

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

*Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 2 (23). 2017*

УДК 531.011, 51–72

О ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПАХ МЕХАНИКИ КОНСЕРВАТИВНЫХ И НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

П. А. Макаров

На основе принципа Гамильтона – Остроградского, применённого к движению консервативных и неконсервативных систем, составлены однородные и неоднородные уравнения Эйлера–Лагранжа. Рассмотрен пример плоского движения материальной точки. Определено влияние диссипативных сил на характеристики движения.

Ключевые слова: механическое действие по Гамильтону, вариационные принципы движения, уравнение Эйлера – Лагранжа, прямой и околный путь, диссипация энергии.

1. Введение

Вариационные принципы играют огромную роль как непосредственно в аналитической механике, так и во многих разделах теоретической физики, строящихся на её основе [1–5]. Вместе с тем опыт преподавания теоретической механики в университете показывает, что аудиторных занятий для практического освоения этих принципов недостаточно. Имеется существенная необходимость демонстрации применения вариационных принципов на конкретных примерах.

Очевидно, что для развития навыков студентов следует подбирать такие задачи, которые являются достаточно наглядными, относительно простыми в решении и вместе с тем могут быть несколько усложнены с целью демонстрации трудностей, возникающих при решении задач, приближенных к реальным научным расчётам.

В качестве демонстрационной задачи, иллюстрирующей основные приёмы аналитической механики Гамильтона – Остроградского, возьмём за основу один из классических примеров движения материальной точки, предложенный Ф. А. Слудским [6].

2. Основные принципы

Как известно [1–5], положение механической системы можно задать вектором в конфигурационном пространстве обобщённых координат $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_s) \in R^s$, где s — число степеней свободы системы.

С течением времени t состояние системы изменяется, а значит, вектор $\mathbf{q}(t)$ описывает в конфигурационном пространстве некоторую кривую — траекторию движения. Вектор $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s) \in R^s$ называют обобщённой скоростью системы.

Механическим действием S по Гамильтону называют функционал на конфигурационном пространстве состояний:

$$S[\mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt, \quad (1)$$

где лагранжиан L — функция, равная разности кинетической энергии системы T и обобщённой потенциальной функции Π :

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) - \Pi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (2)$$

Основу вариационной формулировки механики составляет принцип Гамильтона – Остроградского, утверждающий, что действительное движение системы при её переходе из положения $\mathbf{q}(t_1)$ в положение $\mathbf{q}(t_2)$ происходит таким образом, что механическое действие (1), вычисленное по прямому пути, имеет стационарное значение по сравнению со значениями, которые действие принимает при движении системы по окольным путям, близким к прямому и проходящим через те же точки $\mathbf{q}(t_1)$ и $\mathbf{q}(t_2)$. Известно, что при достаточной близости начального и конечного положений на действительной траектории достигается минимум действия [1–5].

Таким образом, вариационная производная (а значит, и вариация) действия на истинной траектории движения в конфигурационном пространстве равна нулю:

$$\frac{\delta S}{\delta \mathbf{q}(t)} = 0 \quad \iff \quad \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (3)$$

Хорошо известно [1–5], что принцип стационарного действия (3) эквивалентен уравнениям движения системы в форме дифференциальных уравнений Эйлера – Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, s. \quad (4)$$

Все сказанное выше относилось непосредственно к движению механической системы. Задача о движении тела в среде выходит за рамки «чистой» механики [4, 5]. Это связано с тем, что среда оказывает сопротивление движению тела, в результате чего энергия движущегося тела постепенно переходит в немеханические виды энергии. Для оценки этого влияния необходимо рассматривать движение среды, внутреннее тепловое состояние как среды, так и тела. Вместе с тем известно [1–4], что вариационный принцип Гамильтона – Остроградского справедлив и в случае неконсервативной системы. В этом случае он формулируется следующим образом:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0, \quad (5)$$

где δW — виртуальная работа неконсервативных сил, приводящая к изменению полной энергии механической системы:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i, \quad (6)$$

здесь и далее N — число материальных точек системы.

