НАСТАВНИК-УЧЕНИК

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 2 (23). 2017

УДК 512.55

О СТРУКТУРЕ КОНЕЧНЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОЛУКОЛЕЦ С ИДЕМПОТЕНТНЫМ КОММУТАТИВНЫМ СЛОЖЕНИЕМ

Д. В. Чупраков, А. В. Ведерникова

Статья посвящена исследованию конечных идемпотентных циклических полуколец с коммутативным сложением. Авторами установлен критерий существования конечного идемпотентного циклического полукольца с коммутативным сложением, заданного идеалом целых неотрицательных чисел, получены оценки числа элементов КИЦП. Сформулированы алгоритмы вычисления числа элементов по образующим ассоциированного идеала целых неотрицательных чисел.

Ключевые слова: полукольцо, циклическое полукольцо, идемпотент, идеал, натуральное число.

1. Введение

Статья посвящена исследованию конечных идемпотентных циклических полуколец (КИЦП) с коммутативным сложением. Впервые задача изучения циклических полуколец — полуколец с мультипликативным образующим элементом — поставлена Е. М. Вечтомовым [4] в 2000 году. Дальнейшие исследования ведутся в двух направлениях (см. обзор Е. М. Вечтомова [7]).

Во-первых, Е. М. Вечтомовым и И. В. Орловой [5, 6, 8, 9] исследуются циклические полукольца с некоммутативным сложением. В статье [5] получено описание конечных идемпотентных циклических полуколец с некоммутативным сложением через циклические полуполя и коммутативные конечные идемпотентные циклические полукольца.

Во-вторых, Е. М. Вечтомовым и А. С. Бестужевым, а в дальнейшем Д. В. Чупраковым и А. В. Ведерниковой [3] изучаются конечные циклические полукольца с коммутативным сложением. В работе [1] А. С. Бестужевым начато изучение конечных идемпотентных циклических полуколец с коммутативным сложением: установлено, что свойства операции сложения в конечном идемпотентном циклическом полукольце определяются элементами, непосредственно большими 1; в терминах полурешеток описаны идемпотентные конечные циклические полукольца, представимые полурешетками ширины $m \leqslant 3$. В работе [3] А. В. Ведерниковой и Д. В. Чупраковым предпринята попытка преодоления необходимости полного перебора, предпринятого А. С. Бестужевым. Рассмотрены подходы к алгебраическому описанию КИЦП с коммутативным сложением. Задача описания конечных идемпотентных циклических полуколец сведена к исследованию порядковых свойств идеалов целых неотрицательных чисел. В результате выявлена проблема оценки количества элементов КИЦП.

Решению этого вопроса посвящена настоящая статья. Выделим следующие результаты: критерий существования КИЦП S, заданного идеалом целых неотрицательных чисел (теорема 1); алгоритм вычисления числа элементов КИЦП S (следствие 1), опирающийся на порядковые свойства элементов КИЦП S; алгоритм вычисления числа элементов конечного идемпотентного циклического полукольца S, заданного двухпорожденным идеалом целых неотрицательных чисел (теорема 2), опирающийся на алгебраические и теоретико-числовые свойства показателей элементов S.

2. Основные понятия и факты

Под *полукольцом* S мы понимаем алгебраическую структуру $\langle S, +, \cdot\rangle$ с коммутативно-ассоциативными операциями сложения «$+$» и умножения «$\cdot$», связанными аксиомой дистрибутивности $x(y+z) = xy+xz$ для всех $x, y, z \in S$.

Полукольцо S называется *(аддитивно) идемпотентным*, если для любого элемента s из полукольца S выполняется равенство $s + s = s$.

Полукольцо с 1 называется *циклическим*, если все его (ненулевые) элементы являются целыми неотрицательными степенями некоторого элемента $\alpha \in S$, называемого образующим S, при этом $1 = \alpha^0$.

Далее в статье рассматриваются конечные циклические полукольца с коммутативным сложением без нуля.

Пусть S — конечное циклическое коммутативное полукольцо с образующим α и идемпотентным сложением без 0. Его элементы имеют вид:

$1 = \alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$. Известно [2], что $\alpha^n = \alpha^{n+1}$ для любого конечного циклического коммутативного полукольца. Значит, циклическое полукольцо S однозначно определяется своим аддитивным редуктом.

Рассмотрим полукольцо

$$\mathbb{N}_n = \big\langle\ \{0, 1, \ldots, n\}, +, \cdot\ \big\rangle$$

с операциями, заданными для любых $x, y \in \{0, 1, \ldots, n\}$ правилами

$$x + y = \min_{x,y,n\in\mathbb{N}_0}\{x + y, n\}, \qquad x \cdot y = \min_{x,y,n\in\mathbb{N}_0}\{xy, n\}.$$

Через $\mathbb{N}_0$ мы будем обозначать полукольцо целых неотрицательных чисел.

На полукольце S введем порядок $\leqslant$ следующим образом:

$$\alpha^k \leqslant \alpha^t \Longleftrightarrow \alpha^k + \alpha^t = \alpha^t \tag{1}$$

для любых $k, t \in \{0, 1, \ldots, n\}$. На полукольце $\mathbb{N}_n$, в свою очередь, зададим порядок $\preccurlyeq$ правилом

$$k \preccurlyeq l \Longleftrightarrow \alpha^k \leqslant \alpha^l \tag{2}$$

для всевозможных $k, l \in \mathbb{N}_n$.

Порядок $\preccurlyeq$ будем называть *порядком, индуцированным КИЦП S*, а упорядоченное полукольцо $\langle\mathbb{N}_n, \preccurlyeq\rangle$ — *полукольцом, ассоциативным с КИЦП S*. Естественный линейный порядок на множестве $\mathbb{N}_n$ обозначим через $\leqslant$.

Ясно, что отображение $\log\colon \alpha^i \to i$ устанавливает *порядковый изоморфизм*

$$\langle S, \leqslant\rangle \cong \langle\mathbb{N}_n, \preccurlyeq\rangle. \tag{3}$$

Вводя на верхней полурешетке $\langle\mathbb{N}_n, \preccurlyeq\rangle$ аддитивную операцию $\vee_n$ правилом $b \vee_n c = \sup\{b, c\}$, $b, c \in \mathbb{N}_n$, получаем полукольцо

$$\check{\mathbb{N}}_n = \langle\mathbb{N}_n, \vee_n, +_n\rangle,$$

изоморфное полукольцу S.

