Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 2 (23). 2017

УДК 511.0

ТРАКТОВКИ ТЕОРЕМ ПАППА: ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ И ИНВОЛЮТИВНОСТЬ

Р. Р. Пименов

Дорисовав к чертежу проекции стрелки, мы увидим инволютивное преобразование. Геометрические чертежи превращаются в диаграммы инволюций и их композиций. Это упрощает понимание и работу с известными теоремами, а при обобщении на многомерные пространства легко связывает геометрию сфер с проективным пространством и неевклидовыми геометриями.

Если к теореме Паппа применить *геометрию перпендикулярного* и вместо слова *инцидентность* использовать слово *перпендикулярность*, мы получим истинные и содержательные геометрические утверждения.

Ключевые слова: теорема Паппа – Паскаля, инволютивность, перпендикулярность, проективная геометрия, инверсия.

1. Появление инволютивных стрелок

1.1. Инволютивность и теорема Паппа

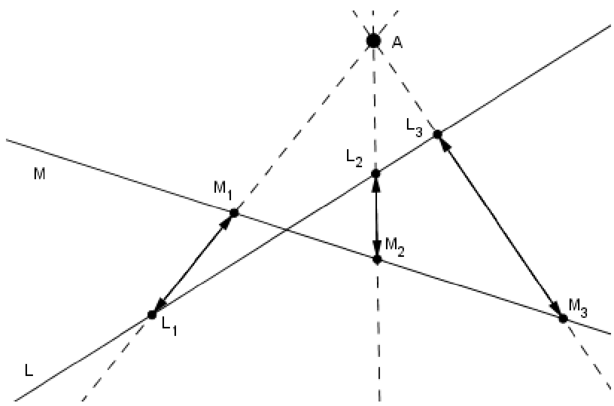

Рис. 1. Проекция как инволюция. Определение A-отображения

На рис. 1 общеизвестному чертежу проекции прямой L на прямую M из точки A пририсованы стрелки. Это дает новое понимание: теперь мы имеем дело не с проекцией, а с преобразованием, при котором точки прямых L и M меняются местами, как показано на чертеже. Напомним: преобразование f, обратное к которому совпадает с ним самим, называется инволютивным преобразованием, или инволюцией: $f(f(x)) = x$ для всех x. Произвольная точка A на плоскости (не лежащая на данных прямых L и M) задает инволютивное преобразование, меняющее местами точки прямых, как показано на чертеже.

Связав с точками плоскости отображение точек на двух прямых, мы можем ставить алгебраические вопросы про эти отображения. Назовем изучаемые отображения A-отображениями. Мы будем пользоваться этим названием, даже если речь идет о точке B или C. Действия точки A на произвольную точку X мы будем обозначать $A(X)$. В каком случае A-отображения, заданные точками A и B, коммутируют: $A \circ B = B \circ A$? Какие условия это равенство накладывает на расположение точек A и B?

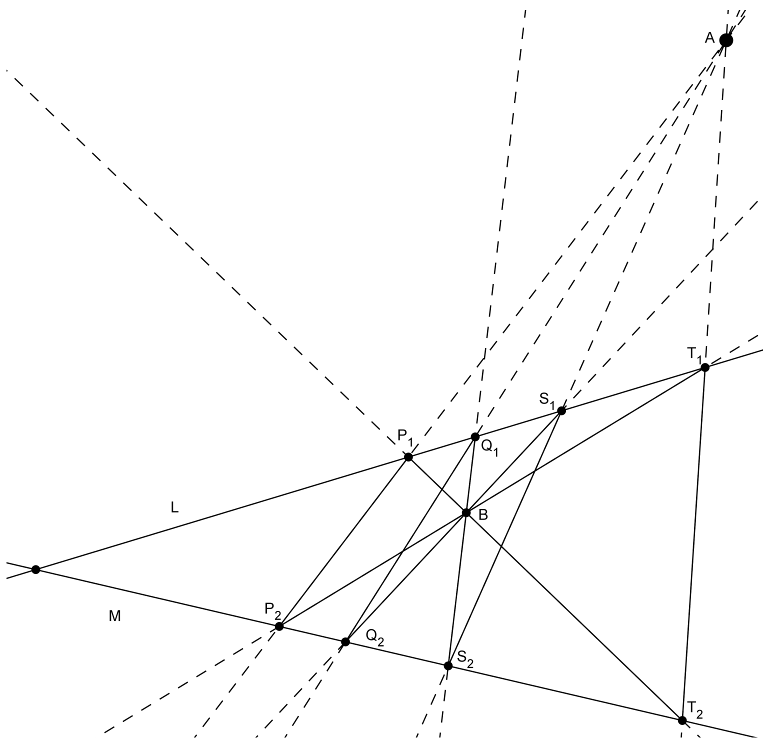

Рис. 2. Коммутативность и проекция

Рассмотрим на рис. 2 четырехугольник $Q_1Q_2S_2S_1$, в котором $A(S_1) = S_2$ и $A(Q_1) = Q_2$. Если точка B, как изображено на чертеже, — точка пересечения диагоналей этого четырехугольника, то требование коммутативности отображений, определенных точками A и B, выполняется для точки Q_1: $B(A(Q_1)) = B(Q_2) = S_1 = A(B(Q_1)) = A(S_2) = S_1$.