В случае склерономной системы ($\mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}_i(t)$, $i = 1, \dots, N$) имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j, \quad (7)$$

где обобщенная неконсервативная сила Q_j , соответствующая обобщенной координате q_j , может быть представлена с помощью функции \mathcal{R} , удвоенное значение которой имеет физический смысл скорости изменения энергии системы:

$$Q_j = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_j}. \quad (8)$$

Принцип (5) позволяет получить уравнения движения в форме неоднородных уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_j, \quad i = 1, \dots, s. \quad (9)$$

Существует достаточно большое количество задач, в которых сопротивление, оказываемое средой, пропорционально скорости движущегося тела. В этих случаях силы трения могут быть выражены через диссипативную функцию Рэлея:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (k_x v_{ix}^2 + k_y v_{iy}^2 + k_z v_{iz}^2). \quad (10)$$

При этом очевидно, что

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_{\mathbf{v}_i} \mathcal{R}. \quad (11)$$

3. Демонстрационная модель

3.1. Консервативная система $\mathcal{R} = 0$. Рассмотрим тело массы m и настолько малых размеров, что в условиях нашей задачи его можно считать материальной точкой. Пусть тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 и движется в однородном поле силы тяжести с ускорением свободного падения \mathbf{g} . Введем систему координат Oxz в плоскости траектории, так что ось Ox горизонтальна, а Oz противоположно направлена ускорению \mathbf{g} .

Очевидно, что в данном случае число степеней свободы системы $s = 2$. В качестве обобщённых координат удобно выбрать декартовы координаты центра тяжести тела $\mathbf{q} = (x, z)$, при этом обобщённые скорости $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{x}, \dot{z})$. Функция Лагранжа (2) при наших соглашениях имеет вид:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - mgz. \quad (12)$$

Начальные условия при $t_0 = 0$:

$$x(0) = z(0) = 0, \quad v_x(0) = v_0 \cos \alpha, \quad v_z(0) = v_0 \sin \alpha. \quad (13)$$

Решение этой части задачи хорошо освещено в учебной литературе [1–5], поэтому ограничимся здесь лишь кратким перечислением тех основных результатов, которые потребуются нам в дальнейшем.

Составив и решив систему дифференциальных уравнений Лагранжа (4) с лагранжианом (12), получим известный закон движения тела по параболической траектории, который с учётом начальных условий (13) имеет вид:

$$\begin{cases} \mathcal{X}(t) = v_0 t \cos \alpha, \\ \mathcal{Z}(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases} \quad (14)$$

Из уравнений движения (14) очевидно, что в момент времени

$$\mathcal{T}_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad (15)$$

материальная точка оказывается на максимальной высоте:

$$\mathcal{H} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (16)$$

Также несложно определить, что в момент времени

$$\mathcal{T}_2 = 2\mathcal{T}_1 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \quad (17)$$

тело пересекает ось Ox в некоторой точке \mathcal{A} , так что горизонтальная дальность полёта вычисляется так:

$$\mathcal{D} = |O\mathcal{A}| = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (18)$$

Дифференцируя уравнения движения (14), определяем скорость движения тела

$$\begin{cases} \mathcal{V}_x(t) = v_0 \cos \alpha, \\ \mathcal{V}_z(t) = v_0 \sin \alpha - gt. \end{cases} \quad (19)$$

3.2. Система с однородной и изотропной диссипацией. Рассмотрим случай, когда сопротивление среды обладает свойствами изотропии и однородности по отношению к направлению перемещения тела, т. е. коэффициенты функции Рэля (10) совпадают $k_x = k_z = k$ и не являются функциями координат и скоростей тела. Тогда

$$\mathcal{R} = \frac{k}{2} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2), \quad Q_1 = -k\dot{x}, \quad Q_2 = -k\dot{z}. \quad (20)$$

Составим уравнения Лагранжа в форме (9) для нашего случая и запишем их в канонической форме:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} = 0, \\ \ddot{z} + \frac{\dot{z}}{\tau} = -g, \end{cases} \quad (21)$$

где введён параметр $\tau = m/k$ — характерное время диссипации энергии для тела массы m , движущегося в среде с коэффициентом сопротивления k .