Для целых неотрицательных чисел b и c обозначим $\delta(b, c) = |b - c|$. Бинарная операция δ замкнута на множестве $\{0, 1, \ldots, n\}$ и, следовательно, может быть рассмотрена как операция на $\mathbb{N}_n$.

На полукольце $\mathbb{N}_n$ имеет место аналог сократимости:

Лемма 1. [3, лемма 1] *Пусть* $k, t \in \mathbb{N}_n$.

1) Если $k + \delta = k + \delta < n$ *для некоторого* $\delta \in \mathbb{N}_n$, *то* $k = t$.

2) Если $\delta(k, n) = \delta(t, n)$, *то* $k = t$.

Отсюда в силу дистрибутивности умножения в КИЦП S операция сложения однозначно задается суммами единицы со всеми его элементами $\alpha^{p_k} = 1 + \alpha^k, k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Значит, каждое КИЦП S однозначно задается $(n+1)$-элементным кортежем:

$$(p_0, p_1, \ldots, p_n) \in \{0, 1, \ldots, n\}^{n+1}, \text{ где } 1 + \alpha^i = \alpha^{p_i}. \tag{4}$$

Операции $\vee_n$ и $+$ на полукольце $\check{\mathbb{N}}_n$ связаны следующим соотношением:

$$b \vee_n c = \min\{b, c\} + p_{\delta(b,c)}.$$

Лемма 2. [3, предложение 2] *Пусть КИЦП* S *представлено кортежем* (4). *Тогда для любого* $i \in \mathbb{N}_n$ *справедливо неравенство* $p_i \geqslant i$.

Лемма 3. *Для произвольных элементов* k *и* l *полукольца* $\mathbb{N}_n$ *с порядком* $\preccurlyeq$, *индуцированным* $(n+1)$-*элементным КИЦП* S, *справедливы следующие импликации:*

1) если $k \preccurlyeq l$, *то* $k \leqslant l$;

2) если $k \leqslant l$, *то либо* $k \preccurlyeq l$, *либо* k *и* l *несравнимы.*

Доказательство. Пусть на полукольце $\mathbb{N}_n$ с образующим элементом α задан порядок $\preccurlyeq$, индуцированный $(n+1)$-элементным КИЦП S.

Справедливость импликации 1) следует из леммы 2.

Установим истинность импликации 2). Рассмотрим произвольные элементы $k, l \in \mathbb{N}_n$ с условием $k \leqslant l$. Если $k = l$, то утверждение леммы очевидно.

Пусть $k < l \leqslant n$, тогда существует $\delta \in \mathbb{N}_n$, $0 < \delta < n$, что $k + \delta = l$. Предположим, что $l \preccurlyeq k$, тогда $\alpha^l + \alpha^k = \alpha^k$. Имеем $\alpha^{k+\delta} + \alpha^k = \alpha^k$ или, по лемме 1, $\alpha^\delta + 1 = 1$, следовательно, $\alpha^\delta = 1$. Значит, $\delta = 0$, что противоречит выбору δ. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

3. Свойства верхнего конуса единицы КИЦП с коммутативным сложением

Рассмотрим произвольное КИЦП S с коммутативным сложением. Обозначим через I множество всех компонент кортежа (4) КИЦП S:

$$I = \big\{p_i : i \in \{0, 1, \ldots, n\}\big\}, \tag{5}$$

Множество $I \subseteq \mathbb{N}_n$ является множеством показателей элементов верхнего конуса $\{\alpha^0\}^\triangle$ единицы α^0 КИЦП S.

Лемма 4. *Множество I, заданное правилом (5) для некоторого КИЦП S, является множеством показателей элементов S, выдерживающих прибавление единицы.*

$$I = \big\{k \in \{0, 1, \dots, n\} : k = p_k\big\}.$$

Действительно, $\alpha^{p_i} = 1 + \alpha^i = 1 + (1 + \alpha^i) = 1 + \alpha^{p_i}$ для любого $i \in \mathbb{N}_n$. Обратная импликация следует из определения (4) элемента p_k.

Лемма 5. *Для любых элементов a и b и идеала I полукольца $\mathbb{N}_n$, ассоциированного с КИЦП S, справедливо свойство:*

$$a \preccurlyeq b \Longleftrightarrow b = a + j, \ \textit{для некоторого } j \in I. \tag{6}$$

Доказательство. Для любых двух элементов a и b полукольца $\mathbb{N}_n$, ассоциированного с КИЦП S, отношение $a \preccurlyeq b$ по определению (1) равносильно отношению $\alpha^a \leqslant \alpha^b$, что, в свою очередь, по (2) и лемме 3, равносильно $\alpha^b = \alpha^a + \alpha^b = \alpha^a(1 + \alpha^c) = \alpha^{a+p_c}$, где $b = a + c$. При этом $j = p_c \in I$. Иными словами $b = a + j$.

Обратно, пусть $b = a + j$ и $j \in I$, тогда $j = p_j$ по лемме 4 и $\alpha^b = \alpha^a(1 + \alpha^j) = \alpha^a + \alpha^{(a+j)} = \alpha^a + \alpha^b$, что равносильно $a \preccurlyeq b$.

Через I_k обозначим множество показателей элементов верхнего конуса $\{\alpha^k\}^\triangle$ МИКП S. Ясно, что

$$I_k = I + k.$$

Предложение 1. *Для любого КИЦП S множество показателей I элементов кортежа (4) является идеалом полукольца $\mathbb{N}_n$.*

Доказательство. Пусть конечное идемпотентное циклическое полукольцо S представлено кортежем (4). Покажем, что множество I, заданное правилом (5), выдерживает умножение на произвольный элемент из $\mathbb{N}_n$. Иными словами, установим свойство $p_{tp_i} = tp_i$ для любых $p_i \in I$, $t \in \mathbb{N}_n$.

При $tp_i \geqslant n$ имеем $1 + \alpha^n = \alpha^n$ и $p_{tp_i} = p_n = n = tp_i$.