Это условие оказывается и достаточным: если точка B лежит в пересечении диагоналей какого-то четырехугольника, вершины которого меняются местами при A-отображении, то A-отображения, определенные точками A и B, коммутируют. Это изображено на чертеже четырехугольником $P_1P_2T_2T_1$. Мы можем сформулировать следующее геометрическое утверждение: *если B – точка пересечения диагоналей четырехугольника, и мы возьмем произвольную точку P_1, то $B(P_1$ и $B(A(P_1)$ лежат на одной прямой с A.* Это утверждение алгебраически означает коммутирование двух рассматриваемых A-отображений. Отметим, что коммутируемость двух A-отображений гарантируется их коммутированием всего в одной точке.

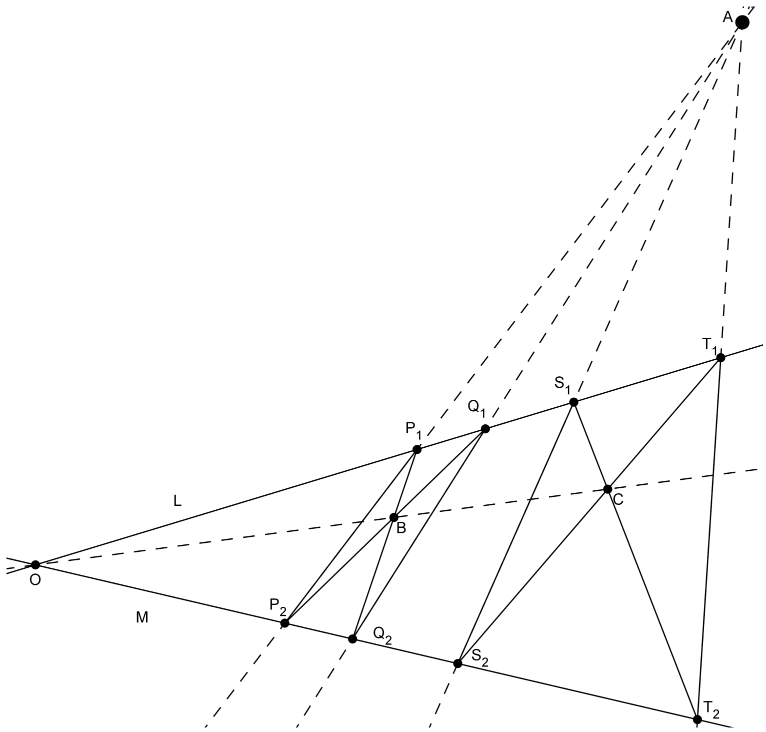

Рис. 3. Прямая OB, определяющая коммутирующие отображения

С другой стороны (см. рис. 3), все точки пересечения диагоналей рассматриваемых четырехугольников лежат на одной прямой, проходящей через точку пересечения прямых L и M. Известно, что эта прямая вместе с прямыми L, M и прямой, проходящей через пересечение L и M, образует гармоническую четверку прямых.

Итак, мы нашли геометрическое значение алгебраического равенства: $A \circ B = B \circ A$. Для этого *необходимо и достаточно, чтобы B лежало на прямой, создающей дополняющие три перечисленные выше прямые до гармонической четверки прямых. Можно сформулировать иначе: B должно лежать на пересечении диагоналей какого-нибудь четырехугольника, вершины которого есть образы и прообразы точек при A-отображении с центром в точке A.*

Рассмотрим теперь алгебраическое равенство $(C \circ B \circ A)^2 = e$, означающее, что $C \circ B \circ A$ — инволютивно. Равенства такого вида очень существенны при изучении симметрий, например, если оно верно для симметрий относительно трех прямых A, B, C, то три эти прямые лежат в одном пучке (пересекаются в одной точке или параллельны). См, например [1] или [2]. Что оно означает геометрически в нашем случае?

