МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 2 (23). 2017

УДК 514

ОПЫТ ОРГАНИЗАЦИИ УЧЕБНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Е. Н. Лубягина, Л. В. Тимшина

В статье предлагаются материалы, которые можно использовать для организации учебно-исследовательской деятельности студентов при изучении кривых второго порядка. Приводятся примеры использования среды GeoGebra.

Ключевые слова: исследовательская деятельность, кривые второго порядка, GeoGebra.

1. Введение

В современных условиях в обучение все активнее внедряется проектная деятельность, поощряется участие студентов в исследовательских конкурсах. Содержание математических дисциплин отлично подходит для приобщения студентов к элементам исследовательской деятельности, а постоянно развивающиеся системы компьютерной математики позволяют оптимизировать процесс исследования.

Исследовательская деятельность предполагает работу с первоисточниками, моделирование объектов и процессов, накопление и систематизацию данных, формулирование гипотез, проведение эксперимента (например, компьютерного), интеграцию знаний из различных учебных дисциплин, приложение изученных методов к исследованию различных объектов, постановку новых задач на базе решенной. Таким образом, научное познание характеризуется многоэтапностью, и актуальной представляется постановка математических задач, решение которых предполагает комплексное исследование задачной ситуации. Вопросам, касающимся организации исследовательской деятельности студентов, посвящены научно-педагогические публикации [7, 8, 13].

Результат исследования зачастую зависит от удачно подобранной модели задачной ситуации, от выбранных за основу свойств и связей между объектами в задаче. Кроме того, использование процедуры моделирования способствует формированию умений, связанных с применением математических методов при конструировании объектов, актуализирует теоретические знания по математике. Создание модели задачи может быть существенно упрощено средствами компьютерных систем, применение которых повышает наглядность исследования и дает возможность варьировать экспериментальные данные.

В геометрии для моделирования и визуализации задачи целесообразно использование динамических чертежей. Они позволяют осуществить анализ геометрической конфигурации, выполнить дополнительные построения, установить связи между ее элементами.

Как видно из анализа програмных продуктов по геометрии, проведенного в [14], для создания живых чертежей лучше подходит система динамической геометрии GeoGebra. Это свободно распространяемая среда, которая позволяет создавать Java-апплеты динамических чертежей, дает возможность создания новых инструментов, органически сочетается с интерактивной доской и существенно расширяет диапазон ее применения. Подробнее с возможностями GeoGebra и опытом применения ее в учебном процессе можно ознакомиться в публикациях [3, 5, 12–14].

Предлагаемые в статье материалы можно использовать для организации учебно-исследовательской деятельности студентов, они подтверждают эффективность использования GeoGebra на этапе моделирования. Объединяющим тематическим элементом приведенных задач являются кривые второго порядка.

2. Исследование геометрического места точек

При изучении геометрии для развития исследовательских навыков как нельзя лучше подходят задачи на нахождение геометрических мест точек (ГМТ). Этапы решения таких задач (нахождение некоторых точек ГМТ, выдвижение гипотезы, доказательство) соответствуют основным этапам исследовательской деятельности. Использование метода моделирования здесь целесообразно на этапе формирования гипотезы.

Рассмотрим пример задачи на нахождение геометрического места точек (ГМТ) в рамках курса «Аналитическая геометрия», раздел «Кривые второго порядка».

Пример 1. *Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся окружности с радиусом r и прямой m. Рассмотреть раз-*

личные случаи расположения прямой и окружности.

Для построения точек искомого ГМТ проведем анализ их свойств. Для этого (а также для последующего аналитического задания ГМТ) введем прямоугольную декартову систему координат (ПДСК) так, чтобы ось ординат совпала с данной прямой m, а центр данной окружности принадлежал оси абсцисс (рис. 1, (a)).