Проверим случай $tp_i < n$. В силу идемпотентности полукольца S для $t = 0$ имеем $p_0 = 0$. Предположим, что $\alpha^{(t-1)p_i} = 1 + \alpha^{(t-1)p_i}$. Имеем

$$\begin{gathered}\alpha^{tp_i} = \alpha^{p_i}\alpha^{(t-1)p_i} = (1 + \alpha^{p_i})(1 + \alpha^{(t-1)p_i}) = \\ = 1 + \alpha^{p_i} + \alpha^{(t-1)p_i}(1 + \alpha^{p_i}) = 1 + \alpha^{p_i} + \alpha^{tp_i} = \\ = 1 + \alpha^{p_i}(1 + \alpha^{(t-1)p_i}) = 1 + \alpha^{tp_i}.\end{gathered}$$

Итак, утверждение верно для всевозможных $p_i \in I$ и для каждого целого неотрицательного числа t, что $tp_i < n$.

Покажем теперь замкнутость множества I относительно сложения. Возьмем $p_i, p_j \in \mathbb{N}_n$. При $p_i + p_j \geqslant n$ свойство $p_{p_i+p_j} = p_i + p_j$ выполняется. Пусть $p_i + p - j < n$. По свойству (4) имеют место равенства $1 + \alpha^{p_i} = \alpha^{p_i}$ и $1 + \alpha^{p_j} = \alpha^{p_j}$. Перемножив их, получим

$$\alpha^{p_i+p_j} = (1 + \alpha^{p_i})(1 + \alpha^{p_j}) = 1 + \alpha^{p_j} + \alpha^{p_i}(1 + \alpha^{p_j}) =$$
$$= 1 + \alpha^{p_j} + \alpha^{p_i+p_i} = 1 + \alpha^{p_j}(1 + \alpha^{p_i}) = 1 + \alpha^{p_i+p_j}.$$

Иными словами, $p_{p_i+p_j} = p_i + p_j$.

Таким образом, множество $I = \{p_i : i \in \{0, 1, \ldots, n\}\}$ является идеалом полукольца $\mathbb{N}_n = \langle \{0, 1, \ldots, n\}, +_n, \cdot_n \rangle$.

Идеал I конечен и, значит, порожден конечным числом элементов.

Базисом идеала I полукольца $\mathbb{N}_n$ будем называть множество $G = \{g_1, \ldots, g_l\}$, такое, что каждый элемент $b \in I$ линейно выражается через элементы $g_1, \ldots, g_l$:

$$a = \sum_{i=1}^{n} (k_i \cdot g_i), \qquad k_1, \ldots, k_l \in \mathbb{N}_n,$$

и никакой элемент множества G нельзя представить в виде комбинации остальных элементов G с коэфициентами из $\mathbb{N}_n$.

Построение базиса идеала I сводится к последовательному выбору наименьшего элемента $i_j \in I$, не представимого в виде комбинации $i_1, \ldots, i_{j-1}$. Ясно, что базис идеала I определен однозначно.

Заметим, что имеет место следующее предложение:

Предложение 2. [3, теорема 3] *Кортеж* (4) $(n+1)$*-элементного КИЦП* S *однозначно восстанавливается по множеству* G *базисных элементов идеала его компонентов.*

Будем говорить, что $(n+1)$-элементное КИЦП S *задано базисом* G, если G — базис множества элементов кортежа (4) полукольца S.

Аналогично идеалам полукольца натуральных чисел, каждый идеал J полукольца $\mathbb{N}_n$ является конечно порожденным [11] и имеет однозначно определенный базис, количество элементов которого не превосходит наименьшего элемента J.

4. Число элементов КИЦП с коммутативным сложением

Этот параграф посвящен специфическим свойствам идеалов полукольца $\mathbb{N}_n$, порожденных базисом G, позволяющих выяснить существование и оценить число элементов конечного идемпотентного циклического полукольца, заданного базисом G.

Лемма 6. *Если элемент $p_j \neq n$ идеала $I \subseteq \mathbb{N}_n$ элементов кортежа* (4) *КИЦП S с базисом $G = \{g_1, \ldots, g_l\}$ представлен в виде*

$$p_j = \sum_{i=1}^{l} c_i g_i = k + \sum_{i=1}^{l} d_j g_j, \qquad c_i, d_i \in \mathbb{N}_n,$$

то $\min\{c_i, d_i\} = 0$ *для каждого* $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $p_j \in I$, такой, что $p_j \neq n$. Так как $\alpha^{p_j} = 1 + \alpha^j$ в полукольце S, то $p_j = \sup\{0, j\}$ в верхней полурешетке $\{\mathbb{N}_n, \preccurlyeq\rangle$. Следовательно p_j — наименьший элемент множества $I \cap I_j$.

Пусть

$$p_j = \sum_{i=1}^{l} c_i g_i = j + \sum_{i=1}^{l} d_i g_j.$$

Предположим, что $\mu = \min\{c_{i_0} d_{i_0}\} \neq 0$ для некоторого индекса i_0. Тогда

$$\delta(p_j, \mu) = \sum_{i \neq i_0} c_i g_i + \delta(c_{i_0}, \mu) g_{i_0} = j + \sum_{i \neq i_0} d_i g_i + \delta(c_{i_0}, \mu) g_{i_0}.$$

Иными словами, $\delta(p_j, \mu) \in I \cap I_j$.

Так как $\mu \neq 0$, то $\delta(p_j, \mu) < p_j$. Значит, по лемме 3, $\delta(p_j, \mu) \preccurlyeq p_j$ или $\delta(p_j, \mu)$ и p_j несравнимы, что невозможно, так как p_j — наименьший в $I \cap I_j$.

Таким образом, для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ выполняется свойство $\min\{c_i, d_i\} = 0$.

Предложение 3. *Каждое упорядоченное множество $\langle I_k, \preccurlyeq\rangle$ относительно порядка $\preccurlyeq$, индуцированного КИЦП S по правилу* (2), *является решеткой с наименьшим элементом k и наибольшим — n. Атомами решетки $\langle I_k, \preccurlyeq\rangle$ являются в точности элементы вида $k + g_i$ для всевозможных базисных элементов g_i идеала I.*

Доказательство. Так как КИЦП S является верхней полурешеткой относительно порядка $\leqslant$, заданного правилом (1), то верхний конус $\{\alpha^k\}^{\triangle}$ любого её элемента α^k является решеткой с наименьшим элементом α^k и наибольшим α^n.