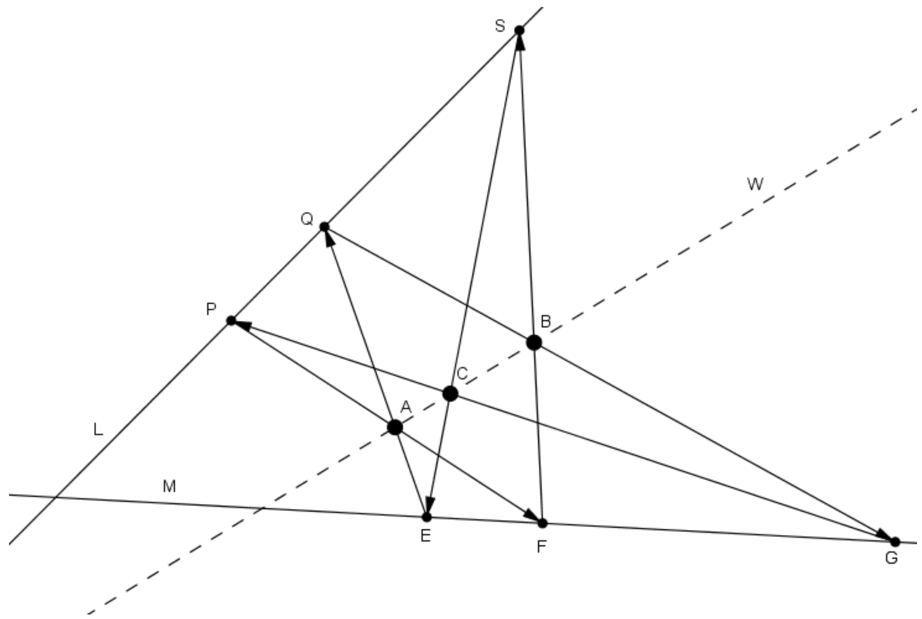

Рис. 4. Действие композиции $C \circ B \circ A$

Проследим на рис. 4 за перемещением точки P под действием рассматриваемых A-отображений. $A(P) = F$, $B(F) = S$, $C(S) = E$ и $C(B(A(P))) = S$. $A(E) = Q$, $B(Q) = G$. Для того чтобы $C(B(A(C(B(A(P)))))) = P$, необходимо, чтобы $C(G) = P$. Это означает, что чертеж на шестом шаге замыкается, что мы возвращаемся в точку P. Это и изображено. Полученная конфигурация точек в точности совпадает с конфигурацией теоремы Паппа: точки P, Q, S лежат на одной прямой, E, F, G – на другой, а точки A, B, C лежат, как им предписано теоремой Паппа. Из теоремы Паппа следует, что A, B, C необходимо лежат на одной прямой. Также верно, что если A, B, C лежат на одной прямой, то чертеж замыкается, как это необходимо для тождества $C(B(A(C(B(A(P)))))) = P$. Обратим внимание: мы выбрали точку P произвольно и получили отсюда геометрическое требование для A, B, C – они лежат на одной прямой. Легко показать, что в этом случае, как и в предыдущем, если тождество выполняется для какой-то одной точки, оно выполняется для всех точек (исключая вырожденные случаи, например, мы не рассматриваем точку пересечения прямых L и M).

Итак, мы получили геометрический ответ: *равенство* $(C \circ B \circ A)^2 = e$ *верно тогда и только тогда, когда* A, B, C *лежат на одной прямой.* Сделаем следующий шаг. Пусть нам даны две точки A и B. Мы можем определить отображение $A \circ B \circ A$. Это отображение (сопряженное с B при помощи A) также будет инволютивно. Отвечает ли этому отображению какая-нибудь точка C, такая, что A-отображение с центром в C совпадает с $A \circ B \circ A$? Это позволило бы нам по двум точкам с помощью A-отображений строит третью. Из сказанного выше следует, что если такая точка C существует, то она необходимо лежит на той же прямой, что A и B.

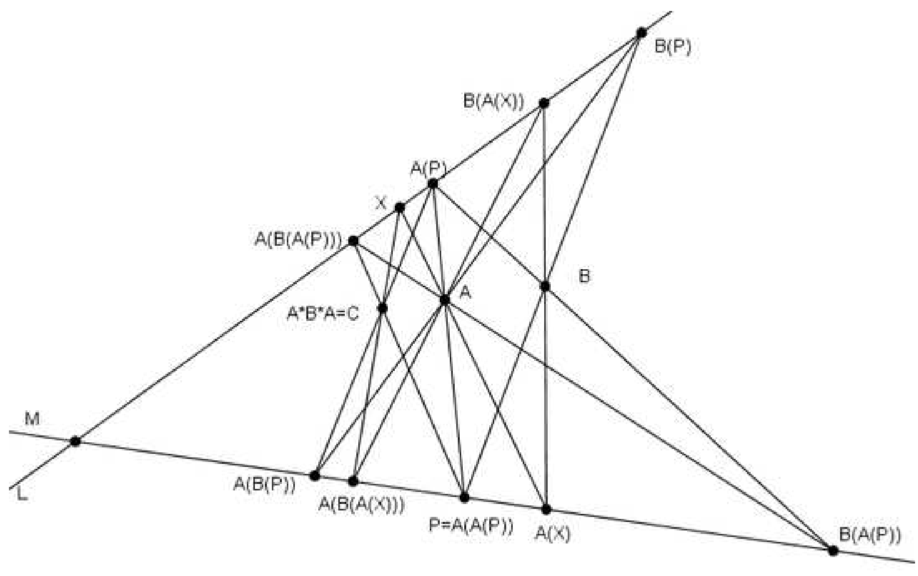

Рис. 5. Построение сопряженной инволюции $A \circ B \circ A$

Рис. 5 показывает, что такая точка C существует. Мы начинаем движение с произвольной точки P и получаем точку $A(B(A(P)))$. Точка C должна лежать на прямой, проходящей через P и $A(B(A(P)))$. Мы можем начать движение с точки $A(P)$ и придем в точку $A(B(P))$. Значит, наша точка C лежит и на прямой, проходящей через эти две точки. Мы нашли две прямые, на которых обязана лежать C. Если она существует – лежит на пересечении этих двух прямых. Это требует, чтобы для произвольной точки X точки $A(B(A(X)))$, X и точка пересечения двух указанных выше прямых лежат на одной прямой. Это в самом деле имеет место.

Итак, мы доказали, что существует точка, представляющая преобразование $A \circ B \circ A$.

1.2. Инволютивности в теореме Паппа – Паскаля

Проецирование окружности на себя также можно трактовать как инволютивное преобразование:

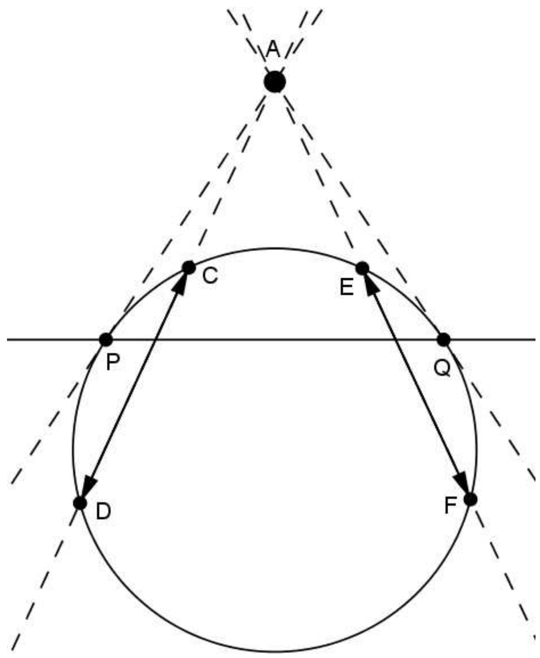

Рис. 6. A-отображение окружности

Эти инволютивные преобразования на рис. 6 существенно различаются в зависимости от того, где лежит точка A: вне или внутри окружности. В первом случае у A-отображения есть две неподвижные точки (в которых касательные из точки A касаются окружности), во втором неподвижных точек нет. Мы зададим те же алгебраические вопросы про A-отображения окружности в себя, что и в предыдущем разделе. Когда два A-преобразования коммутируют?

