МАТЕМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 1 (22). 2017

УДК 512.55

ИДЕАЛЫ И КОНГРУЭНЦИИ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОЛУКОЛЕЦ

Е. М. Вечтомов[1]***, И. В. Орлова***

Изучаются идеалы и конгруэнции циклических полуколец как с коммутативным, так и с некоммутативным сложением.
Ключевые слова: полукольцо, полуполе, циклическое полукольцо, идеал, отношение эквивалентности, конгруэнция.

1. Исходные определения и обозначения

Полукольцом называется алгебра $\langle S, +, \cdot\rangle$ с операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, такими, что $\langle S, +\rangle$ и $\langle S, \cdot\rangle$ — полугруппы и умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон.

В полукольце S может существовать нейтральный по сложению элемент 0, обладающий свойством мультипликативности (т. е. $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ для любого $x \in S$), называемый *нулем.*

Полукольцо S с тождеством $x + x = x$ называется *идемпотентным*, в противном случае — *неидемпотентным.*

Сложение в полукольце назовем *левым сложением* (*правым сложением*), если в нем тождественно $x + y = x$ $(x + y = y)$.

Полутелом называется полукольцо, являющееся группой по умножению; коммутативное полутело называется *полуполем.*

Циклическим полукольцом называется полукольцо S с единицей 1, если в S существует *образующий* элемент $a \neq 1$, такой, что каждый ненулевой (если $0 \in S$) элемент из S является его неотрицательной целой степенью.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ, «Полукольца и их связи», проект 1.5879.2017/БЧ.

Понятие циклического полукольца введено в [2]. В докладе [3] дан краткий обзор теории циклических полуколец, развитой в работах [1, 4, 5].

Учитывая предложения 1 и 2 [4], будем рассматривать циклические полукольца без нуля.

Мультипликативная полугруппа циклического полукольца S является циклической. Любая циклическая (моногенная) полугруппа с единицей 1 изоморфна или аддитивной полугруппе чисел $\mathbb{N}_0$, или некоторому циклу с хвостом (возможно, пустым) [7, с. 65].

Строение бесконечных циклических полуколец с коммутативным сложением известно [2, теорема 4, с. 27]. Именно S изоморфно одному из двух аддитивно идемпотентных числовых полуколец со сложением max и обычным умножением $\cdot$: полукольцу $\{2^n : n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{0\}$ или полукольцу $\{1/2^n : n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{0\}$.

Бесконечные циклические полукольца с некоммутативным сложением имеют либо левое, либо правое сложение [4, теорема 1, с. 37].

Циклическую полугруппу $\{1, a, a^2, \ldots, a^k, \ldots, a^{k+n-1}\}$, в которой $a^{k+n} = a^k$, где $k \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, назовем *полугруппой типа* (k, n).

Полукольцо S с такой мультипликативной циклической полугруппой будем называть *циклическим полукольцом типа* (k, n).

Множество $\{1, a, a^2, \ldots, a^{k-1}\}$ называется *хвостом* полукольца S в случае $k \geqslant 1$, множество $C = \{a^k, a^{k+1}, \ldots, a^{k+n-1}\}$ – его *циклом.*

Элемент a^k в циклическом полукольце $S = (a)$ типа $(k, 1)$, т. е. в полукольце с тривиальным циклом, назовем *поглощающим элементом* полукольца S.

Полутело назовем *циклическим*, если оно является циклическим полукольцом. Циклическое полутело есть (циклическое) полуполе.

Непустое подмножество I полукольца S называется *идеалом* в S, если для любых $a, b \in I$ и $s \in S$ элементы $a + b$, sa, $as \in I$.

Конгруэнцией на полукольце S называется отношение эквивалентности ρ на S, которое сохраняет полукольцевые операции:

$$a\rho b \text{ и } c\rho d \Rightarrow (a + c)\rho(b + d) \text{ и } (ac)\rho(bd) \text{ для любых } a, b, c, d \in S.$$

На любом полукольце S можно задать две тривиальные конгруэнции: *нулевую конгруэнцию* $\mathbf{0}$, представляющую собой отношение равенства, и *единичную конгруэнцию* $\mathbf{1}$, являющуюся одноклассовой конгруэнцией.