В силу изоморфизма (3) достаточно показать, что атомами верхнего конуса $\{\alpha^k\}^{\triangle}$ КИЦП S являются элементы α^{g_k} для всех базисных элементов $g_k \in I$.

Пусть g — образующий идеала I, тогда $1 + \alpha^g = \alpha^g$. Предположим, что нашелся элемент g', такой, что $\alpha^g > \alpha^{g'} > 1$, тогда $\alpha^{g'} + \alpha^g = \alpha^g$. Следовательно, $1 + \alpha^{g-g'} = \alpha^{g-g'}$ и $g - g' \in I$. Так как $\alpha^{g'} > 1$, то

$1+\alpha^{g'}=\alpha^{g'}$ и $g'\in I$. Значит, элемент $g=g'+(g-g')$ представим в виде комбинации элементов из I и, следовательно, не является образующим. Полученное противоречие доказывает, что α^g непосредственно больше $1=\alpha^0$, т. е. является атомом решетки $\{\alpha^0\}^{\triangle}$.

Ясно, что решетка I_k изоморфна I посредством отображения $f\colon I\to I_k$, $f(x)=x+k$. Следовательно, ее наименьшим элементом является k, а атомами — всевозможные элементы $g+k$, $g\in G$.

Следствием предложения 3 является следующее предложение, характеризующее вид базисных элементов идеала показателей элементов верхнего конуса $\{\alpha^0\}^{\triangle}$ КИЦП S.

Предложение 4. *Пусть I — множество показателей элементов кортежа* (4) *КИЦП S и $G=\{g_1,\ldots,g_k\}$ — базис I. Тогда все попарные разности элементов множества G различны.*

Доказательство. Пусть нашлись базисные элементы g_{i_1}, g_{i_2}, g_{i_3}, $g_{i_4}\in G$ и целое неотрицательное число Δ, такие, что $g_{i_1}+\Delta=g_{i_2}$, $g_{i_3}+\Delta=g_{i_4}$.

1) Рассмотрим случай, когда $g_{i_2}\leqslant g_{i_3}$. Тогда существует неотрицательное целое число l, что $g_{i_3}=g_{i_2}+l$.

В КИЦП S $\alpha^{g_{i_1}}=\alpha^{g_{i_1}}+\alpha^0$, следовательно $\alpha^{g_{i_3}}=\alpha^{g_{i_1}+l+\Delta}=$ $=\alpha^{g_{i_1}+l+\Delta}+\alpha^{l+\Delta}$. Иными словами $\alpha^{g_{i_3}}>\alpha^{l+\Delta}$. В то же время $\alpha^{g_{i_3}}>\alpha^0$. Значит, $\alpha^{g_{i_3}}\geqslant\alpha^{p(l+\Delta)}$. Аналогично $\alpha^{g_{i_4}}\geqslant\alpha^{p(l+\Delta)}$. Так как $\alpha^{g_{i_3}}$ и $\alpha^{g_{i_4}}$ несравнимы, то $\alpha^{g_{i_3}}>\alpha^{p(l+\Delta)}$ и $\alpha^{g_{i_4}}>\alpha^{p(l+\Delta)}$, что противоречит атомарности элементов $\alpha^{g_{i_3}}$ и $\alpha^{g_{i_4}}$.

2) Если $g_{i_2}\geqslant g_{i_3}$, то существует неотрицательное целое число l, что $g_{i_2}=g_{i_3}+l$. При этом $g_{i_2}=g_{i_1}+\Delta$.

Если $g_{i_1}<g_{i_3}$, то $g_{i_3}=g_{i_1}+\Delta'$ и $g_{i_4}=g_{i_2}+\Delta'$, где $\Delta'+l=\Delta$. Дальнейшие рассуждения аналогичны случаю 1.

Лемма 7. *Для любых подмножеств A,B множества целых неотрицательных чисел и произвольного целого неотрицательного числа k справедливо равенство $(k+A)\cap(k+B)=k+(A\cap B)$.*

Действительно, $(k+A)\cap(k+B)\supseteq k+(A\cap B)$. С другой стороны, $(k+A)\cap(k+B)=\{c=k+a=k+b : a\in A, b\in B\}$. В силу аддитивной сократимости полукольца целых неотрицательных чисел $a=b$ и, следовательно, $(k+A)\cap(k+B)\subseteq k+(A\cap B)$.

Теорема 1. *Пусть I — идеал полукольца $\mathbb{N}_n$, порожденный базисом $G=\{g_1,g_2,\ldots,g_l\}$, и на множестве $\mathbb{N}_n$ определен порядок $\preccurlyeq$ свойством* (6)*:*

$$b\preccurlyeq c\Longleftrightarrow c=b+j,\ \text{для некоторого } j\in I.$$

Тогда следующие условия равносильны:

1) существует единственное $(n+1)$-элементное КИЦП S, заданное *кортежем* (4)*:*

$$(p_0, p_1, \ldots, p_n), \qquad 1+\alpha^i = \alpha^{p_i}, \qquad p_i \in I;$$

2) $\mathbb{N}_n$ *является верхней полурешеткой относительно* $\preccurlyeq$*;*
3) идеал I *является решеткой относительно порядка* $\preccurlyeq$*;*
4) для каждого элемента k *полукольца* $\mathbb{N}_n$ *найдется элемент* k'*, такой, что* $I \cap I_k = I_{k'}$*;*
5) для каждого элемента $k < \min G$ *полукольца* $\mathbb{N}_n$ *найдется элемент* k'*, такой, что* $I \cap I_k = I_{k'}$*.*

Доказательство. Равносильность 1) $\Longleftrightarrow$ 2) следует из порядкового изоморфизма (3).

2) $\Longrightarrow$ 3). Идеал I полукольца $\mathbb{N}_n$ с порядком $\preccurlyeq$ является конечной верхней полурешеткой с наименьшим элементом 0, следовательно, I — решетка.

Для проверки импликации 3) $\Longrightarrow$ 4) достаточно взять $k' = \sup\{0, k\}$. Импликация 4) $\Longrightarrow$ 5) очевидна.

