on complete Boolean algebras with continuous external (outer) measure there are measures (in the set theory **ZFC+CH**).

Keywords: Boolean algebras, the external (outer) measure, measure.

References

1. **Vladimirov D. A.** *Bulevy algebry* (Boolean algebras), M.: Izdatel'stvo «NAUKA», 1969, 320 p.

2. **Magaram D.** An algebraic characterisation of measure algebras, *Annals of Mathematics*, 1947, v. 48, №1, pp. 154-167.

3. **Aleksjuk V. N.** Teorema o minorante. Schetnost' problemy Magaram (The Minorant Theorem. The countability of the Magaram problem), *Matematicheskie zametki*, 1977, t. 21, №5, pp. 597–604.

4. **Vladimirov D. A.** *Teorija bulevyh algebr* (The theory of Boolean algebras), SPb.: Izdatel'stvo S.-Peterburgskogo universiteta, 2000, 616 p.

5. **Sikorskij R.** *Bulevy algebry* (Boolean algebras), M.: Izdatel'stvo «MIR», 1969, 376 p.

Для цитирования: Алексюк В. Н. Мера на булевых алгебрах // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 4 (25). С. 75–77.*

For citation: Aleksyuk V. N. Measure on Boolean algebras, *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, №4 (25), pp. 75–77.

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 19.12.2017*

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (25). 2017

УДК 51

ВЛАДИМИРУ ЛЕОНИДОВИЧУ НИКИТЕНКОВУ ИСПОЛНИЛОСЬ БЫ 65 ЛЕТ

Е. М. Вечтомов

Статья посвящена заслуженному работнику высшей школы Российской Федерации, доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Леонидовичу Никитенкову (1952–2015).

Я был знаком с В. Л. Никитенковым (27.11.1952–26.08.2015) двенадцать с половиной лет. Мы регулярно встречались как в Сыктывкаре, так и в Кирове. Познакомились в марте 2003 года в Сыктывкарском государственном университете после приёма государственного экзамена по математике, куда меня пригласили в качестве председателя экзаменационной комиссии. Профессор В. Л. Никитенков принимал экзамен

на пару со своим учителем, коллегой и другом профессором Евгением Ильичом Михайловским. Их стиль работы сразу бросался в глаза: интеллигентность, оригинальность, увлечённость, высокий профессионализм, строгость и вместе с тем расположенность и внимание к экзаменуемым студентам.

Кратко о биографии В. Л. Никитенкова (более подробно см. [1; 2]). Владимир Леонидович родился в городе Демидове Смоленской области. Поступил на математико-механический факультет Ленинградского университета, который окончил в 1976 году. Специализировался на кафедре исследования операций по отделению кибернетики. Сразу после получения диплома был приглашён ректором Сыктывкарского университета Валентиной Александровной Витязевой (1919–2010) на работу в Сыктывкар, на кафедру прикладной математики. В 1987 г. этой кафедрой стал заведовать Е. И. Михайловский (1937–2013) [2; 3], яркий представитель ленинградской школы механики академика Валентина Валентиновича Новожилова (1910–1987). В 1988 году Владимир Леонидович под руководством Е. И. Михайловского стал кандидатом физико-математических наук, а в 1996 году защитил докторскую диссертацию «Вопросы прочности и проектирования тяжелых горизонтальных аппаратов давления» на соискание учёной степени доктора технических наук в Институте проблем машиностроения РАН в Санкт-Петербурге. Е. И. Михайловский и В. Л. Никитенков — лидеры школы механики Коми республики, ветви научного направления Новожилова – Черных – Михайловского – Никитенкова.

С 1999 года по 2015 год В. Л. Никитенков — профессор, заведующий кафедрой прикладной математики Сыктывкарского университета. Руководил научным направлением «Исследование экстремальных свойств сплайнов, их приложений в численных методах и машинной графике, разработка численных методов для решения краевых задач теории оболочек, задач оптимизации, вычислительной геометрии», по которой было получено пять российских грантов.

Являлся одним из разработчиков концепции информатизации образования в республике. В 1991–1993 годах возглавлял Коми региональный центр новых информационных технологий при Сыктывкарском университете. Был председателем республиканской секции «Математика и информационные технологии» Всероссийской научно-социальной программы «Шаг в будущее».

