ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 2 (23). 2017

УДК 519.62, 519.63, 532.5

ФРОНТАЛЬНАЯ ВОЛНА НАПОРНОГО ТЕЧЕНИЯ

Н. А. Беляева, А.Ф. Яковлева

Строится неоднородное решение диффузионно-кинетического уравнения модели напорного течения структурированной жидкости в области немонотонности расходно-напорной характеристики. Решение соответствует гетероклинической траектории, соединяющей два устойчивых однородных состояния.
Ключевые слова: напорное течение, однородные равновесные состояния, гетероклиническая траектория, бегущая волна.

1. Введение

В работе КПП, посвященной распространению доминантного гена [2], впервые представлено решение типа "бегущей волны". В дальнейшем подобные подходы были реализованы в задачах теории горения [4] и других областях математической физики, связанных с решением динамических задач, описываемых параболическими уравнениями [3].

В работах [4], [1] исследовано однородное напорное течение двухкомпонентной структурированной жидкости с переменной вязкостью, определена область значений параметров задачи, соответствующих немонотонному характеру расходно-напорной характеристики и, соответственно, возникновению трех равновесных состояний. При этом два крайних состояния устойчивы, а среднее неустойчиво.

Целью настоящей работы является исследование неоднородного решения диффузионно-кинетического уравнения модели напорного течения в области немонотонности расходно-напорной характеристики. Решение соответствует гомоклинической траектории, т. е. траектории фазового пространства рассматриваемого движения, выходящей из одного состояния равновесия и входящей в другое состояние равновесия.

2. Постановка задачи

Рассмотрим безразмерную усредненную по радиусу модель напорного течения двухкомпонентной структурированной жидкости по трубе кругового сечения:

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} + \omega v \frac{\partial a}{\partial x} = \delta \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + 1 - a - a\chi \exp\left(\frac{v}{1+\lambda a}\right), \tag{1}$$

$$\epsilon \frac{\partial v}{\partial \tau} = -\frac{v}{1+\lambda a} - \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2}$$

с начальными и граничными условиями:

$$\tau = 0 : v = 0, a = a_0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial a}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial a}{\partial x}\Big|_{x=1} = 0. \tag{4}$$

Здесь (1) — диффузионно-кинетическое уравнение, (2) — уравнение движения, a – степень структурных превращений, v – безразмерная скорость течения, u – давление, τ – время, x – осевая координата $0 \le x \le 1$, $\omega, \delta, \chi, \lambda > 0$ – параметры жидкости.

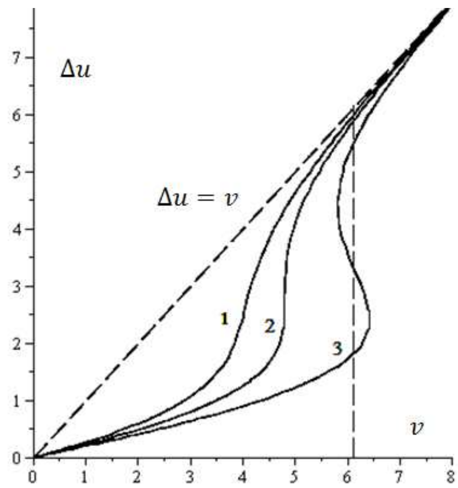

Рис. 1. Расходно-напорная характеристика, 3: $\lambda = 3, \chi = 0.18$

В работе [1] методом фазового портрета проанализированы соответствующие системе (1) — (4) однородные решения $a_1 < a_2 < a_3$ в области немонотонности расходно-напорной характеристики (рис. 1), определяемой уравнением:

$$v = \Delta u \left(1 + \frac{\lambda}{1 + \chi \exp \Delta u}\right),$$

где $\Delta u = u(0) - u(1)$ — перепад давления. Показана устойчивость однородных равновесных состояний a_1, a_3, отвечающих возрастающим участкам расходно-напорной характеристики, неустойчивость состояния a_2, соответствующего убывающему участку.