5) $\Longrightarrow$ 2). Пусть I — идеал полукольца $\mathbb{N}_n$ с порядком $\preccurlyeq$. Обозначим наименьший образующий элемент идеала I через $m = \min G$.

Заметим, что $k' = \min I_{k'}$ и, следовательно, для всех $k < m$ $k' = \min(I \cap I_k)$. Ясно, что $I \cap I_n = I_n$.

Для произвольного элемента $t \in \mathbb{N}$ введем следующие обозначения: $A_t = I \cap I_t$ и $s_t = \min A_t$ — наименьший элемент множества A_t относительно обычного порядка $\leqslant$ целых неотрицательных чисел.

Покажем, что $A_t = I_{t'}$ для некоторого $t' \in \mathbb{N}_n$. Если $A_t = \{n\}$, то утверждение очевидно. Поэтому, пусть A_t содержит элемент, меньший n. Ясно, что в этом случае $t < n$.

Для доказательства существования t', удовлетворяющего равенству $A_t = I_{t'}$ обозначим $t_0 = t$ и рассмотрим следующий итерационный алгоритм по параметру i:

Элемент t_i представим в виде $t_i = q_i m + k_i$, где $k < m$.

Тогда $t_i \succcurlyeq k_i$ и $I_{t_i} \subseteq I_{k_i}$ как верхние конусы элементов t_i и k_i соответственно. Имеем $I_{t_i} \cap I_{k_i} = I_{k_i}$ и

$$I \cap I_{t_i} = I \cap I_{k_i} \cap I_{t_i} = I_{k'_i} \cap I_{t_i}$$

Если $t_i = k'_i$, то $A_{t_i} = I_{k'_i}$ и алгоритм окончен, иначе рассмотрим

$$a_i = \max\{k'_i, t_i\}, b_i = \min\{k'_i, t_i\}$$

относительно обычного порядка $\leqslant$ целых неотрицательных чисел и обозначим $t_{i+1} = a_i - b_i > 0$.

В силу леммы 7

$$A_{t_i} = I \cap I_{t_i} = I_{a_i} \cap I_{b_i} = b_i + (I \cap I_{t_{i+1}}) = b_i + A_{t_{i+1}}.$$

При этом $s_{t_i} > s_{t_{i+1}}$.

Если $t_{i+1} < m$, то $A_{t_{i+1}} = I_{t'_{i+1}}$ и, значит,

$$A_{t_i} = b_i + I_{t_{i+1'}} = I_{b_i + t'_{i+1}}.$$

В противном случае $t_{i+1} \geqslant m$ и мы можем повторить рассуждения для t_{i+1}. В результате получим:

$$A_{t_i} = b_0 + b_1 + A_{t_{i+2}}, \qquad s_{t_i} > s_{t_{i+1}} > s_{t_{i+2}}.$$

Продолжая итерации описанного алгоритма мы будем получать убывающую последовательность S_i элементов конечного множества $\mathbb{N}_n$. Следовательно, на некотором шаге j мы получим $t_j = k'_j$ и

$$t' = b_0 + b_1 + \ldots + b_{j-1} + k'_j$$

либо $t_j < m$, и

$$t' = b_0 + b_1 + \ldots + b_{j-1} + b_j + k'_{j+1}.$$

Итак, равенство $I \cap I_t = I_{t'}$ установлено для произвольного $t \in \mathbb{N}_n$ и подобранного t'.

Теперь возьмем произвольные элементы a и b полукольца $\mathbb{N}_n$ и рассмотрим верхний конус $\{a, b\}^{\triangle}$ относительно порядка $\preccurlyeq$, заданного (6). Допустим $b = a + k$, тогда с учетом леммы 7

$$\{a, b\}^{\triangle} = (a + I) \cap (b + I) = (a + I) \cap (a + k + I) = \\ = a + (I \cap I_k) = a + I_{k'} = I_{a+k'} = \{a + k'\}^{\triangle}.$$

Итак, $\sup\{a, b\} = \min\{a, b\}^{\triangle} = a + k'$, иными словами $\mathbb{N}_n$ — верхняя полурешетка. Теорема доказана.

Непосредственно из теоремы вытекает следствие:

Следствие 1. *Пусть I — идеал полукольца $\mathbb{N}_n$, порожденный базисом $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_l\}$, и на множестве $\mathbb{N}_n$ $(n + 1)$-элементное КИЦП S существует тогда и только тогда, когда выполняется двойное неравенство*

$$M < n \leqslant N, \qquad \text{где } N = \min \bigcup_{j=1}^{m-1} \big((J \cap J_j) \setminus J_{p_j}\big).$$

Доказанная теорема позволяет сформулировать алгоритм построения КИЦП по множеству базисных элементов $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$:

Таблица

Число коммутативных идемпотентных циклических полуколец

$\|G\|$	Количество элементов в полукольце S													
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	-	-	-	1	1	4	5	10	11	17	21	30	32	43
3	-	-	-	-	-	-	-	2	2	6	6	17	17	32
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2
Число полуколец	1	2	3	5	6	10	12	20	22	33	38	59	62	91

1. По следствию 1 определить n, для которых существует $(n+1)$–элементное КИЦП S, заданное множеством G.

2. Вычислить элементы p_i, $i = \overline{0, n}$ кортежа (4), пользуясь теоремой 1 и леммой 4:
$$p_i = \min(J \cap J_i), \qquad p_{p_i} = p_i.$$

3. По кортежу (4) восстановить операцию сложения.

С помощью предложенного алгоритма в системе компьютерной алгебры SageMath найдены все КИЦП с малым числом элементов. Их количество в зависимости от числа базисных элементов идеала I приведено в таблице.

5. Конечные идемпотентные циклические полукольца с коммутативным сложением, заданные двупорожденными идеалами

Лемма 8. *Для произвольных различных взаимно простых натуральных чисел g_1 и g_2, и каждого натурального числа $k \leqslant \min\{g_1, g_2\}$ существует единственная пара целых чисел v_1 и v_2, таких, что*

$$k = v_1 g_1 + v_2 g_2, \quad |v_1| \leqslant \frac{g_2}{2}, \quad |v_2| \leqslant \frac{g_1}{2}, \tag{7}$$

причем хотя бы одно из неравенств строгое.