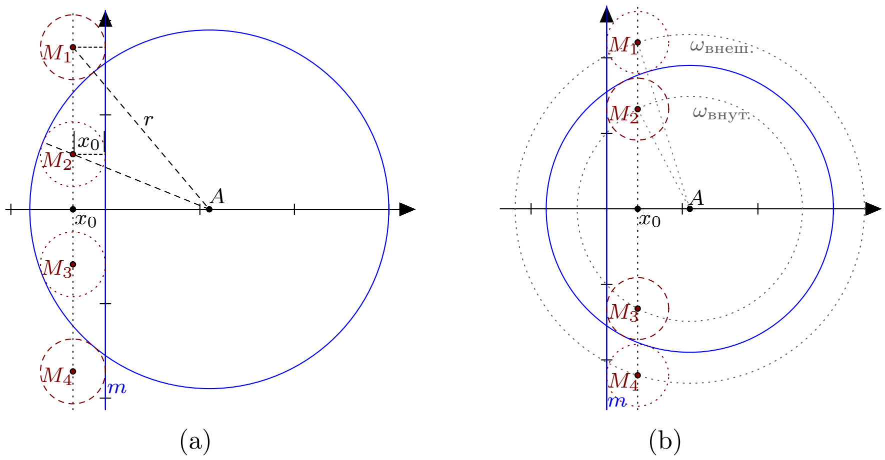


Рис. 1. (a) — выделение свойств ГМТ; (b) — построение точек ГМТ как пересечения прямой с соответствующей окружностью

Зафиксируем абсциссу x_0 искомой точки M. Тогда точка M принадлежит прямой $x = x_0$. Поскольку точка M является центром окружности, касающейся данной окружности, то она удалена от ее центра либо на расстояние $r+ \mid x_0 \mid$, равное сумме радиусов окружностей, при внешнем касании, либо на расстояние $\mid r- \mid x_0 \mid\mid$, равное модулю разности радиусов окружностей, при внутреннем касании. Значит, точка M принадлежит окружности с центром в центре данной окружности и радиусом, равным одному из указанных расстояний.

Итак, точка M принадлежит ГМТ тогда и только тогда, когда она является пересечением прямой с объединением полученных окружностей (рис. 1, (b)). При различных значениях x_0 таких точек пересечения будет не более четырех.

На следующем этапе решения задачи выполним компьютерное построение искомой фигуры по выявленному свойству ее точек. Для создания живого чертежа задачи (рис. 2) в GeoGebra предлагается следующая последовательность действий:

1. Строим данную окружность c по двум точкам A и B, где A — центр на оси абсцисс и B — точка окружности.

2. Задаем точку X_0 на оси абсцисс. Она будет использована для придания динамики чертежу, в частности для построения прямой h: $x = x(X_0)$ (командой $x(X_0)$ задается абсцисса точки X_0).

3. Фиксируем радиус r данной окружности с помощью команды Радиус[c].

4. Строим окружности $\omega_{\text{внут.}}$ и $\omega_{\text{внеш.}}$ по центру в точке A и радиусам $abs(r - abs(x(X_0)))$ и $r + abs(x(X_0))$ (функция $abs(x)$ вычисляет абсолютную величину числа x).

5. С помощью инструмента «Пересечение» фиксируем точки M_1, M_2, M_3, M_4 пересечения прямой h с каждой из окружностей $\omega_{\text{внут.}}$ и $\omega_{\text{внеш.}}$. Чтобы учесть все четыре возможные точки пересечения, расположение точки X_0 и окружности c можно взять, как на рис. 1, (b).

6. Для точек M_i выбираем свойство «Оставлять след».

7. Для наглядности строим окружности с центрами в точках M_i с радиусами $abs(x(X_0))$ и, меняя свойства объектов, скрываем несущественные обозначения, нужное выделяем цветом либо штриховкой.

8. Анимируем чертеж по изменению положения точки X_0.