Общие решения уравнений (21) имеют вид:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t/\tau} + C_2, \\ z(t) = C_3 e^{-t/\tau} + C_4 - g\tau t, \end{cases} \quad (22)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные константы. Для их определения используем начальные условия (13), что даёт:

$$\begin{cases} C_1 = -C_2, \\ C_3 = -C_4, \\ C_1 = -v_0\tau \cos \alpha, \\ C_3 = -\tau(v_0 \sin \alpha + g\tau). \end{cases} \quad (23)$$

Окончательно получаем уравнение траектории в следующем виде:

$$\begin{cases} x(t) = v_0\tau \cos \alpha (1 - e^{-t/\tau}), \\ z(t) = (v_0\tau \sin \alpha + g\tau^2) (1 - e^{-t/\tau}) - g\tau t. \end{cases} \quad (24)$$

О степени влияния сопротивления на движение тела качественно можно судить по соотношению величин τ и \mathcal{T}_2 . Будем считать трение достаточно слабым, если $\tau \gg \mathcal{T}_2$, и весьма существенным в обратном случае: $\tau \ll \mathcal{T}_2$.

Рис. 1 демонстрирует траектории движения тела в бездиссипативной среде, даваемые уравнениями (14), а также траектории (24) тела, движущегося под действием сильного, слабого и промежуточного трения.

Как и предполагалось выше, из рис. 1 видно, что сопротивление среды существенно искажает траекторию движения тела при $\tau \lesssim \mathcal{T}_2$. Вместе с тем временные параметры движения этот рисунок не иллюстрирует, поэтому более подробную информацию о влиянии трения на

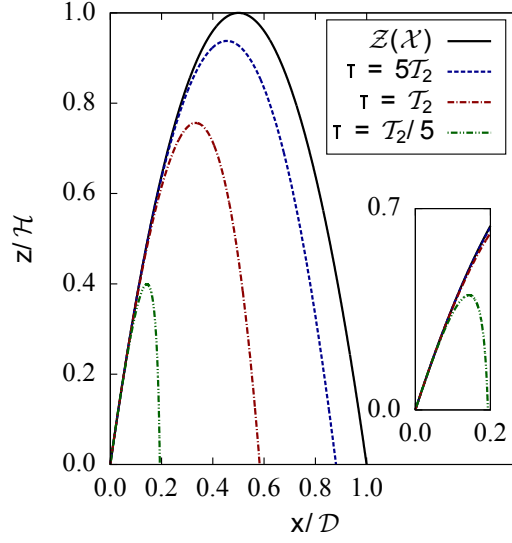


Рис. 1. Траектории тела в средах без трения и с трением

характер движения тела с течением времени можно получить из рис. 2.

Время подъёма t_1 тела до максимальной высоты $h = z_{\max}$ получаем из известных условий:

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=t_1} = 0, \quad \left. \frac{d^2z}{dt^2} \right|_{t=t_1} < 0, \quad (25)$$

$$t_1 = \tau \ln \left(1 + \frac{v_0 \sin \alpha}{g\tau} \right) = \tau \ln \left(1 + \frac{\mathcal{T}_1}{\tau} \right). \quad (26)$$

Из соотношения (26) очевидно, что

$$t_1 \leq \mathcal{T}_1 = \frac{\mathcal{T}_2}{2}, \quad (27)$$

причём равенство имеет место только в отсутствии диссипации, т. е. при $\tau \rightarrow \infty$. Зависимость $t_1(\tau)$ в нормированном виде, определяемая уравнением (26), представлена кривой (а) на рис. 3(а).

Максимальное значение высоты при этом равно:

$$h = z(t_1) = v_0 \tau \sin \alpha - g\tau^2 \ln \left(1 + \frac{v_0 \sin \alpha}{g\tau} \right) = g\tau (\mathcal{T}_1 - t_1). \quad (28)$$

Анализ (28) показывает, что $h \leq \mathcal{H}$ при любых значениях времени диссипации $\tau \in [0, +\infty)$. График зависимости $h(\tau)$ в нормированном виде представлен кривой (а) на рис. 3(б).