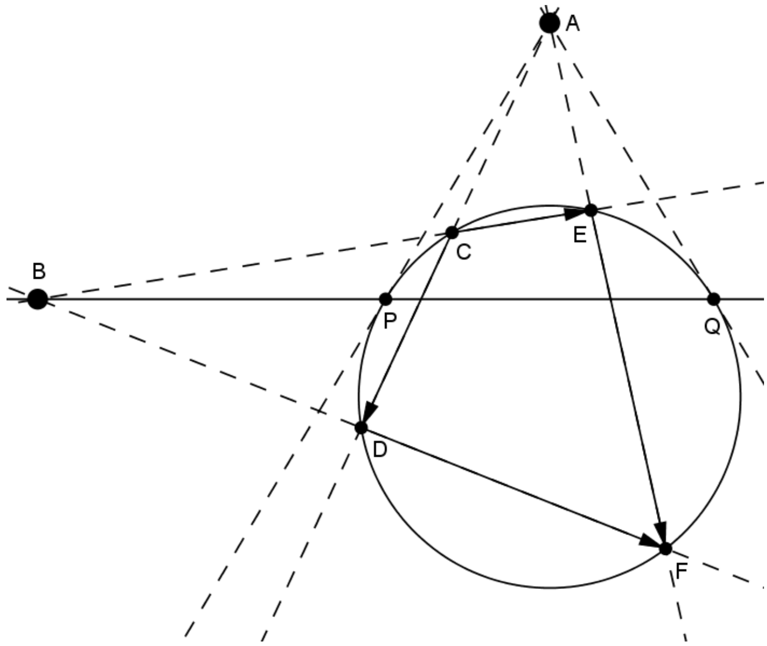

Рис. 7. Полярное соответствие и коммутативность

Рис. 7 подсказывает ответ. B лежит на поляре A, на прямой, проходящей через точки касания касательных к окружности, проходящих через A. Рассмотрим произвольную точку C на окружности. Пусть $A(C) = D$. Если $A(B(C)) = B(A(C))$, то $B(C)$ и $B(A(C))$ должны лежать на одной прямой с A. Это и изображено на чертеже. Если B есть пересечение сторон четырехугольника $CDEF$, пары вершин которого проективны относительно A, то $A(B(C)) = (C(B(A))$. Это условие и достаточно, как и в прошлый раз, при рассмотрении проекций двух прямых: если два A-отображения коммутируют в какой-то одной точке, то они коммутируют во всех точках. Это следует из хорошо известной теоремы о полярах: точки пересечения двух пар противоположных сторон четырехугольника, вписанного в окружность, пересекаются на взаимополярных точках (лежащих на полярах друг друга).

Когда композиция трех инволютивных A-преобразований снова инволютивна? И снова чертеж дает ответ, приводя на этот раз к теореме Паппа – Паскаля, часто называемой «теоремой о мистическом шестиугольнике».

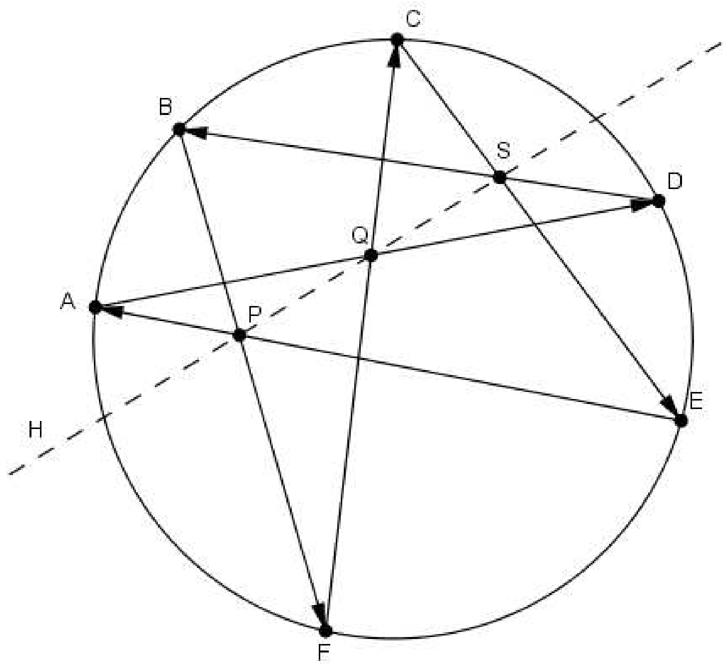

Рис. 8. Инволютивность композиции $P \circ S \circ Q$

Рассмотрим на рис. 8 действие A-преобразований с центрами в P, Q, S на точку A. $Q(A) = D$, $S(Q(A)) = B$, $P(S(Q(A))) = F$. Чтобы это отображение $P \circ S \circ Q$ было инволютивно на точке A, необходимо, чтобы оно перевело точку F снова в точку A: $Q(P(S(Q(A)))) = C$, $S(Q(P(S(Q(A))))) = E$, чтобы $P(E)$ равнялось A, необходимо (и достаточно), чтобы P, E, A лежали на одной прямой. В случае если P, Q, S лежат на одной прямой это выполняется. Очевидно, что рассматриваемые точки образуют конфигурацию теоремы Паппа – Паскаля. Также теорема Паппа – Паскаля гарантирует, что если три точки P, Q, S лежат на одной прямой, то построение замыкается: точки A, P, E также всегда будут лежать на одной прямой. Отметим, что, как и ранее, достаточно инволютивности преобразования $P \circ S \circ Q$ на произвольной точке, чтобы оно было инволютивно для всех точек. Разумно задать вопрос о построении точек на основе A-отображений, как это было сделано ранее при рассмотрении рис. 5.