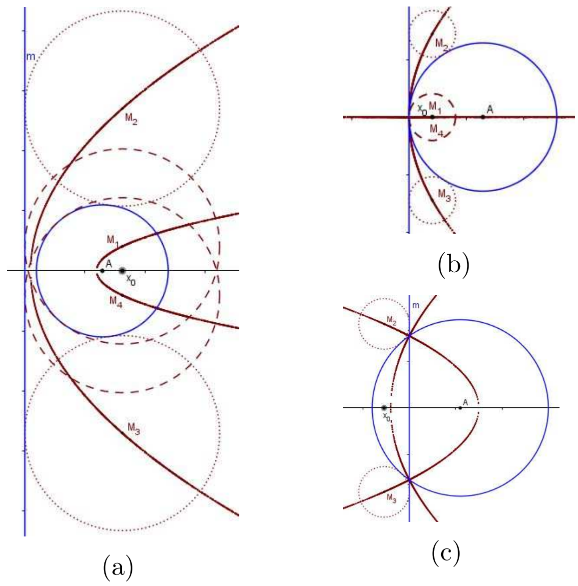


Рис. 2. Результат компьютерного моделирования в примере 1

Визуализация искомого множества точек позволяет получить гипотезу или проверить первоначальные предположения.

В данной задаче тип ГМТ зависит от взаимного расположения данных прямой и окружности. Мы можем выдвинуть следующую гипотезу:

1. В случаях, когда прямая и окружность имеют две общие точки либо прямая и окружность не имеют общих точек, искомое множество точек представляет объединение двух парабол (рис. 2, (a) и (c)).

2. В случае, когда прямая касается окружности, получаем объединение параболы и прямой (рис. 2, (b)).

Варьируя исходные данные, мы можем также заметить, что в том случае, когда данная прямая проходит через цент окружности, параболы симметричны относительно прямой и имеют вершины в серединах радиусов данной окружности, перпендикулярных данной прямой. Отметим, что вывод о расположении вершин парабол можно обобщить для любого расположениия прямой m и окружности c.

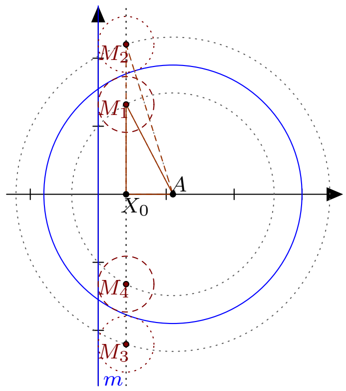


Рис. 3. Аналитическое задание множества для обоснования выдвинутой гипотезы

На следующем этапе решения задачи логически обоснуем выдвинутую гипотезу. Одним из методов здесь является аналитическое задание искомого множества с последующим анализом полученного уравнения (рис. 3). Обозначим координаты точек $M_i(x, y)$ и $A(a, 0)$. Для обоснования выдвинутой ранее гипотезы заметим, что треугольник AM_iX_0 прямоугольный. Тогда $y^2 + (a - x)^2 = (r - |x|)^2$ (для внутренних точек) или $y^2 + (a - x)^2 = (r + |x|)^2$ (для внешних точек). Получаем, что в зависимости от значения a искомые точки лежат на параболах $y^2 - 2x(a + r) - r^2 = 0$ и $y^2 - 2x(a - r) - r^2 = 0$ либо на прямой $y = 0$ и одной из парабол. Другим способом обоснования гипотезы является использование характеристического свойства точек параболы как точек, равноудаленных от данной точки — фокуса и прямой — директрисы, однако последний способ требует развитой интуиции и опыта решения подобных задач.

Приведем примеры задач, результатом решения которых являются невырожденные кривые второго порядка.

1. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся окружности радиуса r и проходящих через точку, лежащую внутри данной окружности.

2. Через одну из вершин гиперболы проведены всевозможные хорды. Найти геометрическое место их середин.

Аналогичные задачи с избытком можно найти в вузовских сборниках задач по геометрии [2]. Отметим также книгу [1], в которой собраны разнообразные геометрические свойства кривых второго порядка.

3. Исследование огибающей семейства

Весьма интересными являются исследования целых семейств кривых. Пучки коник рассматриваются в [1]. Другим вопросом теории семейств кривых является нахождение огибающей семейства, т. е. линии, которая касается каждой кривой семейства и при этом вся состоит только из таких точек касания. Геометрический подход к решению этого вопроса реализован в [4].

В задачах на нахождение ГМТ в GeoGebra было использовано свойство объектов «Оставлять след». Этот инструмент также эффективно работает в задачах на нахождение огибающих семейства кривых, так как для определения типа огибающей часто достаточно изобразить набор линий семейства.