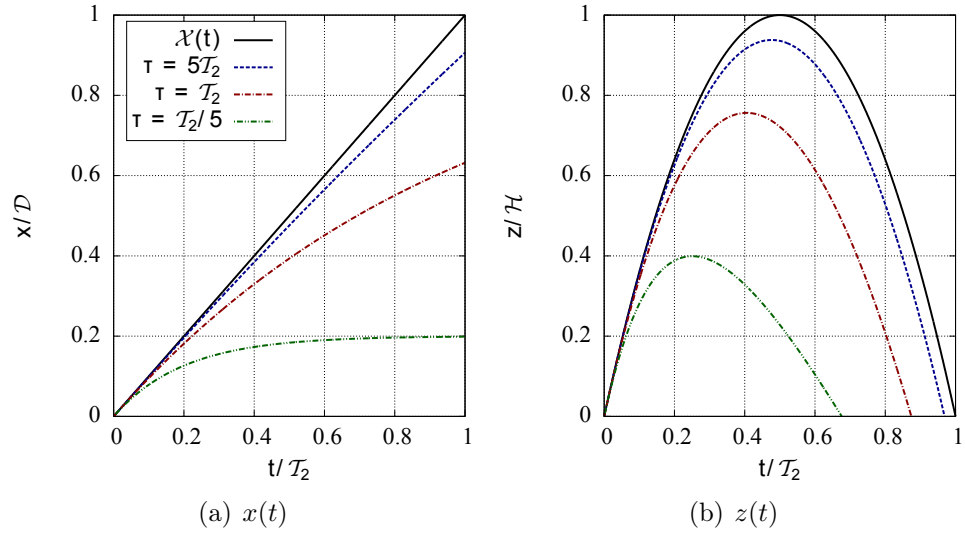


Рис. 2. Временные зависимости координат тела в средах без трения и с трением

Время падения груза t_2 можно определить из условия $z(t_2) = 0$, которое в нашей задаче может быть приведено к виду:

$$\frac{t_2}{1 - e^{-t_2/\tau}} = \tau + \mathcal{T}_1. \quad (29)$$

Решение трансцендентного уравнения (29) удобно представить с помощью следующей специальной функции:

$$\mathcal{F}(\xi; \xi_0) = \frac{\xi}{1 - e^{-\xi/\xi_0}} - \xi_0. \quad (30)$$

Семейство кривых $\mathcal{F}(\xi; \xi_0)$ при различных значениях параметра ξ_0 и переменной ξ приведено на рис. 4. Анализ функции (30) и рис. 4 показывают, что $\mathcal{F}(\xi; 0) = \xi$, $\mathcal{F}(\xi; \infty) = \xi/2$ и $\xi/2 < \mathcal{F}(\xi; \xi_0) < \xi$ для всех промежуточных значений ξ_0 .

С помощью функции (30) уравнение (29) можно представить в виде:

$$\mathcal{F}(t_2; \tau) = \mathcal{T}_1, \quad (31)$$

откуда время падения тела выражается следующим образом:

$$t_2 = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{T}_1; \tau). \quad (32)$$