Некоторые результаты статьи анонсированы в [6].

2. Идеалы циклических полуколец

В данном параграфе описаны все идеалы циклических полуколец как с коммутативным, так и с некоммутативным сложением.

Предложение 1. *Множества вида* $A_s = \{a^s, \ldots, a^k, \ldots, a^{k+n-1}\}$, *где* $s \leqslant k$, *циклического полукольца* $S = (a)$ *типа* (k, n) *и только они являются идеалами в* S. *В частности, при* $s = k$ *множество* $A_s = A_k = C$ *и оно является наименьшим идеалом в* S.

Доказательство. Пусть $A_s = \{a^s, \ldots, a^k, \ldots, a^{k+n-1}\}$ для некоторого $s \leqslant k$. Очевидно, что множество A_s выдерживает умножение на элементы полукольца S. В случае $S = C$ имеем $A_s = A_k = C = S$, и очевидно, что A_s замкнуто относительно сложения. Пусть теперь $S \neq C$, a^r и a^t – произвольные элементы множества A_s и $a^r + a^t = a^q$. Тогда по предложениям 5–7 [1] и лемме 5 [5] имеем $q \geqslant \min\{r, t\}$ и A_s замкнуто относительно сложения. Таким образом, множество A_s – идеал в S.

Пусть I – идеал в S и s – наименьшее неотрицательное целое число (можно считать, что $s \leqslant k + n - 1$), такое, что $a^s \in I$. Тогда $a^t = a^{t-s} \cdot a^s \in I$ для любого $t > s$. Также имеем $a^k = a^{k+n-s} \cdot a^s \in I$. Учитывая минимальность s, получаем $s \leqslant k$. При $s < k$ идеал $I = \{a^s, \ldots, a^k, \ldots, a^{k+n-1}\}$, а при $s = k$ идеал $I = \{a^k, \ldots, a^{k+n-1}\} = A_s = C$ и является наименьшим идеалом в S. Таким образом, идеал I имеет вид множества A_s. □

Следствие 1. *Множества* $S = A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_{k-1} \supset A_k = C$ *образуют цепь всех идеалов циклического полукольца* $S = (a)$ *типа* (k, n).

Следствие 2. *Конечное циклическое полуполе не имеет собственных идеалов.*

Предложение 2. *Множества вида* $A_s = \{a^s, a^{s+1}, \ldots\}$, *где* $s \geqslant 0$, *бесконечного циклического полукольца* $S = (a)$ *и только они являются идеалами в* S.

Доказательство. Пусть $A_s = \{a^s, a^{s+1}, \ldots\}$, где $s \geqslant 0$. Очевидно, что множество A_s выдерживает умножение на элементы полукольца S. Как в случае коммутативного сложения в S (теорема 4 [2]), так и в случае некоммутативного сложения в S (теорема 1 [4]), сумма двух произвольных элементов S равна одному из этих элементов. Следовательно, A_s замкнуто относительно сложения. Таким образом, A_s – идеал в S.

Пусть I – идеал в S и s – наименьшее неотрицательное целое число, такое, что $a^s \in I$. Тогда $a^t = a^{t-s} \cdot a^s \in I$ для любого $t > s$. То есть $I = \{a^s, a^{s+1}, \ldots\} = A_s$. □

Следствие 3. *Множества* $S = A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ *образуют цепь всех идеалов бесконечного циклического полукольца* $S = (a)$.

3. Конгруэнции на циклических полукольцах

В этом параграфе выяснено строение конгруэнций на циклических полукольцах.

Замечание 1. Заметим, что любая подгруппа (c^d) циклической группы $C = (c)$ порядка n образует класс некоторой конгруэнции ρ:

$$c^r \rho c^{r_1} \Longleftrightarrow r - r_1 \equiv 0 \pmod{d}, \text{ где } d \text{ – делитель } n. \tag{1}$$

Лемма 1. *Конгруэнция, заданная на мультипликативной группе циклического полуполя, является полукольцевой конгруэнцией.*

Доказательство. Обозначим через ρ_d конгруэнцию на мультипликативной группе циклического полуполя $C = (c)$ порядка n, заданную формулой (1). Пусть $|C+1| = m$, $|1+C| = h$, $1 = hi+mj$ для некоторых чисел $i, j \in \mathbb{Z}$. Покажем, что ρ_d сохраняет сложение.