Пример 2. *Найти огибающую линию семейства парабол* $cy - (c - x)^2 = 0$.

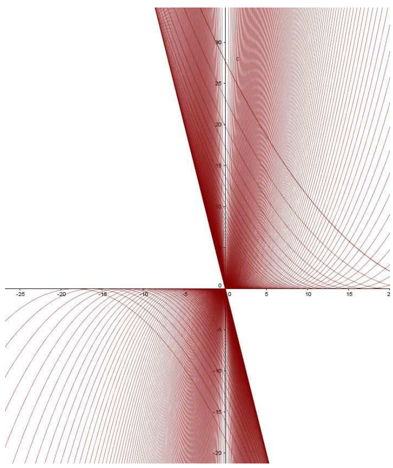


Рис. 4. Семейство парабол $cy - (c - x)^2 = 0$

Для получения компьютерной модели в GeoGebra возьмем точку C на оси абцисс. Ее первая координата $x(C)$ будет использована в качестве параметра. В строке ввода зададим параболу формулой $x(C)y - (x(C) - x)^2 = 0$. В свойствах параболы выберем «Оставлять след» и для наглядности уменьшим толшину линии. Анимируя чертеж по объекту C, получим приведенную на рисунке совокупность парабол. На рис. 4 представлено изображение парабол данного семейства, полученное средствами GeoGebra. Данный чертеж обладает неоспоримым преимуществом перед чертежем «от руки» и дает возможность выдвитуть гипотезу относительно вида огибающей. Очевидно, что в данном случае огибающими будут прямая, проходящая через начало координат, и прямая $y = 0$.

Для доказательства выдвинутой гипотезы можно воспользоваться аппаратом математического анализа (см. [10]). Известно, что точки огибающей семейства кривых $f(x, y, c)$ лежат на дискриминантной кривой, заданной системой уравнений $\begin{cases} f(x, y, c) = 0 \\ f'_c(x, y, c) = 0 \end{cases}$. Однако дискриминантная кривая может содержать также особые точки, в которых линии семейства не имеют определенной касательной.

В данном примере получаем систему $\begin{cases} cy-(c-x)^2=0 \\ y-2(c-x)=0 \end{cases}$, решением которой будет объединение двух прямых $y=0$ и $y=-4x$. Приведенная компьютерная визуализация расположения семейства парабол подтверждает, что полученная дискриминантная кривая не имеет особых точек и совпадает с объединением огибающих семейства.

Отметим, что задача о нахождении огибающей появляется при решении дифференциальных уравнений (см., например, [10]). Действительно, для дифференциального уравнения $F(x,y,y')=0$ общий интеграл $\Phi(x,y,c)=0$ определяет семейство интегральных кривых, зависящих от параметра c. Уравнение огибающей этого семейства также будет решением взятого дифференциального уравнения. В случае, когда такое решение невозможно получить из общего интеграла ни при каком значении c (не является интегралом семейства), его называют особым решением дифференциального уравнения.

4. Исследование инверсных образов

Удобным инструментом в исследовательской деятельности служит компьютерная реализация геометрических преобразований. В курсе вузовской геометрии изучаются различные виды преобразований плоскости и пространства: движения, преобразования подобия, аффинные преобразования. Более сложное преобразование геометрических фигур представляет собой инверсия.

В имеющейся учебной и научно-популярной литературе, посвященной инверсии, обычно рассматриваются образы окружностей и прямых при инверсии. Однако интересный результат дает инверсия кривых второго порядка. Рассмотрение образов равносторонней гиперболы, параболы, эллипса при различном расположении центра инверсии приводит к следующему факту: образами кривых второго порядка являются различные «замечательные кривые», такие как строфоида, циссоида Диоклеса, улитка Паскаля, кардиоида, лемниската Бернулли.

Информацию о «замечательных кривых» можно найти в [6]. Инверсным образам равносторонней гиперболы посвящена статья [9].

Отметим, что в GeoGebra имеется стандартная процедура преобразования инверсии («Отражение относительно окружности»), что позволяет существенно оптимизировать время решения соответствующих задач.

Целью предложенного исследования является изучение инверсных образов невырожденных кривых второго порядка при различных расположениях центра инверсии.