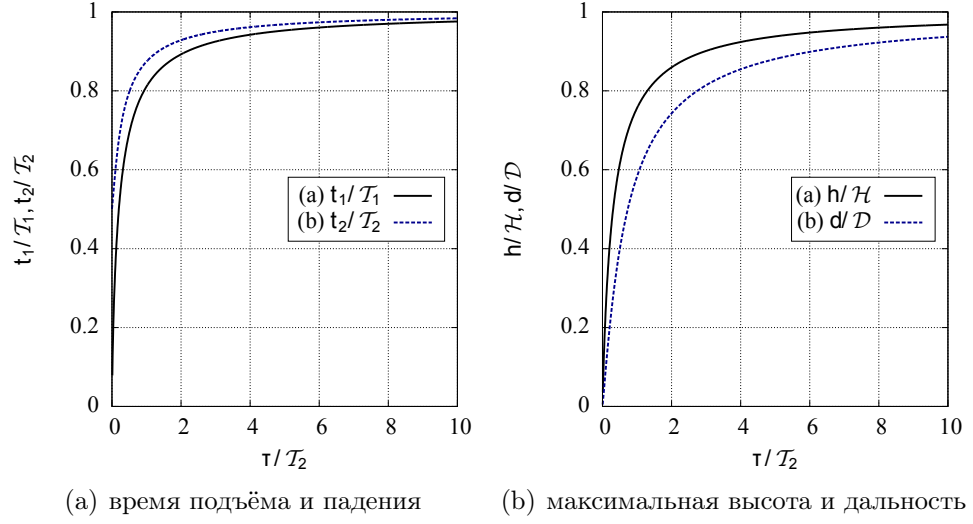


Рис. 3. Влияние диссипации на основные характеристики движения

В решение (32) введена обратная к $\mathcal{F}(\xi; \xi_0)$ функция, такая, что $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\xi; \xi_0); \xi_0) = \xi$. Зависимость $t_2(\tau)$ в нормированном виде, определяемая уравнением (32), представлена кривой (b) на рис. 3(a). Для времени падения t_2 характерно то, что в случае «критической» диссипации энергии $\lim_{\tau \rightarrow 0} t_2(\tau) = \mathcal{T}_1$, в то время как время подъёма $\lim_{\tau \rightarrow 0} t_1(\tau) = 0$.

Горизонтальная дальность полёта, определяемая из условия $d = x(t_2)$, равна:

$$d = v_0 \tau \cos \alpha (1 - e^{-t_2/\tau}) = \mathcal{D} \cdot \frac{t_2}{\mathcal{T}_2} \cdot \frac{\tau}{\tau + \mathcal{T}_1}. \quad (33)$$

График зависимости $d(\tau)$ в нормированном виде, определяемым соотношением (33), представлен кривой (b) на рис. 3(b). Из рисунка очевидно, что на дальность полёта d сопротивление среды оказывает более существенное влияние, чем на высоту подъёма h , однако при «критической» диссипации энергии $\lim_{\tau \rightarrow 0} h(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} d(\tau) = 0$.

Скорость движения тела в среде с диссипацией определим, дифференцируя уравнения движения (24):

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos \alpha e^{-t/\tau}, \\ v_z(t) = (v_0 \sin \alpha + g\tau) e^{-t/\tau} - g\tau. \end{cases} \quad (34)$$

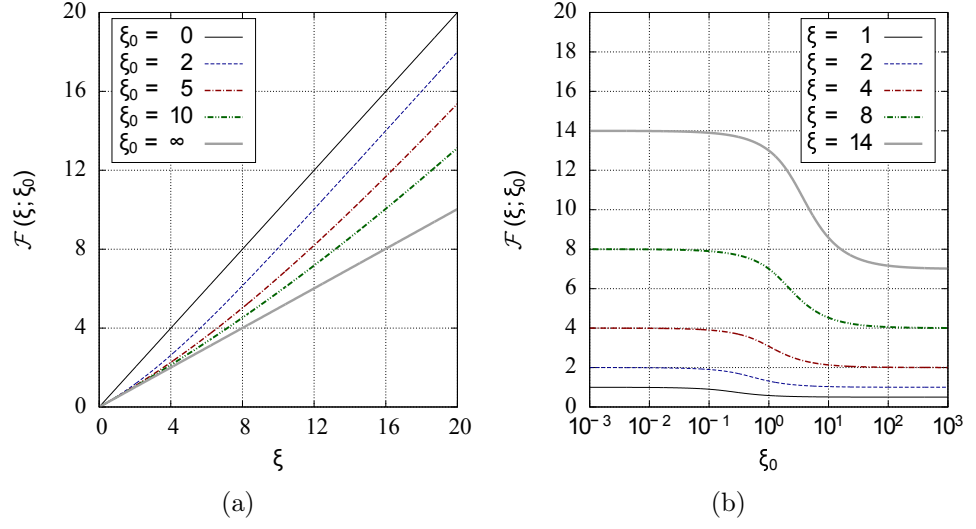


Рис. 4. Семейство кривых $\mathcal{F}(\xi; \xi_0)$, определяемых соотношением (30)

4. Об экстремальности действия

В данном разделе рассмотрим консервативную систему $\mathcal{R} = 0$. Вычислим действие (1) на истинном движении, происходящем по закону (14):

$$\mathcal{S} = m \int_0^{\mathcal{T}_2} \left[\frac{\mathcal{V}_x^2(t) + \mathcal{V}_z^2(t)}{2} - g\mathcal{L}(t) \right] dt = \frac{mv_0^2 \mathcal{T}_2}{2} \left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \alpha \right). \quad (35)$$

Вместе с тем, материальная точка может попасть из начального положения в конечное и по другим траекториям. Исследуем подробнее несколько типов таких траекторий.