Выберем значения параметров жидкости χ, λ, скорость течения v, отвечающие немонотонному характеру расходно-напорной характеристики (рис. 1, кривая 3). При указанном выборе параметров исследуем диффузионно-кинетическое уравнение (1) на формирование неоднородных решений в трубе бесконечной длины, параметр $\delta = 1$. Для поиска таких решений применим к уравнению (1) метод «бегущей волны».

Введем переменную

$$\xi = x + \eta\tau,$$

$$-\infty \le \xi \le +\infty,\ -\infty \le x \le +\infty,\ \tau \ge 0,$$

где η – скорость волны. Тогда степень структурных превращений a будем искать в виде:

$$a = a(\xi) = a(x + \eta\tau).$$

В этом случае производные искомой функции a запишутся так:

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = \frac{da}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \eta\frac{da}{d\xi}, \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{da}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{da}{d\xi}, \qquad (5)$$
$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right) = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{da}{d\xi}\right)\frac{d\xi}{dx} = \frac{d^2 a}{d\xi^2}.$$

Таким образом, исследуемая задача, то есть уравнение (1) и граничные условия (4) с учетом (5), преобразуются к виду:

$$\frac{d^2 a}{d\xi^2} - (\eta + \omega v)\frac{da}{d\xi} + 1 - a - a\chi \exp\left(\frac{v}{1 + \lambda a}\right) = 0, \qquad (6)$$

$$\frac{da}{d\xi}\Big|_{\xi \to -\infty} = \frac{da}{d\xi}\Big|_{\xi \to +\infty} = 0. \qquad (7)$$

В общем случае функция $a = a(\xi)$ описывает неоднородный переходный процесс между устойчивыми однородными состояниями a_1 и a_3, т. е. решения, удовлетворяющие условиям:

$$a(-\infty) = a_1, \qquad a(+\infty) = a_3, \qquad (8)$$

или

$$a(-\infty) = a_3, \qquad a(+\infty) = a_1. \qquad (9)$$

Введем новые переменные:

$$x_1 = a, x_2 = \frac{da}{d\xi}, \tag{10}$$

и обозначим

$$1 - a - a\chi \exp\left(\frac{v}{1+\lambda a}\right) \equiv F(x_1, v),$$

тогда уравнение (6) примет вид нормальной системы:

$$\frac{dx_1}{d\xi} = x_2,$$
$$\frac{dx_2}{d\xi} = (\eta + \omega v)\, x_2 - F(x_1, v). \tag{11}$$

Точки равновесия системы (11) определяются условиями:

$$x_2 = 0,$$
$$(\eta + \omega v)\, x_2 - F(x_1, v) = 0. \tag{12}$$

Сопоставление системы (12) и условий для определения точек равновесия однородного напорного течения [4], [1] показывает их совпадение при рассматриваемом фиксированном значении скорости течения и параметров жидкости, соответствующих области немонотонности расходно-напорной характеристики. Фазовым пространством системы (11) является плоскость (x_1, x_2). Нахождение неоднородного решения уравнения (6) между двумя устойчивыми однородными состояниями соответствует построению гетероклинической траектории (рис. 2), выходящей из одного устойчивого однородного состояния и входящей в другое устойчивое равновесное состояние, т. е. направление движения системы вдоль траекторий: из a_1 в a_3 или, наоборот, из a_3 в a_1.

