Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 2 (23). 2017

УДК 539.3

ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

А. В. Ермоленко, К. С. Осипов

Метод обобщенной реакции при расчете контактных задач со свободной границей требует большого количества итераций, на каждой из которых проводится много вычислений. Для ускорения расчетов в статье рассматривается распараллеливание одной контактной задачи с помощью технологии OpenMP на языке C++.
Ключевые слова: пластина, метод обобщенной реакции, контактная задача, параллельные вычисления.

1. Контактная задача со свободной границей

Рассмотрим контактное взаимодействие круглой шарнирно закрепленной пластины радиуса R и толщиной h с абсолютно жестким идеально гладким основанием. Считаем, что первоначально пластина расположена на расстоянии Δ от основания, на пластину действует осесимметричная нагрузка. Под действием нагрузки пластина прогибается, и со стороны основания на нее начинает действовать сила реакции опоры $r(\rho)$. Дополнительно предполагаем, что в зоне контакта пластина выстилается без зазоров. Требуется определить прогиб пластины w и возникающие контактные реакции $r(\rho)$.

Для решения поставленной задачи воспользуемся уравнениями типа Ка́рмана – Тимошенко (см. [3] при $b = 0, m_n = 0, h_\lambda^2 = 0$), которые в случае осесимметричности примут следующий вид:

$$D\Delta^2 w = q_n - h_\psi^2 \Delta q_n + (I - h_\psi^2 \Delta) L(\Phi, w),$$

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2 \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w),$$

© Ермоленко А. В., Осипов К. С., 2017.

$$\frac{1}{\rho}\frac{d(\rho\psi_\rho)}{d\rho}=-\frac{2(1+\nu)}{Eh}(q_n+L(\Phi,w)). \qquad (1)$$

Здесь w — прогиб, Φ — функция напряжения, $\psi_i, i=1,2$ — поперечные сдвиги; $h_\psi^2=\dfrac{h^2}{6(1-\nu)}$; $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жёсткость, q_n^+, q_n^- — нагрузки, действующие на верхнюю и нижнюю лицевые поверхности, $q_n=q_n^+-q_n^-$ — нормальная нагрузка; h — толщина пластины, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона; $\Delta=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\big(\rho\dfrac{d}{d\rho}\big)$ — оператор Лапласа, $L(\Phi,w)=\dfrac{1}{\rho}\big(\dfrac{d\Phi}{d\rho}\dfrac{dw}{d\rho}\big)$ — билинейная форма Ка́рмана, оператор Лапласа и билинейная форма Кармана приведены для осесимметричного случая.

При выводе уравнений (1) не используется геометрическая гипотеза Кирхгофа в части отказа от условия перехода нормали к недеформированной срединной поверхности в нормаль к деформированной поверхности, что приводит к возникновению поперечных сдвигов $\psi_i, i=1,2$ и параметра h_ψ^2. Что же касается условия об неизменяемости длины нормали, то оно принимается.

При этом изгибающий момент $M_{\rho\rho}$[1] принимаем в виде [3]

$$M_{\rho\rho}^{(1)}=-D(w''+\frac{\nu}{\rho}w'),\ M_{\rho\rho}^{(2)}=D(\psi_\rho'+\frac{\nu}{\rho}\psi_\rho),\ M_{\rho\rho}=M_{\rho\rho}^{(1)}+M_{\rho\rho}^{(2)}. \qquad (2)$$

Граничные условия шарнирного закрепления примем в виде

$$w(R)=0,\ w''(R)=0,\ \Phi(R)=0,\ \Phi'(R)=0. \qquad (3)$$

Кроме этого накладываем условия конечности w, Φ и их вторых производных в центре пластины.

Функции Грина имеют следующий вид:

$$G_w(\rho,\xi)=\frac{\xi}{4}[(\rho^2+\xi^2)\ln\frac{\rho}{\xi}+\xi^2-\rho^2]H(\rho-\xi)-$$

$$-\frac{\xi}{4}[(2R^2+\xi^2-\rho^2)\ln\frac{R}{\xi}-\frac{(R^2-\xi^2)}{2}-\frac{(R^2-\xi^2)\rho^2}{2R^2}],$$

$$G_\Phi(\rho,\xi)=\frac{\xi}{4}[(\rho^2+\xi^2)\ln\frac{\rho}{\xi}+\xi^2-\rho^2]H(\rho-\xi)-$$

$$-\frac{\xi}{4}[(2R^2+\xi^2-\rho^2)\ln\frac{R}{\xi}-\frac{3(R^2-\xi^2)}{2}+\frac{(R^2-\xi^2)\rho^2}{2R^2}].$$

[1]Остальные моменты равны нулю.