1. В своей оригинальной работе Ф. А. Слудский [6] предложил равномерное прямолинейное движение:

$$\begin{cases} \bar{\mathcal{X}}(t) = v_0 t \cos \alpha, \\ \bar{\mathcal{Z}}(t) = \text{const} = 0. \end{cases} \quad (36)$$

2. Кроме того, исследуем движение, происходящее по гармоническому закону:

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{X}}(t) = v_0 t \cos \alpha, \\ \tilde{\mathcal{Z}}(t) = \mathcal{H} \sin\left(\frac{\pi}{\mathcal{T}_2} t\right). \end{cases} \quad (37)$$

3. Следуя работе [2] также рассмотрим движение, заданное степенным законом:

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{X}}(t) = at, \\ \tilde{\mathcal{Z}}(t) = bt - ct^\gamma, \end{cases} \quad (38)$$

где $a, b, c, \gamma = \text{const}$, $\gamma > 0$.

Начальные положения материальной точки для движений (38) и (14) совпадают. Запишем условия, обеспечивающие совпадение её положений в момент окончания движения:

$$a = v_0 \cos \alpha, \quad c = b \tilde{\mathcal{T}}_2^{1-\gamma}, \quad \tilde{\mathcal{T}}_2 = \mathcal{T}_2 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (39)$$

Параметр b при этом может быть произвольным, но если выбрать значение $b = v_0 \sin \alpha$, что обеспечит совпадение начальных скоростей на истинной и рассматриваемой траекториях, то семейство траекторий (38), (39) будет зависеть только от параметра γ . В этом семействе при $\gamma = 2$ содержится истинное движение (14), а при $\gamma = 1$ — траектория сравнения (36), предложенная Слудским.

На прямолинейном движении (36) действие имеет значение

$$\bar{\mathcal{S}} = \frac{mv_0^2 \mathcal{T}_2}{2} (1 - \sin^2 \alpha). \quad (40)$$

На движении, происходящем по гармоническому закону (38), действие равно

$$\check{\mathcal{S}} = \frac{mv_0^2 \mathcal{T}_2}{2} \left(1 - \frac{32\pi + 64 - \pi^3}{32\pi} \sin^2 \alpha \right). \quad (41)$$

Анализ выражений (35), (40) и (41) показывает, что $\mathcal{S} \leq \check{\mathcal{S}} \leq \bar{\mathcal{S}}$, причём равенство имеет место только в случае прямолинейного горизонтального движения, т. е. когда $\alpha = 0$.

Таким образом, на первый взгляд примеры 1 и 2 подтверждают принцип стационарного действия Гамильтона – Остроградского (3).

Теперь рассмотрим подробнее пример 3. Для этого вычислим скорости точек, движущихся по траекториям сравнения:

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{V}}_x(t) = a, \\ \tilde{\mathcal{V}}_z(t) = b - c\gamma t^{\gamma-1}, \end{cases} \quad (42)$$

составим функцию Лагранжа и найдём значение действия на траектории (38) при условиях (39):

$$\tilde{\mathcal{J}} = \frac{mv_0^2 \mathcal{F}_2}{2} \left(1 - \frac{\gamma(\gamma^2 - 7\gamma + 4)}{(\gamma + 1)(2\gamma - 1)} \sin^2 \alpha \right). \quad (43)$$

Составим разность действия на траекториях сравнения (43) и на истинном движении (35):

$$\tilde{\mathcal{J}} - \mathcal{J} = \frac{mv_0^2 \mathcal{F}_2}{2} \cdot \frac{(3\gamma - 1)(\gamma - 2)^2}{3(\gamma + 1)(2\gamma - 1)} \sin^2 \alpha. \quad (44)$$

В диапазоне значений параметра $1/3 < \gamma < 1/2$ разность (44) принимает отрицательные значения. Следовательно, действие на соответствующих кривых сравнения меньше, чем на траектории истинного движения.

Несмотря на кажущийся парадокс, данный пример не противоречит принципу стационарного действия. Дело в том, что траектории (38), (39), предложенные в работе [2], не являются окольными путями, так как не находятся в слабой окрестности траектории истинного движения (14).