В. Л. Никитенковым лично проделана большая работа по открытию новой специальности «Прикладная математика и информатика» (2000) и нового направления подготовки студентов «Математика. Ком-

пьютерные науки» (2001), проведена подготовительная работа по открытию аспирантуры по специальности «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (открыта в 2006 году). За большую плодотворную научно-педагогическую работу профессор В. Л. Никитенков получил почётное звание заслуженного работника высшей школы Российской Федерации (2007) и звание заслуженного профессора Сыктывкарского университета (2010). Приведу свои воспоминания и впечатления о Володе Никитенкове.

Владимир Леонидович — профессионал-подвижник, замечательный педагог и учёный. Удивляла его работоспособность. Несмотря на перенесённую им тяжёлую операцию на сердце, Володя целыми днями находился на работе. Двери его кабинета на кафедре прикладной математики (в последнее время: прикладной математики и информационных технологий в образовании) всегда были открыты для преподавателей и студентов. В кабинете царила деловая и гостеприимная атмосфера: полки с книгами и журналами, на рабочем столе компьютер, бумаги и курительная трубка, на стенах картины и рисунки, на тумбочке чай, кофе, сахар и печенье, а на стульях — посетители, порой неожиданные. Был душой компании.

В. Л. Никитенков — высококвалифицированный автор, имеет более 100 научных и методических публикаций: статей, монографий и учебных пособий. В 2014 году за свои труды удостоен Премии Правительства Республики Коми в области образования (одну из рецензий, подготовленных мной, получил от Вятского государственного университета). Он умел дружить. Никогда не отказывал в поддержке и помощи. Мы неоднократно выручали друг друга, обменивались своими книгами и статьями.

Володя был волевым и мужественным человеком. В любую погоду по утрам делал гимнастику на улице и обливался холодной водой. Мы помним, как он окунался в купели и плавал в холодной воде реки Великой, будучи на научных конференциях в Кирове в мае и сентябре (в рамках культурной программы в селе Великорецком — месте знаменитого ежегодного Великорецкого крестного хода, которому более 600 лет). Даже будучи серьезно болен, он сохранял оптимизм, приветливость, расположение к людям, доброту и отзывчивость. Был отличным отцом трём своим дочерям Екатерине, Наталье и Марии, любящим и заботливым дедом. Постоянно о них рассказывал, в рабочем кабинете висели рисунки его внучки. Владимир Леонидович занимал чёткую гражданскую позицию. Проблемы всей России волновали его так же, как и судьба малой родины — небольшого города Демидова

на Смоленщине (старинное село Поречье), где он проводил свои отпуска (там и скончался в конце августа 2015 года). Видя падение уровня российского образования в результате повсеместного насаждения прозападных образовательных стандартов и штампов, делал всё что мог для сохранения и развития профессиональной подготовки студентов и аспирантов, молодых преподавателей. Напомню, что ещё в 2002 году В. Л. Никитенков был награжден нагрудным знаком Минобразования «За развитие научно-исследовательской работы студентов». Всегда выполнял большую общественную работу. Как и я, Володя очень обрадовался присоединению (возвращению) Крыма к России. Смело могу сказать, что мы были единомышленниками и соратниками.

Как утверждал Володя, основополагающую роль в жизни играют окружающие его люди: родные, друзья, коллеги, учителя и ученики. Ради них он себя не жалел. Приятно и поучительно, что в рамках работы Международной научной конференции «Математическое моделирование и информационные технологии» [4], посвященной 80-летию профессора Е. И. Михайловского (10–11 ноября 2017 года), состоялось открытие выставки о жизни и деятельности профессора В. Л. Никитенкова, приуроченной к его 65-летию. На открытии этой выставки в Музее истории Сыктывкарского университета мне довелось выступить с воспоминаниями о Владимире Леонидовиче перед студентами, преподавателями и сотрудниками университета. Нужно помнить и понимать, что именно такие люди, как Е. И. Михайловский и В. Л. Никитенков, в состоянии сохранить и приумножить интеллектуальную мощь Отчизны. Они являются достоянием нашей Родины — России!