Пусть $c^r \rho_d c^{r_1}$ и $c^s \rho_d c^{s_1}$, где $r, r_1, s, s_1 \in \mathbb{N}_0$. Тогда по предложению 2 [5] получаем:

$$c^r + c^s = c^{hri+msj+un}, \text{ где } u \in \mathbb{Z},$$
$$c^{r_1} + c^{s_1} = c^{hr_1i+ms_1j+vn}, \text{ где } v \in \mathbb{Z}.$$

Имеем $(hr_1i+ms_1j+vn)-(hri+msj+un) = hi(r_1-r)+mj(s_1-s)+$ $+n(v-u)$. Поскольку d является делителем n, из формулы (1) следует $(c^r + c^s)\rho_d(c^{r_1} + c^{s_1})$. □

Пусть $S = (a)$ – циклическое полукольцо. Рассмотрим произвольные числа $t \in \mathbb{N}_0$ и $d \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\rho(t, d)$ отношение эквивалентности, заданное на S формулой: для любых $r, s \in \mathbb{N}_0$

$$a^r \rho(t, d) a^s \Leftrightarrow (r = s < t \text{ или } (r \geqslant t, s \geqslant t \text{ и } r \equiv s \pmod{d}))."$$

То есть «до» элемента a^t отношение $\rho(t, d)$ является отношением равенства, а «начиная» с элемента a^t – отношение $\rho(t, d)$ удовлетворяет формуле (1).

Лемма 2. *Отношение $\rho(t, d)$, заданное на циклическом полукольце $S = (a)$ типа $(k, 1)$, является отношением $\rho(t, 1)$.*

Доказательство. По определению отношения $\rho(t, d)$ для любых $r \geqslant t$ и $q \in \mathbb{N}$ имеем $a^r \rho a^{r+qd}$. Рассмотрим такое q, что $r + qd \geqslant k$, то есть $a^{r+qd} = a^k$. Таким образом, для любого $r \geqslant t$ выполняется $a^r \rho a^k$. Тогда $a^t \rho a^{t+1} \rho \dots \rho a^k$. Поэтому $d = 1$ и $\rho = \rho(t, 1)$. □

Лемма 3. *Отношение эквивалентности $\rho(t, d)$, где $t \in \mathbb{N}_0$ и $d \in \mathbb{N}$, заданное на конечном циклическом полукольце, является конгруэнцией.*

Доказательство. Пусть $\rho(t,d)$ – отношение эквивалентности, заданное на полукольце $S=(a)$ типа (k,n), $|C+e|=m$, $|e+C|=h$, e – единица цикла C, $1=hi+mj$ для некоторых $i,j\in\mathbb{Z}$.

Покажем, что $\rho(t,d)$ сохраняет операции сложения и умножения. Пусть $a^r\rho(t,d)a^{r_1}$ и $a^s\rho(t,d)a^{s_1}$, где $r,r_1,s,s_1\in\mathbb{N}_0$.

Если $r=r_1$ и $s=s_1$, то сохранение операций сложения и умножения очевидно.

Пусть хотя бы одно из равенств $r=r_1$ и $s=s_1$ не выполняется. Не теряя общности, будем считать, что $r\neq r_1$. Тогда по определению отношения $\rho(t,d)$ имеем $r\geqslant t$, $r_1\geqslant t$, $r_1-r\equiv 0 \pmod d$. Отметим, что $s_1-s\equiv 0 \pmod d$ в любом случае. Тогда $r+s\geqslant t$, $r_1+s_1\geqslant t$, $(r_1+s_1)-(r+s)\equiv 0 \pmod d$, откуда $(a^ra^s)\rho(t,d)(a^{r_1}a^{s_1})$. Таким образом, операция умножения сохраняется.

Проверим сохранение операции сложения. Обозначим $a^q=a^r+a^s$, $a^{q_1}=a^{r_1}+a^{s_1}$.