При построении семейства сравнения в слабой окрестности истинного движения при линейной зависимости от параметра β должно выполняться:

$$q_i(t, \beta) = q_i(t) + \beta \xi_i(t), \quad \dot{q}_i(t, \beta) = \dot{q}_i(t) + \beta \eta_i(t), \quad (45)$$

т. е.

$$\delta q_i(t) = \beta \xi_i(t), \quad \delta \dot{q}_i(t) = \beta \eta_i(t).$$

Время t не варьируется. В общем случае возможно $\eta_i \neq \dot{\xi}_i$.

Несмотря на то что кривые (38), (39) не являются окольными путями, из (44) видно, что движение по квадратичной параболе обеспечивает локальный минимум действия по параметру γ .

Траектории (36) и (37), рассмотренные в примерах 1 и 2, являются окольными путями, так как для любого параметра β всегда можно определить функции ξ_1, ξ_2, η_1 и η_2 , обеспечивающие условия изохронной близости траекторий (45). Поэтому в полном соответствии с принципом Гамильтона – Остроградского действие (35), вычисленное на прямом пути, принимает минимальное значение по сравнению со значениями (40) и (41), вычисленными на окольных путях.

5. Выводы

Таким образом, в данной работе продемонстрировано применение основополагающих принципов аналитической механики к движению консервативных и неконсервативных систем. На примере нескольких траекторий сравнения обсуждены условия, при которых их можно считать окольными путями. Для окольных путей установлено, что механическое действие по Гамильтону имеет минимум в случае достаточно близкого положения начальной и конечной точек траектории. Кроме того, рассмотрено влияние диссипативных сил на важнейшие характеристики движения: горизонтальную дальность и высоту полёта, а также времена подъёма и падения.

Список литературы

1. Веретенников В. Г., Сеницин В. А. Метод переменного действия. 2-е изд., исправ. и доп. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 272 с.
2. Веретенников В. Г., Сеницин В. А. Теоретическая механика (дополнения к общим разделам). М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 416 с.
3. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. 2-е изд., исправ. М.: Наука, 1966. 300 с.
4. Голдстейн Г. Классическая механика. М.: Наука, 1975. 416 с.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : учеб. пос.: в 10 т. Т. I. Механика. 5-е изд., стереот. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 224 с.
6. Слудский Ф. А. Заметка о начале наименьшего действия // *Вариационные принципы механики / под ред. Л. С. Полака М.: Физматгиз, 1959. С. 388–391.*

Summary

Makarov P. A. On the variational principles of the mechanics of conservative and non-conservative systems

On the basis of the Hamilton—Ostrogradsky principle, applied to the motion of conservative and non-conservative systems, homogeneous and inhomogeneous Euler—Lagrange equations are compiled. An example of a plane motion of a material point is considered. The influence of dissipative forces on the characteristics of motion is determined.

Keywords: Hamilton's mechanical action, variational principles of motion, the Euler–Lagrange equation, straight and circuitous paths, energy dissipation.

References

1. **Veretennikov V. G., Sinitsin V. A.** *Metod peremennogo dejstviya* (Method of variable action), 2 ed, M.: FIZMATLIT, 2005, 272 p.
2. **Veretennikov V. G., Sinitsin V. A.** *Teoreticheskaya mekhanika* (Theoretical mechanics (additions to the general sections)), M.: FIZMATLIT, 2006, 416 p.
3. **Gantmacher F. R.** *Lekcii po analiticheskoj mekhanike* (Lectures on analytical mechanics), 2 ed, M.: Science, 1966, 300 p.
4. **Goldstein G.** *Klassicheskaya mekhanika* (Classical mechanics), M.: Science, 1975, 416 p.
5. **Landau L. D., Lifshitz E. M.** *Teoreticheskaya fizika* (Theoretical physics: V. I, Mechanics), 5 ed, M.: FIZMATLIT, 2007, 224 p.
6. **Sludsky F. A.** Zametka o nachale naimen'shego dejstviya (A note on the principle of least action), *Variational principles of mechanics*, M.: FIZMATGIZ, 1959, pp. 388–391.

Для цитирования: Макаров П. А. О вариационных принципах механики консервативных и неконсервативных систем // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2 (23). С. 46–59.*

For citation: Makarov P. A. On the variational principles of the mechanics of conservative and non-conservative systems, *Bulletin of Syktuykar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, 2 (23), pp. 46–59.

*Санкт-Петербургский национальный
исследовательский академический университет*

Поступила 06.05.2017