Пример 3. *Исследовать инверсные образы эллипса, равнобочной гиперболы, параболы.*

Для выдвижения гипотезы касательно вида образа кривой вновь воспользуемся GeoGebra. Для того чтобы было можно быстро изменять исходные данные задачной конфигурации, зададим КВП ее общим уравнением $(1-\varepsilon^2)x^2-2px+y^2=0$ для изменяющихся параметров p и ε (рис. 5). В GeoGebra выберем точки ε на оси абсцисс и p на оси ординат. Далее введем конику k командой $(1-x(\varepsilon)^2)*x^2-2y(p)*x+y^2=0$. По двум точкам O и R зададим окружность c. Зададим инверсный образ коники с помощью инструмента «Отражение относительно окружности» либо командой «Отразить[k, c]». Меняя положения точек ε, p, будем изменять конику, меняя положение точек O, R, изменим окружность инверсии. Результат приведен на рисунке. Окружность также построим по двум переменным точкам. Полученная динамическая картинка позволит сделать начальные предположения, а дополнительные построения (задание средствами GeoGebra фокусов и других параметров коник) позволят уточнить их и выдвинуть гипотезы.

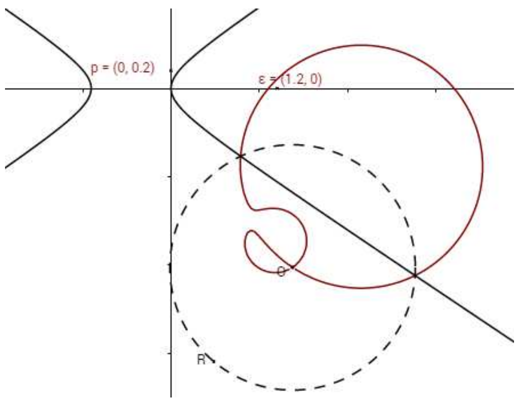


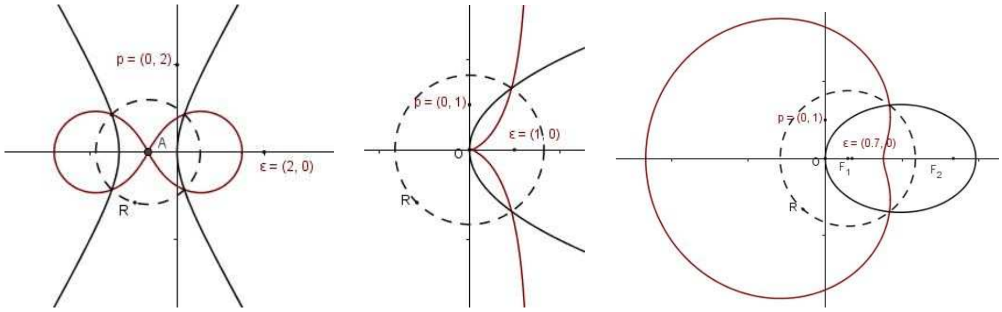
Рис. 5. Выдвижение гипотезы для примера 3

Можно выдвинуть следующие гипотезы:

1. Инверсный образ равносторонней гиперболы относительно ее центра суть лемниската Бернулли (рис. 6, (a)).

2. Образом параболы при инверсии с центром в вершине параболы является циссоида Диоклеса (рис. 6, (b)).

3. Образом эллипса при инверсии с центром в одном из его фокусов является улитка Паскаля, полюс которой совпадает с этим фокусом, а ось — с осью эллипса, направленной от ближайшей вершины к выбранному фокусу (рис. 6, (c)).



(a) (b) (c)

Рис. 6. Частные инверсных образов КВП

Визуализация полученного множества точек используется для выдвижения или подтверждения гипотезы относительно вида полученной линии. На следующем этапе гипотеза строго обосновывается.