A-отображения окружности оказываются даже более полезными, чем рассмотренные ранее A-отображения пар прямых. Мы можем взять обнаруженные свойства A-отображений за определение прямых на плоскости. Видно, что это можно сделать двумя способами: три точки W, V, Z можно назвать лежащими на одной прямой если существует точка U, такая, что все три A-отображения с центрами в W, V, Z

коммутируют с A-отображением с центром в U, а можно назвать их лежащими на одной прямой, если композиция A-отображений с центрами в указанных точках сама инволютивна. В многомерном пространстве ситуация меняется, мы вернемся к этому в последнем разделе статьи.

2. Планиметрическая реализация обобщенной теоремы Паппа

Мы обобщим теорему Паппа, пользуясь методом *геометрии перпендикулярного* [2]. Этот метод расширяет общеизвестное свойство двойственности точек и прямых в проективной геометрии. Пользуясь им, мы можем говорить не о точках или прямых, а о произвольных *элементах* теоремы (каждый из которых может быть точкой или прямой). Вводится понятие *соединителя*: точка и точка соединяются проходящей через них прямой, прямая и прямая соединяются точкой их пересечения (за исключением параллельных прямых), а *точка и прямая соединяются перпендикуляром из точки на прямую.* В [2] даны все необходимые определения и вводится обозначение $S(A, B)$ – соединитель A и B. Обобщением понятия коллинеарных точек будет понятие: «*элементы имеющие общий соединитель*». A, B, C имеют общий соединитель, если $S(A, B) = S(B, C) = S(A, C)$. Обратим внимание: A, B, C в геометрии перпендикулярности — это элементы, каждый из которых может быть точкой или прямой, и что рассматриваемая ранее композиция симметрий $C \circ B \circ A$ в этом случае снова симметрия (заранее неизвестно, относительно точки или прямой).

Сформулируем обобщенную теорему Паппа:

Теорема 2.1. ***Обобщенная теорема Паппа.*** *Пусть A_1, A_2, A_3 – три элемента, имеющие общий соединитель, B_1, B_2, B_3 – три других элемента, также имеющие общий соединитель. Тогда три соединителя $S(S(A_1, B_2), S(A_2, B_1))$, $S(S(A_1, B_3), S(A_3, B_1))$, $S(S(A_2, B_3), S(A_3, B_2))$ сами имеют общий соединитель.*

Пример прочтения теоремы Паппа с помощью *геометрии перпендикулярного* приведен на рис. 9. Вместо трех точек, лежащих на прямой L, мы рассматриваем три прямые A_1, A_2, A_3, перпендикулярные L. Точно так же отношение инцидентности заменено на отношение перпендикулярности, и на прямой M мы рассматриваем три прямые B_1, B_2, B_3, перпендикулярные M, а не три точки. В теореме Паппа далее мы проводим прямые A_1B_2, A_2B_1 и т.д. Сейчас мы находим точки пересечения: $A_1 \bigcap B_2, A_2 \bigcap B_1$. В теореме Паппа далее мы нашли точки пересечения проведенных прямых, сейчас мы проводим прямые через пары построенных точек. Теорема Паппа утверждала, что три итоговые точки лежат на одной прямой, наше прочтение утверждает, что три итоговые прямые пересекаются в одной точке.

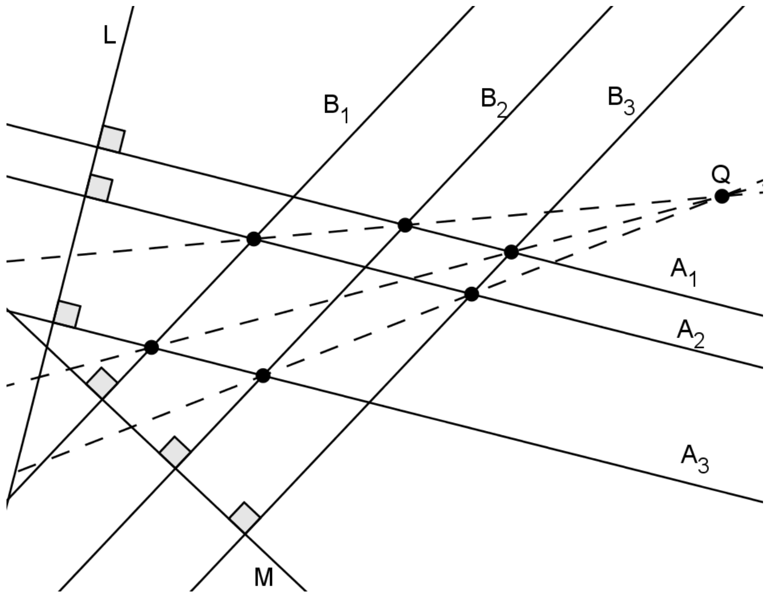

Рис. 9. Обобщенная теорема Паппа в параллелограмме

И это так, что видно на рис. 9, перед нами известная теорема о параллелограмме, разбитом на четыре части двумя прямыми, параллельными его сторонам. Диагонали трех возникающих параллелограммов, как показано на чертеже, пересекаются в одной точке. Обратим внимание: хотя мы заменили исходные точки прямыми, перпендикулярными данным, в параллелограмме теоремы нет перпендикулярностей. Условие перпендикулярности стало означать параллельность друг другу прямых A_1, A_2, A_3 и прямых B_1, B_2, B_3. Этого и следовало ожидать, поскольку две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой.