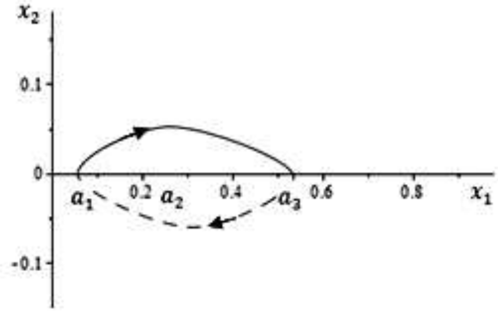

Рис. 2. Гетероклиническая траектория

3. Стоячая волна

Рассмотрим случай, когда $\eta = -\omega v$, тогда уравнение (6) примет вид:

$$\frac{d^2 a}{d\xi^2} + F(a, v) = 0, \tag{13}$$

Покажем, что в этом случае равны площади криволинейных трапеций F_1 и F_2, отсекаемые графиком функции $y = F(a, v)$ (скорость v фиксирована), между равновесными однородными состояниями, т. е. на отрезках $a_1 \le a \le a_2$ и $a_2 \le a \le a_3$ (рис. 3).

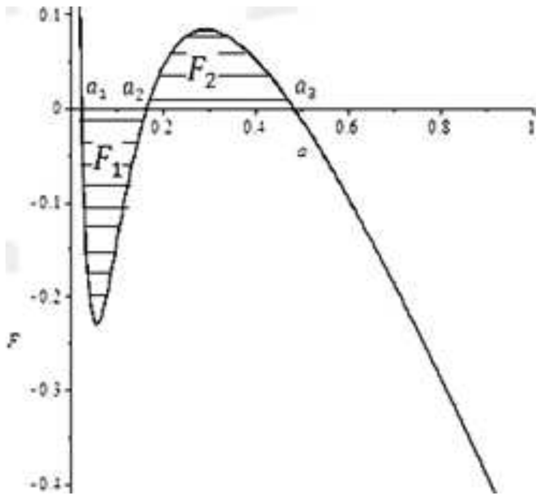

Рис. 3. График функции $y = F(a, v)$, $v = 6.08927, \lambda = 5, \chi = 0.18$

Перейдем к переменным x_1, x_2 в соответствии с формулами (10), тогда (13) примет вид нормальной системы:

$$\frac{dx_1}{d\xi} = x_2,$$
$$\frac{dx_2}{d\xi} = -F(x_1, v).$$

Разделим второе уравнение полученной системы на первое, получим:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{F(x_1, v)}{x_2}$$

или

$$x_2 dx_2 = -F(x_1, v) dx_1.$$

Проинтегрируем последнее выражение по отрезку от a_1 до a_3 :

$$\int_{a_1}^{a_3} x_2 dx_2 = -\int_{a_1}^{a_3} F(x_1, v) dx_1,$$

$$\left.\frac{{x_2}^2}{2}\right|_{a_1}^{a_3} = -\left(\int_{a_1}^{a_2} F(x_1, v) dx_1 + \int_{a_2}^{a_3} F(x_1, v) dx_1\right),$$

$$0 = \int_{a_1}^{a_2} F(x_1, v) dx_1 + \int_{a_2}^{a_3} F(x_1, v) dx_1. \tag{14}$$

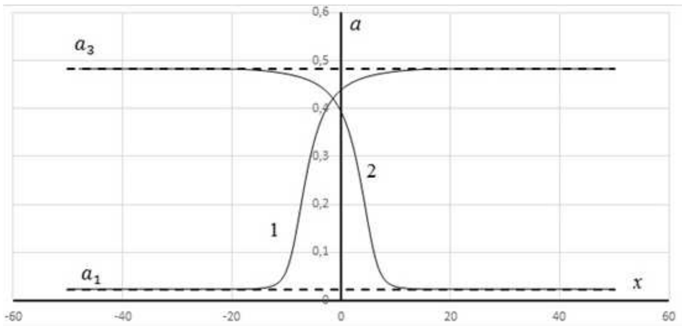

Рис. 4. Стоячие волны, $v = 6.0893, \lambda = 5, \chi = 0.18$

Вследствие того, что площадь трапеции

$$F_1 = -\int_{a_1}^{a_2} F(x_1, v) dx_1,$$

из (14) следует, что площади трапеций равны $F_1 = F_2$, т. е. условие

$$\eta = -\omega v \tag{15}$$

является условием равенства площадей. Уравнение (13) ввиду последней формулы соотношений (5) равносильно уравнению