Приведем доказательство гипотезы 1). Каноническое уравнение равносторонней гиперболы, центр которой совпадает с началом координат: $x^2 - y^2 = a^2$, а формулы преобразования координат точек при соответствующей инверсии: $x = \dfrac{x'r^2}{x'^2 + y'^2}$, $y = \dfrac{y'r^2}{x'^2 + y'^2}$. Преобразуя каноническое уравнение гиперболы, получим: $(\dfrac{x'r^2}{x'^2 + y'^2})^2 - (\dfrac{y'r^2}{x'^2 + y'^2})^2 = a^2$ или $(x'^2 + y'^2)^2 - \dfrac{r^4}{a^2}(x'^2 - y'^2) = 0$. Последнее уравнение доказывает, что образом равносторонней гиперболы является лемниската Бернулли.

Аналогичные рассуждения можно проделать сразу для общего уравнения КВП.

5. Исследование с использованием аффинных преобразований

В этом пункте приведем пример исследовательской ситуации, в которой компьютерное моделирование не играет решающей роли. В ней основной акцент должен быть сделан на логические рассуждения.

В качестве средства исследования КВП выберем аффинные преобразования евклидовой плоскости, которые благодаря своим инвариантам являются мощным средством для вывода новых геометрических теорем и решения задач (см., например, [15]).

Идейной линией предложенных далее задач является использование инвариантов аффинных преобразований и рассмотрение аффинно эквивалентных фигур. Приведенные материалы были использованы при проведении семинарского занятия «Изучение свойств эллипса как фигуры аффинно эквивалентной окружности» [11].

Чтобы спланировать самостоятельную работу студентов, приобщить их к исследовательской деятельности, при подготовке к семинару студентам нужно было решить две задачи:

1. Доказать, что эллипс аффинно эквивалентен окружности.

2. Выявить аффинные свойства окружности, позволяющие обосновать свойства эллипса:

А. Эллипс имеет центр симметрии.

Б. Геометрическим местом середин параллельных хорд эллипса является некоторый диаметр эллипса.

В. Все диаметры эллипса разбиваются на пары сопряженных, обладающих тем свойством, что середины хорд эллипса, параллельных одному из этих диаметров, лежат на другом диаметре.

Г. Касательные к эллипсу, проведенные через концы его диаметра, параллельны сопряженному диаметру.

Д. Параллелограммы, построенные на парах сопряженных полудиаметров эллипса, имеют одну и ту же площадь, равную площади прямоугольника, построенного на полуосях эллипса.

Е. Площадь эллипса вычисляется по формуле $S = \pi ab$, где a и b полуоси эллипса.

Аффинную эквивалентность эллипса и окружности можно доказать по определению аффинно эквивалентных фигур. Для этого необходимо подобрать аффинное преобразование плоскости, переводящее окружность в эллипс. На момент изучения аффинных преобразований доказано, что любой эллипс может быть получен как образ некоторой окружности при преобразовании сжатия к ее диаметру. Таким образом, для решения первой задачи достаточно показать, что сжатие плоскости к прямой аффинно.

Тот факт, что окружность переходит в эллипс при аффинном преобразовании, указывает на наличие каких-то общих свойств этих линий и позволяет использовать новые подходы при изучении эллипса. Это иллюстрируют свойства А–Е второй задачи. Для их решения используются следующие инварианты: простое отношение точек прямой и коллинеарность точек (А), простое отношение точек прямой и сохранение параллельности прямых (Б, В), отношение площадей фигур (Д, Е).

После обсуждения поставленных проблем семинарского занятия студентам предлагаются контрольные задачи для решения в группах:

1. Каждый вписанный в окружность параллелограмм является прямоугольником. Какие заключения о вписанных в эллипс параллело-

граммах можно отсюда вывести?

2. Каждый описанный около окружности параллелограмм является ромбом. Какие заключения об описанных около эллипса параллелограммах можно отсюда вывести?

3. Найдите геометрическое место точек пересечения касательных к эллипсу в концах сопряженных диаметров.

Сформулированные задачи ориентируют студентов на поиск путей и способов их решения, что предполагает активное использование определений, теорем, основных фактов теории аффинных преобразований.

При решении первой и второй задач в случае затруднения можно задать дополнительный вопрос: как связаны стороны параллелограмма с диаметрами эллипса?

Компьтерных программ при создании чертежей к представленным задачам не требуется.