Внесем в наш чертеж изменение. В [2] показано, что в обобщенной с помощью перпендикулярности теореме Дезарга можно сокращать число элементов теоремы, приравнивая некоторые из них друг другу. Так была обнаружена связь конфигурации элементов теоремы Дезарга и теоремы о пересечении высот треугольника. Также можно поступать и с теоремой Паппа, получая интересные частные случаи. Прямые L и M произвольны, следовательно, они могут быть и перпендикулярны. Но в этом случае мы можем считать, что $L = B_1$ и $M = A_1$. Это изображено на рис. 10.

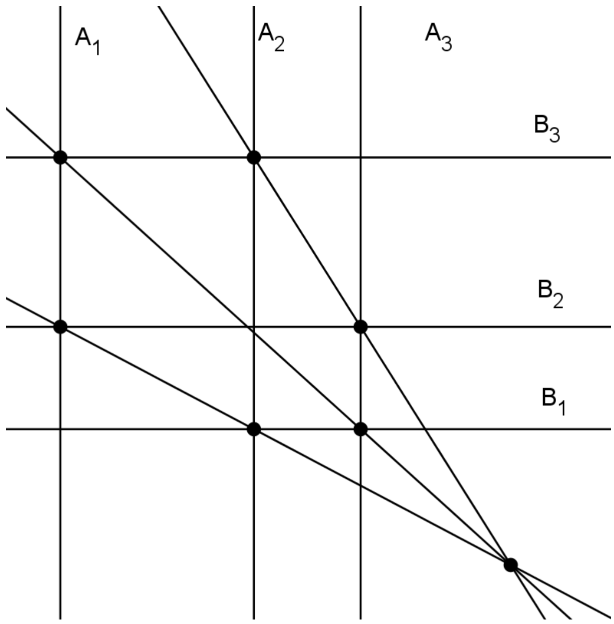

Рис. 10. Обобщенная теорема Паппа в прямоугольнике

Параллелограмм превратился в прямоугольник, и получаемая теорема упростилась: если прямоугольник разбить на четыре части двумя параллельными его сторонам прямыми, то диагонали трех полученных прямоугольников пересекаются в одной точке.

Мы можем также получить афинную (см. например, [6]) теорему Паппа как частный случай обобщенной теоремы Паппа. Для афинного варианта теоремы Паппа нужно вторую прямую считать бесконечно удаленной, в этом случае прямые, пересекающиеся на ней, параллельны. Рассмотрим три прямые, проходящие через одну точку и три точки, лежащие на одной прямой. Перпендикуляры, проведенные из трех точек на эти прямые, и создают конструкцию афинной теоремы Паппа, так как две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой. Мы не приводим чертеж, так как выше уже достаточно разобраны случаи, где главную роль играют параллельные прямые. В [2] приведена таблица, описывающая все возможные случаи, возникающие при подобном обобщении теоремы Дезарга. Всего обнаружено 13 случаев. Столько же случаев возможно и в обобщенной теореме Паппа. Подстановку вместо обобщенных «элементов» точек или прямых мы называем здесь и в [2] *планиметрической реализацией* обобщенной теоремы. Не все из них геометрически содержательны, рис. 11 дает пример, где мы старались уменьшить число возникающих параллельных прямых.

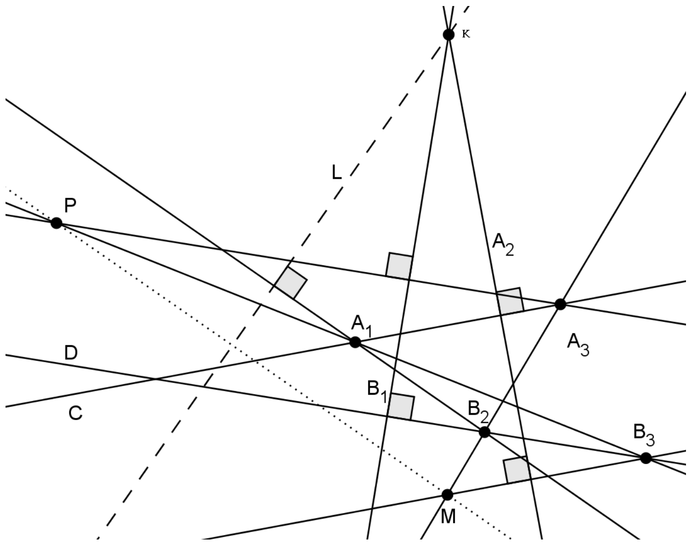

Рис. 11. Вариант планиметрической реализации обобщенной теоремы Паппа

Опишем подробно все элементы чертежа. Три первых элемента теоремы — это *точка* A_1, *прямая* A_2 и *точка* A_3. Точки лежат на прямой C, а прямая ей перпендикулярна. Следующие три элемента — *прямая* B_1 и *точки* B_2, B_3. Прямая перпендикулярна прямой D, точки лежат на ней. Точка K – соединитель элементов A_1 и B_2, прямая A_2B_1 – соединитель указанных в ней элементов, соединитель этой прямой и точки K – прямая L. Соединитель прямой A_2 и точки B_3 – перпендикуляр из точки на прямую, соединитель точек B_2 и A_3 – прямая, пересекающаяся с ранее построенным перпендикуляром в точке M. Соединитель точек A_1 и B_3 — прямая, она пересекается с соединителем A_3 и B_1, который есть перпендикуляр из точки на прямую, точка пересечения обозначена P. Итак, три результирующих элемента: точки P, M и прямая L.