Доказательство. Пусть НОД$(g_1, g_2) = 1$. Для них найдется единственная пара (см. [10, предложение 61]) целых чисел u_1 и u_2, что

$$1 = u_1 g_1 + u_2 g_2, \quad |u_1| \leqslant \frac{g_2}{2}, \quad |u_2| \leqslant \frac{g_1}{2}. \tag{8}$$

Пусть $u_1 > 0$ и $u_2 < 0$. Если это не так, то изменим нумерацию чисел g_1 и g_2 и соответствующих коэффициентов u_1, u_2.

Возьмем произвольное натуральное число $k < \min\{g_1, g_2\}$, рассмотрим $k = ku_1g_1 + ku_2g_2$ и представим $ku_1 = q_1g_2 + r_1$ и $-ku_2 = q_2g_1 + r_2$. Ясно, что $r_1 \neq 0$ и $r_2 \neq 0$. Имеем

$$k = (q_1 - q_2)g_1g_2 + r_1g_1 - r_2g_2.$$

Так как $k < \min\{g_1, g_2\}$, то $k + r_2g_2 - r_1g_1 < (r_2 + 1)g_2 - r_1g_1 < g_1g_2$. Следовательно, $q_1 - q_2 = 0$. Иными словами, нашлись коэффициенты $r_1 < g_2$,$r_2 < g_1$, что

$$k = r_1g_1 - r_2g_2.$$

Покажем, что либо $r_1 \leqslant \frac{g_2}{2}$ и $r_2 \leqslant \frac{g_1}{2}$, либо $r_1 \geqslant \frac{g_2}{2}$ и $r_2 \geqslant \frac{g_1}{2}$.

Действительно, если $r_1 > \frac{g_2}{2}$, $r_2 < \frac{g_1}{2}$, то $2r_1 = g_2 + t_1$, $2r_2 = g_1 - t_2$ для некоторых натуральных t_1 и t_2. Значит,

$$2k = 2r_1g_1 - 2r_2g_2 = g_1g_2 + g_1t_1 - g_1g_2 + g_2t_2 = g_1t_1 + g_2t_2 > g_1 + g_2.$$

Однако $2k = 2\min\{g_1, g_2\} < g_1 + g_2$.

Аналогично, если $r_1 < \frac{g_2}{2}$, $r_2 > \frac{g_1}{2}$, то для некоторых натуральных чисел t_1, t_2 имеем $2r_1 = g_2 - t_1$, $2r_2 = g_1 + t_2$,

$$2k = g_1g_2 - g_1t_1 - g_1g_2 - g_2t_2 = -(g_1t_1 + g_2t_2) < 0,$$

что невозможно.

Итак, если $r_1 \leqslant \frac{g_2}{2}$, $r_2 \leqslant \frac{g_1}{2}$, то $v_1 = r_1$ и $v_2 = -r_2$. Если же $r_1 \geqslant \frac{g_2}{2}$, $r_2 \geqslant \frac{g_1}{2}$, то $v_1 = g_1 - r_2$ и $v_2 = r_1 - g_2$. При этом хотя бы одно из неравенств (7) строгое, так как $k \neq 0$.

Теперь установим единственность коэффициентов v_1 и v_2. Ясно, что если $k = v_1'g_1 + v_2'g_2$ для $v_1' \neq v_1$, $v_2' \neq v_2$, то $(v_1' - v_1)g_1 + (v_2' - v_2)g_2 = 0$ и $v_1' = v_1 + q_1g_2$, $v_2' = v_2 + q_2g_1$ для некоторых целых ненулевых q_1, q_2. Следовательно, $|v_1'| \geqslant \frac{g_2}{2}$ и $|v_2| \geqslant \frac{g_1}{2}$, причем хотя бы одно из неравенств строгое.

Лемма доказана.

Предложение 5. *Пусть I идеал показателей элементов верхнего конуса $\{\alpha^0\}^\triangle$ КИЦП S, заданный условием* (5), *и $G = \{g_1, g_2\}$ — его базис, причем* НОД$(g_1, g_2) = 1$. *Тогда для каждого элемента $k < \min\{g_1, g_2\}$ полукольца $\mathbb{N}_n$ элемент $p_k = ug_1$, где u — положительный коэффициент Безу со свойством $0 \leqslant u \leqslant \frac{g_2}{2}$.*

Действительно, по лемме 6 элемент p_k имеет вид $p_k = u_1g_1 = 1 + u_2g_2$ для некоторого упорядочения множества $G = \{g_1, g_2\}$. Иными словами, числа u_1 и $-u_2$ — коэффициенты Безу.

Лемма 9. *Пусть КИЦП S задано кортежем (4). Если J — идеал натуральных чисел с базисом $G = \{g_1, g_2\}$, НОД$(g_1, g_2) = 1$, то для каждого натурального $k \leqslant \min\{g_1, g_2\}$ наименьшим элементом множества $(J \cap J_k) \setminus J_{v_k^{(+)} g_1}$ является $\left(g_{\sigma_k(1)} + v_k^{(-)}\right) g_{\sigma_k(2)}$, где $v_k^{(+)}$ — положительный, а $v_k^{(-)}$ — отрицательный коэффициенты в представлении k формулой (7), σ_k — соответствующая перестановка на множестве G.*

Доказательство. Пусть g_1, g_2 взаимно простые базисные элементы двупорожденного идеала J. По лемме 8, для каждого $k \leqslant \min\{g_1, g_2\}$ найдется единственная пара целых чисел v_1 и v_2, удовлетворяющих условию (7). Причем хотя бы одно из неравенств $|v_1| \leqslant \frac{g_2}{2}$ или $|v_2| \leqslant \frac{g_1}{2}$ строгое.

Будем считать, что $v_1 > 0$, $v_2 < 0$, и обозначим

$$u_1 = (g_2 - v_1) > 0, \quad u_2 = (g_1 + v_2) > 0.$$

Имеем $k = u_2 g_2 - u_1 g_1$. Ясно, что $\frac{g_2}{2} \leqslant u_1 < g_2$, $\frac{g_1}{2} \leqslant u_2 < g_1$.

Обозначим $z_0 = v_1 g_1$.