Отметим, что при подготовке и проведении семинарских занятий большое значение имеют рекомендации студентам по организации самостоятельной работы: изучение литературы, подготовка индивидуальных и групповых докладов, планирование по времени выступлений, а также моделирование вступительной и заключительной частей семинара.

Выводы

Материал статьи может быть использован, например, при формировании исследовательской деятельности на различных курсах и уровнях образования (бакалавриат, магистратура) при изучении геометрии на педагогических специальностях, при проведении лабораторных занятий по курсу «Аналитическая геометрия», «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование» и может послужить основой выпускной работы или индивидуального задания для магистрантов.

Список литературы

1. **Акопян А. В., Заславский А. А.** Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2007. 136 с.

2. **Атанасян Л. С., Атанасян В. А.** Сборник задач по геометрии : учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. М.: Просвещение, 1973. Ч. I. 480 с.

3. **Безумова О. Л., Овчинникова Р. П., Троицкая О. Н., Троицкий А. Г., Форкунова Л. В., Шабанова М. В., Широ-**

кова Т. С., Томилова О. М. Обучение геометрии с использованием возможностей GeoGebra. Архангельск: Кира, 2011. 140 с.

4. **Болтянский В. Г.** Огибающая // *Квант. № 3. 1987. С. 2–7.*
5. **Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н.** Геометрические основы компьютерной графики : учебное пособие. Киров: Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2015. 164 с.
6. **Гурова А. Э.** Замечательные кривые вокруг нас. М., 1989. 112 с.
7. **Забелина С. Б.** Формирование исследовательской компетентности магистрантов математического образования (направление «педагогическое образование») : дис. ... канд. пед. наук. М., 2015.
8. **Качалова Л. П.** Исследовательская компетенция магистрантов: структурно-содержательный анализ // *Политематический журнал научных публикаций «Дискуссия». Вып. №3(55). 2015.*
9. **Руинский А.** Инверсные преобразования гиперболы // *Матем. просв., сер. 3, 4 (2000). С. 120–126.*
10. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. Т. 2. 479 с.
11. **Тимшина Л. В.** Семинарские занятия по геометрии в вузе // *Преподавание математики, физики, информатики в вузах и школах: проблемы содержания, технологии и методики : материалы V Всероссийской науч.-практ. конф. Глазов: ООО «Глазовская типография», 2015. С. 131–133.*
12. **Чеботарева Э. В.** Компьютерный эксперимент с GeoGebra. Казань: Казанский ун-т, 2015. 61 с.
13. **Шабанова М. В., Овчинникова Р. П., Ястребов А. В., Павлова М. А., Томилова А. Е., Форкунова Л. В., Удовенко Л.Н., Новоселова Н. Н., Фомина Н. И., Артемьева М. В., Ширикова Т. С., Безумова О. Л., Котова С. Н., Паршева В. В., Патронова Н. Н., Белорукова М. В., Тепляков В. В., Рогушина Т. П., Тархов Е. А., Троицкая О. Н., Чиркова Л. Н.** Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение : монография по исследовательской деятельности. М.: Издательский дом «Академия Естествознания», 2016. 300 с.

14. **Ширикова Т. С.** Методика обучения учащихся основной школы доказательству теорем при изучении геометрии с использованием GeoGebra : дис. ... канд. пед. наук. Архангельск, 2014.

15. **Яглом И. М., Ашкинузе В. Г.** Идеи и методы аффинной и проективной геометрии. М. 1962. Ч. I. 247 с.

Summary

Lubyagina E. N., Timshina L. V. Experience in the organization of students' educational and research activities in the study of second-order curves

In the article, we offer materials that can be used to organize students' educational and research activities in studying second-order curves. We give examples of the use of the GeoGebra environment.

Keywords: research activity, second-order curves, GeoGebra.

References

1. **Akopyan A. V., Zaslavsky A. A.** *Geometricheskie svojstva krivyh vtorogo poryadka* (Geometric properties of second-order curves), M ., 2007, 136 p.

2. **Atanasyan L. S., Atanasyan V. A.** *Sbornik zadach po geometrii* (Collection of problems on geometry), Textbook for students of physical and mathematical sciences, I. M.: Enlightenment, 1973, 480 p.