Здесь $H(\rho)$ — функция Хэвисайда.

Для решения краевой задачи воспользуемся методом обобщенной реакции [5], итерационная схема которого имеет вид

$$r_k = [r_{k-1} + \beta(w_{k-1} - \Delta)]_+, \beta > 0, \qquad (6)_1$$

$$w_k = \frac{1}{D}\int_0^l (q_n^+(\xi) - r_k(\xi) - h_\psi^2(q_n^+(\xi) - r_k(\xi))'')G(x,\xi)d\xi. \qquad (6)_2$$

Здесь $\phi_+ = \frac{1}{2}(\phi + |\phi|)$ — положительная срезка функции.

В качестве начального приближения полагаем

$$r_0 = 0,\ w_0 = \frac{1}{D}\int_0^l q_n^+(\xi)G(x,\xi)d\xi.$$

Если при этом $w_0 < \Delta$, то пластина не коснулась основания, и итерационную схему не проводим.

2. Применение технологии OpenMP к решению контактных задач

OpenMP [1] — технология разработки параллельных программ на языке C++ для систем с общей памятью. Для написания параллельной программы необходимо использовать набор директив компилятора и библиотечные функции. Принцип работы технологии: основной поток программы порождает дочерние потоки по мере необходимости, которую определяет программист. Разработка осуществляется путем вставки директив компилятора в те участки кода, которые необходимо распараллелить. Компилятор интерпретирует эти директивы и вставляет в соответствующие места программы библиотечные вызовы для распараллеливания участка кода.

Порядок использования технологии OpenMP:

- подключаем заголовочный файл *omp.h* при помощи команды *#include<omp.h>;*
- инициализируем командой *#pragma omp parallel {блок параллельного кода}*;
- в дальнейшем блок параллельного кода берется в операторные скобки.

При программировании итерационной схемы (6) использовалась технология OpenMP. Распараллеливание применялось к вычислению интегралов, производных и вычислению значений функций на сетке.

На рис. 1 в качестве примера приведен код, который вычисляет w_k по формуле $(6)_2$. По умолчанию, барьером для потоков в конструкции *for* является конец цикла. Все потоки по мере достижения конца цикла ожидают друг друга. И после того, как последний поток завершит свою работу, основная нить программы продолжает свою работу.

```
#pragma omp parallel
{
#pragma omp for private(tmp, tmp2)
        for (int i = 0; i < n + 1; i++) {
                tmp = 0;
                tmp2 = 0;
                for (int j = 1; j < n + 1; j++) {
                        tmp = tmp +
                        G[i][j]*(qn[j]*pow(R, 4.0)+Lpw[j]);
                }
                w[i] = ( hh/D)*tmp;
        }
}
```

Рис. 1. Пример распараллеливания цикла *for*

Отметим, что при использовании технологии OpenMP необходимо только указать блок параллельного кода без непосредственного программирования.

3. Результаты численного эксперимента

С использованием итерационной схемы (6) проводился численный эксперимент при различных физических и геометрических параметрах пластины. В качестве примера на рис. 2–3 приведены прогиб и контактные реакции для пластины со следующими параметрами:

$$q_n^+ = 50 \text{ кГ/см}^2,\ \nu = 0,3, E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кГ/см}^2,$$

$$R = 20 \text{ см}, h = 1 \text{ см}, \Delta = 0,6 \text{ см}.$$

По рис. 2 видно, что прогиб соответствует условию шарнирного закрепления, при этом в средней части пластины наблюдается выстилание. На рис. 3 показано, что реакции на границе зоны контакта имеют пиковые значения, а в средней части равняются действующей нагрузке, в работе [4] показано, что реакции являются квадратично суммируемыми функциями в случае использовании уточненной теории пластин.

Численный эксперимент подтвердил, что эффект противофазы, замеченный в работах [2, 4], имеет место и в случае контактных задач для круглой пластины и основания. Эффект заключается в том, что в областях экстремальных значений момента $M_{\rho\rho}^{(1)}$ момент $M_{\rho\rho}^{(2)}$ имеет противоположный знак, тем самым снижаются экстремальные значения совокупного момента $M_{\rho\rho}$.

Также следует отметить, что в случае использования технологии OpenMP быстродействие на компьютере с многоядерным процессором увеличивается на 30 – 40 %.