Рассмотрим элемент $z \in J \cap J_k$, удовлетворяющий свойству

$$z = u_2 g_2 = k + u_1 g_1. \tag{9}$$

Заметим, что $z_0 \leqslant \frac{g_1 g_2}{2} \leqslant z$, причем хотя бы одно из двух неравенств строгое.

Докажем, что $z \notin J_{z_0}$. Предположим противное. Тогда для некоторых целых неотрицательных чисел c_1, c_2

$$z = c_1 g_1 + c_2 g_2 + z_0.$$

Подставляя в данное равенство вместо z_0 и z их линейные представления в базисе G, получаем

$$u_2 g_2 = (c_1 + v_1) g_1 + c_2 g_2.$$

Значит, $u_2 > c_2$ и $(u_2 - c_2) g_2 = (c_1 + u_1) g_1$, а так как g_1 и g_2 взаимно просты, то $(u_2 - c_2)$ делится на g_1. Имеем $0 < u_2 - c_2 < u_2 < g_1$, что невозможно. Следовательно, $z \notin (J \cap J_k) \setminus J_{z_0}$.

Покажем, что z — наименьший элемент множества $(J \cap J_k) \setminus J_{z_0}$.

Рассмотрим произвольный элемент $z^* \in (J \cap J_k) \setminus J_{z_0}$. Тогда для некоторых $d_1, d_2 \in \mathbb{N}_n$ выполняется равенство $z^* = d_1 g_1 + d_2 g_2$. Используя равенства (9), получаем

$$z_0 < z^* < z,$$
$$g_1 v_1 < d_1 g_1 + d_2 g_2 < u_2 g_2.$$

Заметим, что $d_2 < u_2$ и $d_1 < v_1$. Так как если $d_2 \geqslant u_2$, то $z^* = d_1g_1 + (d_2 - u_2)g_2 + z \in J_{z_0}$, что невозможно в силу выбора z^*. Аналогичное противоречие получаем в предположении $d_1 \geqslant u_1$: $z^* = (d_1 - v_1)g_1 + d_2g_2 + z_0 \in J_{z_0}$.

Так как $z^* \in J_k$, то найдутся целые неотрицательные числа e_1 и e_2, такие, что $z^* = e_1g_1 + e_2g_2 + k$.

Пусть $l_1 = \min\{d_1, e_1\}$, $l_2 = \min\{d_2, e_2\}$. Рассмотрим элемент

$$z' = (d_1 - l_1)g_1 + (d_2 - l_2)g = (e_1 - l_1)g_1 + (e_2 - l_2)g_2 + 1 \in J \cap J_1.$$

Ясно, что $z^* = z' + l_1g_1 + l_2g_2$. Иными словами, $z' \leqslant z^*$.

Возможны два случая: $(d_1 - l_1) = 0$ или $(e_1 - l_1) = 0$.

Рассмотрим случай $(d_1 - l_1) = 0$, тогда $y_1 = e_1 - l_1 \neq 0$ и $y_2 = d_2 - l_2 \neq 0$. Значит, $(e_2 - l_2)g_2 = 0$ и $z' = y_2g_2 = y_1g_1 + k$.

Имеем $y_2g_2 - y_1g_1 = k$, $y_2 < g_1$ и $y_1 < g_2$. Таким образом, y_2 и $-y_1$ — коэффициенты Безу в линейном представлении НОД чисел g_1 и g_2. Поэтому в силу (9) $z' = z_0$ или $z' = z$. Если $z' = z_0$, то $z^* = z_0 + l_1g_1 + l_2g_2 \in J_{z_0}$, что невозможно. Если же $z' = z$, то $z^* \geqslant z$ и в силу произвольности выбора $z^* \in (J \cap J_k) \setminus J_{z_0}$ число z — наименьший элемент множества $(J \cap J_k) \setminus J_{z_0}$.

Случай $(e_1 - l_1) = 0$ аналогичен рассмотренному. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть g_1 и g_2 — произвольные взаимно простые натуральные числа, большие либо равные 3. Для каждого n, удовлетворяющего неравенству*

$$M < n \leqslant \min\left\{(g_{\sigma_k(1)} + v_k^{(-)})g_{\sigma_k(2)} : k \in \mathbb{N},\ k < m\right\}, \tag{10}$$

где $M = \max\{g_1, g_2\}$, $m = \min\{g_1, g_2\}$, $v_k^{(-)}$ — отрицательный коэффициент в представлении k формулой (7), σ_k — соответствующая перестановка на множестве G, существует единственное $(n+1)$–элементное КИЦП S с множеством показателей элементов верхнего конуса $\{\alpha^0\}^{\triangle}$, порожденным базисом $G = \{g_1, g_2\}$.

Доказательство. Пусть g_1, g_2 взаимно простые натуральные числа, большие либо равные 3. Для каждого $k < \min\{g_1, g_2\}$, по лемме 8, существует единственная пара целых чисел $v_k^{(+)}$ и $v_k^{(-)}$, таких, что $k = v_k^{(+)}g_1 - v_k^{(-)}g_2$, где $v_k^{(+)} \leqslant \frac{g_2}{2}$, $v_k^{(-)} \leqslant \frac{g_1}{2}$.

Рассмотрим число n, удовлетворяющее условию (10). По лемме 9 для каждого натурального $k \leqslant \min\{g_1, g_2\}$ множество $(J \cap J_k) \setminus J_{v_k^{(+)}g_1}$ пусто. Так как $k' = v_k^{(+)}g_1 \in J \cap J_k$, справедливо равенство $J \cap J_k = J_{k'}$, и, следовательно, по теореме 1 существует единственное $(n+1)$-элементное КИЦП S с множеством показателей элементов верхнего конуса $\{\alpha^0\}^{\triangle}$.

Укажем направления дальнейших исследований конечных идемпотентных циклических полуколец.

1. Определение свойств базиса G идеала I полукольца $\mathbb{N}_n$, необходимых и достаточных для существования $(n+1)$-элементного КИЦП, заданного базисом G.

2. Улучшение алгоритма поиска конечных идемпотентных циклических полуколец с заданным количеством элементов.

3. Алгебраическое описание строения конечных идемпотентных циклических полуколец, заданных k-порожденными идеалами для $k \geqslant 3$.