3. **Bezumova O. L., Ovchinnikova R. P., Troitskaya O. N., Troitsky A. G., Vorkunova L. V., Shabanova M. V., Shirokova T. S., Tomilova O. M.** *Obuchenie geometrii s ispol'zovaniem vozmozhnostej GeoGebra* (Geometry training using GeoGebra capabilities), Arkhangelsk: Kira, 2011, 140 p.

4. **Boltyanskii V. G.** Ogibayushchaya (Envelope), *Kvant, N. 3, 1987, pp. 2–7.*

5. **Vechtomov E. M. , Lubyagina E. N.** *Geometricheskie osnovy komp'yuternoj grafiki* (Geometric Foundations of Computer Graphics: A Training Manual), Kirov. Publishing house: «Rainbow-Press», 2015, 164 p.

6. **Gurov A. E.** *Zamechatel'nye krivye vokrug nas* (Wonderful curves around us), M., 1989, 112 p.

7. **Zabelina C. B**. *Formirovanie issledovatel'skoj kompetentnosti magistrantov matematicheskogo obrazovaniya* (Formation of research competence of undergraduates of mathematical education (direction pedagogical education)). Dis. ... cand. ped. sciences, M., 2015.

8. **Kachalova L. P.** Issledovatel'skaya kompetenciya magistrantov: strukturno-soderzhatel'nyj analiz (Research competence of undergraduates: structurally-substantial analysis), *Political journal of scientific publications «Discussion»*, 3 (55), 2015.

9. **Ruinsky A.** Inversnye preobrazovaniya giperboly (Inverted hyperbola transformations), *Mathematical education*, s. 3, 4 (2000), pp. 120–126.

10. **Smirnov V. I.** *Kurs vysshej matematiki* (Course of Higher Mathematics), t. 2, M.: «Science», 1974, 479 p.

11. **Timshina L. V.** Seminarskie zanyatiya po geometrii v vuze (Seminars on Geometry in the University), *Teaching Mathematics, Physics, Informatics in Universities and Schools: Content Problems, Technologies and Techniques: Proceedings of the V All-Russian Scientific Conference. Conf.* Glazov: «Glazov printing house», 2015, p. 131–133.

12. **Chebotareva E. V.** *Komp'yuternyj ehksperiment s GeoGebra* (Computer experiment with GeoGebra), Kazan: Kazan University, 2015, 61 p.

13. **Shabanova M. V., Ovchinnikova R. P., Yastrebov A. V., Pavlova M. A., Tomilova A. E., Forkunova L. V., Udovenko L. N., Novoselova N. N., Fomina N. I., Artemieva M. V., Shirikova T. S., Bezumova O. L., Kotova S. N., Parsheva V. V., Patronova N. N., Belorukova M. V., Teplyakov V. V., Rogushina T. P., Tarkhov E. A., Troitskaya O. N., Chirkova L. N.** *Ehksperimental'naya matematika v shkole. Issledovatel'skoe obuchenie* (Experimental mathematics in the school. Research training. Monograph on research activities), M.: Publishing house Academy of Natural History, 2016, 300 p.

14. **Shirikova T. S.** *Metodika obucheniya uchashchihsya osnovnoj shkoly dokazatel'stvu teorem pri izuchenii geometrii s ispol'zovaniem Geo Gebra* (Method of teaching students of the basic school the proof of theorems in the study of geometry using GeoGebra). Diss. ... cand. ped. sciences. Arkhangelsk, 2014.

15. **Jaglom I. M., Ashkinuz V. G.** *Idei i metody affinnoj i proektivnoj geometrii: CH. I* (Ideas and methods of affine and projective geometry, I). M: 1962, 247 p.

Для цитирования: Лубягина Е. Н., Тимшина Л. В. Опыт организации учебно-исследовательской деятельности студентов при изучении кривых второго порядка // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2 (23). С. 70–84.*

For citation: Lubyagina E. N., Timshina L. V. Experience in the organization of students' educational and research activities in the study of second-order curves, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, 2 (23), pp. 70–84.

ВятГУ *Поступила 31.05.2017*