Что утверждает обобщенная теорема Паппа об этих трех элементах? Она утверждает, что прямая, проходящая через P и M, перпендикулярна L. Это в самом деле имеет место.

2.1. Попытка планиметрической реализации теоремы Паппа – Паскаля

После рассмотренных обобщений теоремы Паппа, естественно ожидать, что теорему Паппа – Паскаля также удастся обобщить в духе геометрии перпендикулярного. Ведь сама идея заменять точки прямыми, а прямые точками восходит именно к рассмотрению вписанных и описанных треугольников, замены касательных точками касания. Но теорема не обобщается.

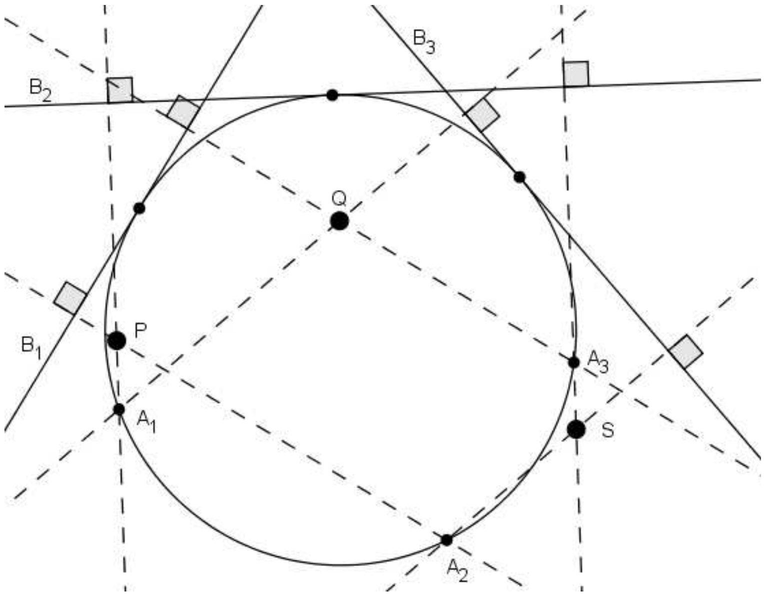

Рис. 12. Попытка обобщения теоремы Паппа – Паскаля

На рис. 12 мы заменили точки B_1, B_2, B_3 на прямые B_1, B_2, B_3 и провели соединители, аналогично тому, как делали ранее. Три полученных в итоге соединителя точки P, Q, S не лежат на одной прямой. Отметим, что раньше мы слово «инцидентность» заменяли на «перпендикулярность», точку, лежащую на данной прямой, заменяли на прямую, перпендикулярную данной прямой. Сейчас же мы точки касания заменили на саму касательную и можем только констатировать, что отрицательный результат, устанавливающий границы метода, также имеет интерес и ценность.

3. Развитие темы и дискуссионные определения

Прежде всего укажем, что обобщение теоремы Паппа, приведенное во втором разделе, тесно связано с исследованиями С. Табачникова в [7]. В его статье рассматривается трехмерная реализация обобщенной теоремы Паппа. Ее элементами являются прямые в трехмерном пространстве, а соединителем двух элементов (автор использует не слово «соединитель», а слово «кручение», skew) называется общий перпендикуляр двух прямых. Подробней мы пишем об этом в [3] и [2], где развиваем геометрию перпендикулярного и рассматриваем перспективы ее обобщения на многомерные пространства.

Перейдем к трактовке геометрических чертежей как диаграмм инволютивных отображений и A-отображений. Мы будем говорить про многомерные обобщения. Мы можем трактовать проецирование из точки A сферы в себя как инволютивное отображение сферы, точно так же как мы ранее делали с окружностью. Если A расположено вне сферы, то у этого изображения есть неподвижная окружность (касательная окружность конуса с вершиной A, касающегося сферы). Мы можем трактовать это отображение как инверсию сферы относительно этой неподвижной окружности. Если A лежит внутри сферы, то касательного конуса нет, соответственно, нет и неподвижных точек у A-отображения. В этом случае мы можем трактовать A-отображение как мнимую инверсию сферы, пользуясь распространенным, но немного неудачным термином. Как его можно заменить, см. [5], где также рассматриваются и A-отображения. В [4] подробно показывается, как с помощью A-отображений сферы построить модели евклидовой, лобачевского и римановой планиметрии. То, что A-отображения сферы можно рассматривать как инверсии сферы, очень существенно: мы можем мыслить и определить их, теперь не выходя за пределы самой сферы, опираясь только на геометрию окружностей. Но A-отображения настолько наглядны, что в дальнейшем мы говорим о них, а не об инверсиях.

Для определенности будем считать, что точка A – вне сферы. В этом случае A-отображения, коммутирующие с данным отображением, лежат в плоскости, полярной к A. Те A-отображения, коммутирующие с данным, центр которых вне сферы, определяют преобразования сферы в себя, их можно считать осевыми симметриями геометрии Лобачевского, а те A-отображения, центр которых внутри сферы, симметриями относительно точек. Все это наглядно видно в полярной плоскости: она пересекает сферу по окружности, и получаемая модель геометрии может ассоциироваться с точками полярной плоскости, лежащей внутри этой окружности. Но сейчас мы воспользуемся A-отображениями не для построения моделей неевклидовых геометрий, а для построения модели проективного пространства исходя из геометрии сферы. Мы коснемся также геометрии мира Минковского.