$$\frac{d^2 a}{dx^2} + F(a, v) = 0, \tag{16}$$

которое описывает стационарное течение — стоячую волну. На рис. 4 изображены стоячие волны, удовлетворяющие условиям:

$$1. a(-\infty) = a_1, \qquad a(+\infty) = a_3,$$
$$2. a(-\infty) = a_3, \qquad a(+\infty) = a_1.$$

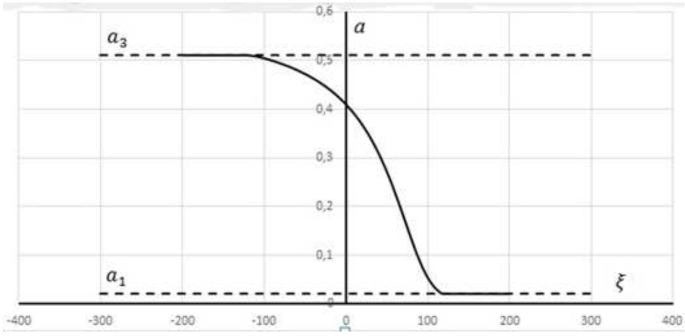

Рис. 5. $\lambda = 8, \chi = 0.3, \omega = 0.001, \eta = 50$

4. Бегущая волна

При нарушении условия равенства площадей (15) стоячая волна превращается в бегущую в форме волнового фронта. Этот случай соответствует модели (6), (7). Данная модель решается численно с использованием метода прогонки.

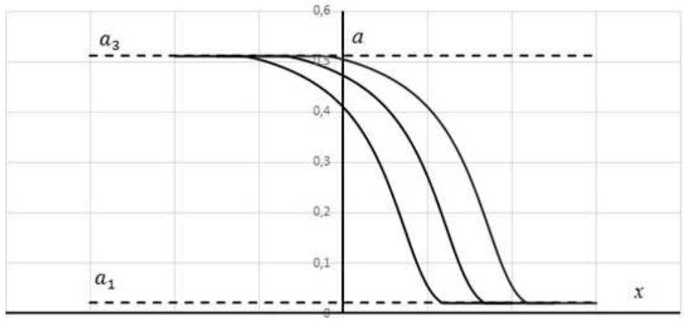

Рис. 6. Условия на рис. 5

Результаты численного анализа представлены на рис. 5 — 8. В случае $\eta > 0$ волновой фронт движется слева направо — реализуется случай, соответствующий рис. 5, 6: $a(-\infty) = a_3,\ \ a(+\infty) = a_1$.

Заметим при этом, что на рис. 6 осуществлен возврат к исходной переменной x и показано положение фронта в разные моменты времени.

В случае $\eta < 0$ волновой фронт движется справа налево — реализуется случай, изображенный на рис. 7, 8 и соответствующий условиям: $a(-\infty) = a_1,\ \ a(+\infty) = a_3$.

Таким образом, модель (6), (7) определяет семейство ограниченных монотонно возрастающих или монотонно убывающих решений, двига-