Список литературы

1. **Бестужев А. С.** Конечные идемпотентные циклические полукольца // *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2011. Вып. 13. С. 71–78.*

2. **Бестужев А. С. Вечтомов Е. М.** Циклические полукольца с коммутативным сложением // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2015. Вып. 20. С. 8–39.*

3. **Ведерникова А. В., Чупраков Д. В.** О представлении конечных идемпотентных циклических полуколец кортежами целых чисел // *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2017. Вып. 19. С. 70–76.*

4. **Вечтомов Е. М.** Введение в полукольца. Киров: ВГПУ, 2000. 44 с.

5. **Вечтомов Е. М., Лубягина (Орлова) И. В.** Циклические полукольца с идемпотентным некоммутативным сложением // *Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17. Вып. 1. С. 33–52.*

6. **Вечтомов Е. М., Орлова И. В.** Циклические полукольца с неидемпотентным некоммутативным сложением // *Фундаментальная и прикладная математика. 2015. Т. 20. № 6. С. 17–41.*

7. **Вечтомов Е. М.** Мультипликативно циклические полукольца // *Технологии продуктивного обучения математике: традиции и новации. Арзамас: Арзамасский филиал ННГУ, 2016. С. 130–140.*

8. **Вечтомов Е. М., Орлова И. В.** Идеалы и конгруэнции циклических полуколец // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер.1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 1(22). С. 29–40.*

9. **Лубягина И. В.** О циклических полукольцах с некоммутативным сложением // *Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского. Казань: Издательство Казанского математического общества, 2010. Т. 40. С. 212–215.*

10. **Ноден П., Китте К.** Алгебраическая алгоритмика с упражнениями и решениями. М.: Мир, 1999. 720 с.

11. **Чермных В. В., Николаева О. В.** Об идеалах полукольца натуральных чисел // *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2009. Вып. 11. С. 118–121.*

12. **Bestugev A. S., Vechtomov E. M.** Multiplicatively cyclic semirings // *XIII Международная научная конференция им. Академика М. Кравчука. Киев: Национальный технический университет Украины, 2010. С. 39.*

Summary

Chuprakov D. V., Vedernikova A. V. About structure of finite cyclic semirings with idempotent commutative addition

The paper deals with finite idempotent cyclic semirings with commutative addition. Authors present a criterion for existence of finite idempotent cyclic semirings with commutative addition, associated with ideal of nonnegative integers. They derive estimates of the cardinality of FIC-semiring. The article offers algorithms for calculation of cardinality of FIC-semiring by basis of associated ideal of nonnegative integers.

Keywords: semiring, cyclic semiring, monogenous semiring, idempotent, ideal, positive integer.

References

1. **Bestujev A. S.** Konechnye idempotentnye ciklicheskie polukol'ca (Finite Idempotent Cyclic Semirings), *Matekaticheskiy Vestnik Pedvuzov I Universitetov Volgo-Vyatskogo Regiona*, 2011, n. 13, pp. 71–78.

2. **Bestuzev A. S., Vechtomov E. M.** Ciklicheskie polukol'ca s kommutativnym slozheniem (Cyclic Semirings With Commutative Addition), *Bulletin of Syktyvkar State University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, vol. 1 (20), 2015, pp. 8–39.

3. **Vedernikova A. V., Chuprakov D. V.** O predstavlenii konechnyh idempotentnyh ciklicheskih polukolec kortezhami celyh chisel (About Representation of Finite Idempotent Cyclic Semirings by Tuples of Integers), *Mathematical Bulletin of Universities and Pedagogical Unyversities of Volgo-Vyatskiy Region*, 2017, n. 19, pp. 70–76.

4. **Vechtomov E. M.** *Vvedenie v polukol'ca* (Introduction to Semirings), Kirov: VGPU, 2000, 44 p.

5. **Vechtomov E. M., Lubyagina (Orlova) I. V.** Ciklicheskie polukol'ca s idempotentnym nekommutativnym slozheniem (Cyclic Semirings With Idempotent Noncommutative Addition), *Fundamentalnaya I Prikladnaya Matematika*, 2011/2012, vol. 17, n. 1, pp. 33–52.

6. **Vechtomov E. M., Orlova I. V.** Ciklicheskie polukol'ca s neidempotentnym nekommutativnym slozheniem (Cyclic Semirings With Nonidempotent Noncommutative Addition), *Fundamentalnaya I Prikladnaya Matematika*, 2015, vol. 20, n. 6, pp. 17–41.

7. **Vechtomov E. M.** Mul'tiplikativno ciklicheskie polukol'ca (Multiplicative Cyclic Semirings), *Technologies of Productive Learning of Mathematics: Traditions And Innovations*, Arzamas, 2016, pp. 130–140.

8. **Vechtomov E. M., Orlova I. V.** Idealy i kongruehncii ciklicheskih polukolec (Ideals and Congruences of Cyclic Semirings), *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, n. 1 (22), pp. 29–40.

9. **Lubyagina I. V.** O ciklicheskih polukol'cah s nekommutativnym slozheniem (About Cyclic Semirings With Noncommutative Addition), *Trudy Matematicheskogo Chentra Im. N. I. lobachevskogo*, Kazan, 2010, vol. 40, pp. 212–215.

10. **Naudin P., Quittè C.** *Algebraicheskaya algoritmika s uprazhneniyami i resheniyami* (Algorithmique Algèbrique Avec Exercices Corrigès), M.: Mir, 1999, 720 p.

11. **Chermnyh V. V., Nikolaeva O. V.** Ob idealah polukol'ca natural'nyh chisel (Amout Ideals of Semiring of Posivive Integers), *Mathematical Bulletin of Universities and Pedagogical Unyversities of Volgo-Vyatskiy Region*, 2009, n. 11, pp. 118–121.

12. **Bestugev A. S., Vechtomov E. M.** Multiplicatively Cyclic Semirings, *International Scientific Conference Named After Academician M. Kravchuk*, Kiev: National Technical University of Ukraine, 2010, p. 39.

Для цитирования: Чупраков Д. В., Ведерникова А. В. О структуре конечных циклических полуколец с идемпотентным коммутативным сложением // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2 (23). С. 92–109.*

For citation: Chuprakov D. V., Vedernikova A. V. About structure of finite cyclic semirings with idempotent commutative addition, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, 2 (23), pp. 92–109.

ВятГУ *Поступила 08.06.2017*