Многомерная геометрия сфер определяет проективное пространство, если каждому A-отображению многомерной сферы поставить в соответствие его центр. При этом надо считать сами точки сферы также элементами проективного пространства (при желании можно считать, что точка сферы определяет отображение всей сферы в эту точку).

Определение 3.1. Точками n-мерного проективного пространства назовем множество всех A-отображений сферы размерности $n-1$ и множество всех точек самой сферы.

Определение 3.2. Гиперплоскостью n-мерного проективного пространства называется множество всех A-отображений, коммутирующих с произвольным A-отображением сферы.

Отсюда уже можно определить прямую как пересечение нужного числа определенных ранее гиперплоскостей (это будет множество A-отображений, коммутирующих с какими-то $n-1$ A-отображениями. Но можно дать и следующее определение, основанное на теореме Паппа – Паскаля:

Определение 3.3. Три A-отображения сферы P, Q, S называются лежащими на одной прямой, если их композиция $P \circ Q \circ S$ инволютивна.

Вряд ли трудно установить тождественность этого определения и предложенного ранее на основе пересечения гиперплоскостей. Отметим, что на самом деле мы получили структуру, более богатую, чем проективное пространство: между гиперплоскостями естественно вводится отношение перпендикулярности. Две гиперплоскости можно назвать перпендикулярными, если поляра одной из них лежит на другой. В терминологии коммутирующих A-отображений это звучит так: пусть одна гиперплоскость – множество A-отображений, коммутирующих с отображением в центре P, а вторая гиперплоскость – множество A-отображений, коммутирующих с отображением с центром в Q; если A-отображения с центрами в P и Q коммутируют между собой, то две названные гиперплоскости мы называем перпендикулярными.

Наличие перпендикулярности в проективном пространстве означает наличие в нем метрики, расстояния. С метрической точки зрения совокупность A-отображений, центры которых лежат вне сферы, определяет геометрию Минковского.

Список литературы

1. **Бахман Ф.** Построение геометрии на основе понятия симметрии / пер. с нем. Р. И. Пименова; под ред. И. М. Яглома. М.: Наука, 1969. 380 с.

2. **Пименов Р. Р.** Обобщения теоремы Дезарга: геометрия перпендикулярного // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2016. Вып. 1 (21). С. 28–43.*

3. **Пименов Р. Р.** Обобщения теоремы Дезарга: скрытые пространства // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2016. Вып. 1 (21). С. 44–57.*

4. **Пименов Р. Р.** Отображения сферы и неевклидовы геометрии // *Математическое просвещение. 1999. Сер. 3. Вып. 3. С. 158–166.*

5. **Пименов Р. Р.** Эстетическая геометрия или теория симметрий. СПб.: Школьная лига, 2014. 288 с.

6. **Харстсхорн Р.** Основы проективной геометрии / пер. с англ. Е. Б. Шабат; под ред. И. М. Яглома. М: Мир, 1970.

7. **Tabachnikov S.** Skewers // *Arnold Mathematical Journal. 2. 2016. Pp. 171–193.*

Summary

Pimenov R. R. The interpretation and generalizations of the Pappus's theorems: involutions and perpendicularity

If we draw the arrows on the picture of projection we can see involutive transformation. Geometric picture now is a diagram of involutions and their compositions. It gives useful interpretation for theorems of projective geometry.We generalize these arrows to multidimensional spaces that connect geometry of spheres with projective space and non-euclidian geometries. We study perpendicularity also. We change the word incidence for the word perpendicularity in the Pappus's theorem and get true and meaningful propositions.

Keywords: theory of numbers, Fermat's little theorem, Dirichlet's theorem.

References

1. **Bachmann F.** *Postroenie geometrii na osnove ponyatiya simmetrii* (Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff), M.: Nauka, 1969, 380 p.

2. **Pimenov R. R.** Obobshcheniya teoremy Dezarga: geometriya perpendikulyarnogo (The generalization of the Desargues's theorem and geometry of perpendicularity), *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2016, №1 (21), pp. 28–43.

3. **Pimenov R. R.** Obobshcheniya teoremy Dezarga: skrytye prostranstva (The generalization of the Desargues's theorem and hidden subspaces), *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2016, №1 (21), pp. 44–57.

4. **Pimenov R. R.** Otobrazheniya sfery i neevklidovy geometrii (Mapping the sphere and non-euclidian geometries), *Mathematical Education*, 1999, ser. 3, № 3, pp. 158–166.

5. **Pimenov R. R.** *Ehsteticheskaya geometriya ili teoriya simmetrij* (Aesthetic geometry or theory of symmetries). SPb: School league, 2014, 288 p.

6. **Hartshorne R.** *Osnovy proektivnoj geometrii* (Foundations of Projective Geometry). Lecture notes at Harvard University. W. A. Benjamin 1nc, New York, 1967.

7. **Tabachnikov S.** Skewers, *Arnold Mathematical Journal*, 2, 2016, pp. 171–193.

Для цитирования: Пименов Р. Р. Трактовки теорем Паппа: перпендикулярность и инволютивность // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2 (23). С. 29–45.*

For citation: Pimenov R. R. The interpretation and generalizations the Pappus's theorems: involutions and perpendicularity, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, 2 (23), pp. 29–45.

Санкт-Петербургский национальный исследовательский академический университет

Поступила 29.05.2017