Владимир Леонидович Никитенков останется в нашей памяти как очень светлый, ответственный, отзывчивый, добрый, одухотворённый человек, настоящий гражданин и патриот Российской Федерации!

Список литературы

1. Персоналии. Наши юбиляры: Никитенков Владимир Леонидович (к 60-летию) // *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона / гл. ред. Е. М. Вечтомов. 2013. Вып. 15. С. 465–466.*

2. Евгений Ильич Михайловский и его Ученик Владимир Леонидович Никитенков : сборник воспоминаний и документов (аннотированный каталог личных фондов) / сост. М. И. Бурлыкина, М. А. Лодыгина. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2017. 236 с.

3. **Вечтомов Е. М.** К восьмидесятилетию профессора Евгения Ильича Михайловского // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 3 (24). С. 116–119.*

4. Математическое моделирование и информационные технологии : сборник статей Международной научной конференции (10–11 ноября 2017 г., г. Сыктывкар) / отв. ред. А. В. Ермоленко. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2017. 156 с.

Summary

Vechtomov E. M. Vladimir Leonidovich Nikitenkov would be 65 years old

The article is dedicated to the honored worker of the Higher School of the Russian Federation, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor Vladimir Leonidovich Nikitenkov (1952–2015).

References

1. Personalii. Nashi jubiljary: Nikitenkov Vladimir Leonidovich (k 60-letiju) (People. Our heroes: Nikitenkov Vladimir Leonidovich (to the 60th anniversary)), *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vjatskogo regiona*, gl. red. E. M. Vechtomov, 2013, vyp. 15, pp. 465–466.

2. *Evgenij Il'ich Mihajlovskij i ego Uchenik Vladimir Leonidovich Nikitenkov: sbornik vospominanij i dokumentov (annotirovannyj katalog lichnyh fondov)* (Evgeny Ilyich Mikhailovsky and his pupil Vladimir Leonidovich Nikitenkov: a collection of memoirs and documents (annotated catalog of personal funds)) , sost. M. I. Burlykina, M. A. Lodygina, Syktyvkar: Izd-vo SGU im. Pitirima Sorokina, 2017, 236 p.

3. **Vechtomov E. M.** K vos'midesjatiletiju professora Evgenija Il'icha Mihajlovskogo (On the occasion of the eightieth birthday of Professor Yevgeny Mikhailovsky), *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, Vyp. 3 (24), pp. 116–119.

4. *Matematicheskoe modelirovanie i informacionnye tehnologii: sbornik statej Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii, posvjashhennoj 80-letiju*

E. M. Mihajlovskogo (Mathematical modeling and information technologies: a collection of articles of the International Scientific Conference dedicated to the 80th anniversary of EM Mikhailovsky) Syktyvkar: Izd-vo SGU im. Pitirima Sorokina, 2017, 156 p.

Для цитирования: Вечтомов Е. М. Владимиру Леонидовичу Никитенкову исполнилось бы 65 лет // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 4 (25). С. 78–83.*

For citation: Vechtomov E. M. Vladimir Leonidovich Nikitenkov would be 65 years old, *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, №4 (25), pp. 78–83.

ВятГУ *Поступила 01.12.2017*

ПЕРСОНАЛИИ

Алексюк Владимир Николаевич – к.ф.-м.н., профессор кафедры математического анализа, пенсионер

Вечтомов Евгений Михайлович – д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой фундаментальной и компьютерной математики, Вятский государственный университет, e-mail: vecht@mail.ru

Габова Екатерина Петровна – студент 112п-ФМО группы, специальность «Физико-математическое образование», Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина, кафедра физико-математического и информационного образования, 8(8212) 390-377, e-mail: gepkatja0512@mail.ru

Дубатовская Марина Валерьевна – к.ф.-м.н., доцент кафедры аналитической экономики и эконометрики, Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь, e-mail: dubatovska@bsu.by

Королев Иван Федорович – студент, кафедра прикладной математики и информационных технологий в образовании, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина, e-mail: korolevivan1997@gmail.com

Котелина Надежда Олеговна – к.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной математики и информационных технологий в образовании, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина, e-mail: nkotelina@gmail.com