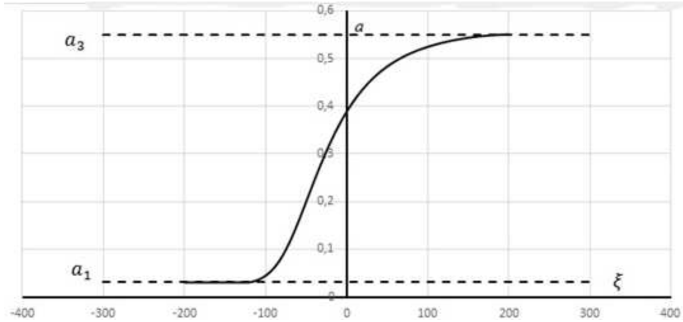

Рис. 7. $\lambda = 5, \chi = 0.16, \omega = 0.001, \eta = -30$

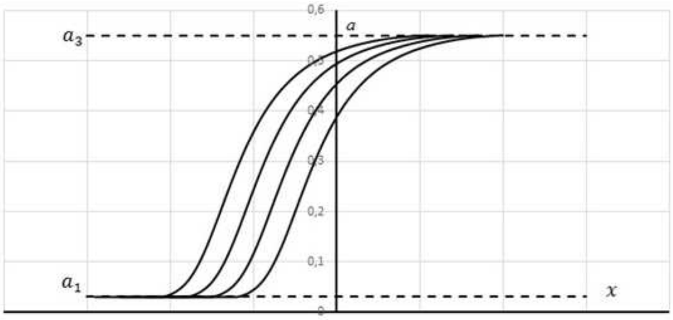

Рис. 8. Условия на рис. 7

ющихся в направлении оси x вправо или влево с постоянной скоростью η. При этом область распространения фронтальной волны достаточно узка.

Список литературы

1. **Беляева Н. А., Сажина А. Н.** Анализ усредненного напорного течения // *Двадцать третья годичная сессия Ученого совета Сыктывкарского государственного университета имени Питирима Сорокина (Февральские чтения) : сборник материалов / отв.ред. Н. С. Сергиева. Сыктывкар: Изд–во СГУ им. Питирима Сорокина, 2016. С. 60–69.*

2. **Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.** Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме. *М.: Бюл. МГУ. Секция А, 1937.*

3. **Холодниок М., Кулич А., Кубичек М., Марек М.** Методы анализа нелинейных динамических моделей. М.: Мир, 1991. 368 с.

4. **Худяев С. И.** Пороговые явления в нелинейных уравнениях. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

Summary

Belyaeva N. A., Yakovleva A. F. Frontal wave of pressure flow

The model of a pressure flow of a structured liquid is analyzed. An inhomogeneous solution of the diffusion-kinetic equation is constructed in the region of nonmonotonicity of the discharge-pressure characteristic. This solution corresponds to a heteroclinic trajectory connecting two stable homogeneous states.

Keywords: pressure flow, homogeneous equilibrium states, heteroclinic trajectory, traveling wave.

References

1. **Belyaeva N. A., Sazhina A. N.** Analiz usrednennogo napornogo techeniya (Analysis of the averaged pressure flow), *Twenty-third annual session of the Academic Council of Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin (February readings): a collection of materials / Otv.red. N. S. Sergiev*, Syktyvkar: Publishing House of SSU named after Pitirim Sorokin, 2016, pp. 60–69.

2. **Kolmogorov A. N, Petrovsky I. G, Piskunov N. S.** Issledovanie uravneniya diffuzii, soedinennoj s vozrastaniem kolichestva veshchestva, i ego primenenie k odnoj biologicheskoj problem (An investigation of the diffusion equation, coupled with the increase in the amount of matter, and its application to a single biological problem), *Bul. Moscow State University. Section A*, 1937, 633 p.

3. **Kholodnik M., Klich A., Kubichek M., Marek M.** *Metody analiza nelinejnyh dinamicheskih modelej* (Methods of analysis of nonlinear dynamic models), *Moscow: Peace, 1991, 368 p.*

4. **Khudyaev S. I.** *Porogovye yavleniya v nelinejnyh uravneniyah* (Threshold phenomena in nonlinear equations), M.: Fizmatlit, 2003, 272 p.

Для цитирования: Беляева Н. А., Яковлева А. Ф. Фронтальная волна напорного течения // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2 (23). С. 3–12.*

For citation: Belyaeva N. A., Yakovleva A. F. Frontal wave of pressure flow, *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, 2 (23), pp. 3–12.

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 20.06.2017*