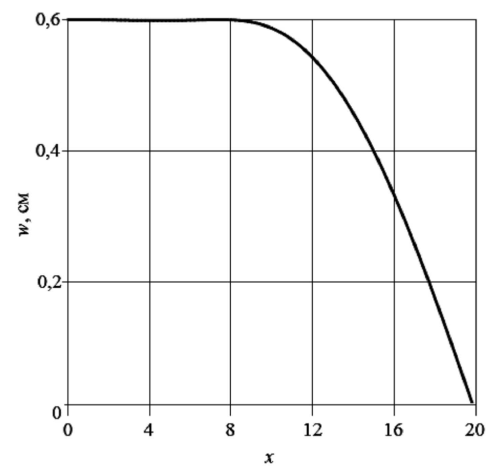

Рис. 2. Прогиб (w)

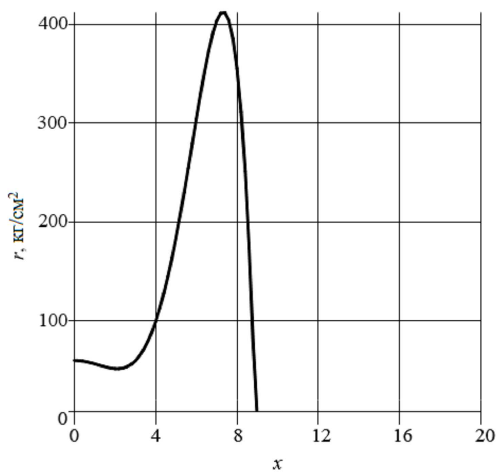

Рис. 3. Контактные реакции (r)

Список литературы

1. **Антонов А. С.** Параллельное программирование с использованием технологии OpenMP. М.: Изд-во МГУ, 2009. 77 с.

2. **Ермоленко А. В., Гинтнер А. Н.** Влияние поперечных сдвигов на понижение напряженного состояния пластины. Теория изгиба пластин типа Кармана без гипотез Кирхгофа // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Информатика. Вып. 1 (20). 2015. С. 91–96.*

3. **Ермоленко А. В.** Теория плоских пластин типа Кармана – Тимошенко – Нагди относительно произвольной базовой плоскости // *В мире научных открытий. Красноярск: НИЦ, 2011. №8.1 (20). С. 336–347.*

4. **Михайловский Е. И., Ермоленко А. В., Миронов В. В., Тулубенская Е. В.** Уточненные нелинейные уравнения в неклассических задачах механики оболочек. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского университета, 2009. 141 с.

5. **Михайловский Е. И., Тарасов В. Н.** О сходимости метода обобщенной реакции в контактных задачах со свободной границей // *РАН. ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 128–136.*

Summary

Yermolenko A. V., Osipov K. S. Parallel programming in contact problems with a free boundary

The method of generalized reaction requires a large number of iterations, on each of which a large number of calculations is carried out. To accelerate calculations, the article considers parallelizing a contact problem using the OpenMP technology in C ++.
Keywords: plate, method of generalized reaction, contact problem, parallel computing.

References

1. **Antonov A. S.** *Parallel'noe programmirovanie s ispol'zovaniem texnologii OpenMP* (Parallel Programming Using OpenMP Technology), Moscow.: Publishing house of MSU, 2009, 77 p.

2. **Yermolenko A. V., Gintner A. N.** Vliyanie poperechny'x sdvigov na ponizhenie napryazhennogo sostoyaniya plastiny (The effect of transverse shear on the lowering of the stressed state of the plate), *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2015, №1 (20), pp. 91–96.

3. **Yermolenko A. V.** Teoriya ploskix plastin tipa Karmana–Timoshenko–Nagdi otnositel'no proizvol'noj bazovoj ploskosti (The Karman–Timoshenko–Naghdi theory of plane plates relative to arbitrary base surface), *In the world of scientific discoveries*, Krasnoyarsk: SIS, 2011, № 8.1 (20), pp. 336–347.

4. **Mikhailovskii E. I., Yermolenko A. V., Mironov V. V., Tulubenskaya E. V.** *Utochnenny'e nelinejny'e uravneniya v neklassicheskix zadachax mexaniki obolochek* (Refined nonlinear equations in nonclassical problems of shell mechanics), Syktyvkar: Publishing house of the Syktyvkar university, 2009, 141 p.

5. **Mikhailovskii E. I., Tarasov V. N.** O sxodimosti metoda obobshhennoj reakcii v kontaktny'x zadachax so svobodnoj granicej (On the convergence of the generalized reaction method in contact problems with a free boundary, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1993, v. 57, №. 1, pp. 128–136.

Для цитирования: Ермоленко А. В., Осипов К. С. Параллельное программирование в контактных задачах со свободной границей // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2 (23). С. 85–91.*

For citation: Yermolenko A. V., Osipov K. S. Parallel programming in contact problems with a free boundary, *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, 2 (23), pp. 85–91.

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 29.05.2017*