Куратова Любовь Александровна – аспирант, Институт социально-экономических и энергетических проблем Севера Коми НЦ УрО РАН, e-mail: cvn@rambler.ru

Макаров Павел Андреевич – к.ф.-м.н., доцент кафедры радиофизики и электроники, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина, e-mail: mkrvpa@gmail.com

Певный Александр Борисович – д.ф.-м.н., профессор кафедры прикладной математики и информационных технологий в образовании, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина, e-mail: pevnyi@syktsu.ru

Попов Николай Иванович – д. п. н., к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой физико-математического и информационного образова-

ния, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина, e-mail: popovnikolay@yandex.ru

Примачук Леонид Платонович – к.ф.-м.н., доцент, Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь, e-mail: dubatovska@bsu.by

Рогозин Сергей Васильевич – к.ф.-м.н., доцент кафедры аналитической экономики и эконометрики, Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь, e-mail: rogosin@bsu.by

Ситник Сергей Михайлович – д.ф.-м.н., профессор, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, e-mail: sitnik@bsu.edu.ru

Чередов Валерий Николаевич – Институт физики металлов им. М.Н. Михеева УрО РАН, e-mail: cvn@rambler.ru

Чиркова Лариса Николаевна – к.п.н., доцент кафедры фундаментальной и компьютерной математики, Вятский государственный университет

AUTHORS

Aleksyuk Vladimir – Ph.D. in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Mathematical Analysis, pensioner

Vechtomov Eugene – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Fundamental and Computer Mathematics, Vyatka State University, e-mail: vecht@mail.ru

Gabova Ekaterina – Student 112p-FMO group, specialty « Physics and mathematics education», Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin, Department of Physics and Mathematics and Information Education, 8 (8212) 390-377 e-mail: gepkatja0512@mail.ru

Dubatovskaya Maryna – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Analytical Economics and Econometrics, Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus, e-mail: dubatovska@bsu.by

Korolev Ivan – Student, Department of Applied Mathematics and Information Technologies in Education, Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin, e-mail: korolevivan1997@gmail.com

Kotelina Nadezhda – Ph.D., Associate Professor Department of Applied Mathematics and Information Technologies in Education, Syktyvkar

State University named after Pitirim Sorokin, e-mail: nkotelina@gmail.com

Kuratova Lyubov – Postgraduate, Institute with economic and energy problems of the North Komi NC UB RAS

Makarov Pavel – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Radiophysics and electronics, Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin, e-mail: mkrvpa@gmail.com

Pevnyi Alexander – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Applied Mathematics and Information Technologies in Education, Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin, e-mail: pevnyi@syktsu.ru

Popov Nikolai – Ph.D., Head of the Department of Physics and Mathematics and Information Education, Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin, e-mail: popovnikolay@yandex.ru

Primachuk Leonid – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

Rogosin Sergei – Ph.D., Associate Professor of the Department of Analytical Economics and Econometrics, Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus, e-mail: rogosin@bsu.by

Sitnik Sergei – Ph.D. in Physics and Mathematics, Professor, Belgorod State National Research University, e-mail: sitnik@bsu.edu.ru

Cheredov Valeriy – Institute of Metal Physics. M.N. Mikheeva UB RAS, e-mail: cvn@rambler.ru

Chirkova Larisa – Ph.D., associate professor of the fundamental and computer mathematics, Vyatka State University

Contents

Научное периодическое издание

Вестник Сыктывкарского университета
Серия 1: Математика. Механика. Информатика
Выпуск 4 (25) 2017

Гл. редактор О.А. Сотникова
Отв. редактор А.В. Ермоленко

Редактор Е.М. Насирова
Компьютерный макет М.Н. Юркина
Корректор Л.Н. Руденко

Подписано в печать 29.12.2017. Дата выхода в свет 15.01.2018.
Формат $70 \times 108\frac{1}{8}$. Бумага офсетная.
Гарнитура Computer Modern. Печать ризографическая. Усл. печ. л. 6,9.
Тираж 500 экз. Заказ № 25.

Адрес типографии:
167023. Сыктывкар, ул. Морозова, 25,
Тел. (8212)390-473, 390-472
Издательский центр СГУ им. Питирима Сорокина