Пусть сложение в S коммутативно. По предложению 3 [1] имеем $n=1$ (поэтому $e=a^k$), тогда по лемме 2 отношение $\rho(t,d)$ «склеивает» все элементы, начиная с элемента a^t. По предложению 5 [1] в S возможен только один из следующих случаев: : (а) $1+a^k=1$ или (б) $1+a^k=a^k$. В случае (а) по предложениям 1 и 6 [1] при равенстве $s=s_1$ получаем $a^q=a^{\min(r,s)}=a^s$, $a^{q_1}=a^{\min(r_1,s_1)}=a^{s_1}$, поэтому $a^q\rho(t,d)a^{q_1}$; при $s\neq s_1$ верно $s\geqslant t$ и $s_1\geqslant t$, тогда $q=\min(r,s)\geqslant t$ и $q_1=\min(r_1,s_1)\geqslant t$, поэтому $a^q\rho(t,d)a^{q_1}$. В случае (б) по предложению 7 [1] имеем $q\geqslant\max(r,s)\geqslant r\geqslant t$ и $q_1\geqslant\max(r_1,s_1)\geqslant r_1\geqslant t$. Следовательно, $a^q\rho(t,d)a^{q_1}$.

В некоммутативном случае по лемме 3 [5] имеем $a^r+a^s=a^{hri+msj+un}$, где $u\in\mathbb{Z}$, $a^{r_1}+a^{s_1}=a^{hr_1i+ms_1j+vn}$, где $v\in\mathbb{Z}$. В случае левого (правого) сложения в S сохранение операции сложения очевидно. Если сложение в S не левое и не правое, то по лемме 5 [5] $hri+msj+un\geqslant t$ и hr_1i+ms_1j+ $+vn\geqslant t$. Составим разность показателей степеней $hi(r_1-r)+mj(s_1-$ $-s)+n(v-u)$. Все слагаемые разности делятся на d, следовательно, $(a^r+a^s)\rho(t,d)(a^{r_1}+a^{s_1})$. Итак, сохраняется и операция сложения.

Таким образом, отношение $\rho(t,d)$ является конгруэнцией. □

Лемма 4. *Любая конгруэнция на циклическом полукольце типа (k,n) является отношением вида $\rho(t,d)$, где $0\leqslant t\leqslant k$, d – делитель числа n.*

Доказательство. Пусть ρ – конгруэнция на циклическом полукольце $S=(a)$ типа (k,n). Если ρ является нулевой конгруэнцией, то $\rho=\rho(k,n)$.

Пусть ρ – ненулевая конгруэнция, $t\in\mathbb{N}_0$ и $d\in\mathbb{N}$ – наименьшие числа, такие, что $a^t\rho a^{t+d}$. Рассмотрим произвольные r и s, такие, что

$r \geqslant t$, $s \geqslant t$, $r - s \equiv 0 \pmod d$. Не теряя общности, полагаем $s = r + qd$ для некоторого $q \in \mathbb{N}_0$.

Поскольку $a^t \rho a^{t+d}$ и $a^{r-t} \rho a^{r-t}$, то $a^r \rho a^{r+d}$. Таким образом, отношение $a^r \rho a^{r+qd}$ имеет место для $q = 1$. Пусть указанное отношение верно для любого q. Тогда для $q + 1$ имеем:

$$a^r \rho a^{r+qd}, a^d \rho a^d \Rightarrow a^{r+d} \rho a^{r+(q+1)d},$$
$$a^r \rho a^{r+d}, a^{r+d} \rho a^{r+(q+1)d} \Rightarrow a^r \rho a^{r+(q+1)d}.$$

То есть, $a^r \rho a^s$. Таким образом, имеем d различных классов конгруэнции ρ: $[a^t]$, $[a^{t+1}]$,…, $[a^{t+d-1}]$. Очевидно, что $a^r \rho a^s \Rightarrow r - s \equiv 0 \pmod d$.

Итак, если $r \geqslant t$ и $s \geqslant t$, то $(a^r \rho a^s \Leftrightarrow r - s \equiv 0 \pmod d)$.

Заметим, что имеет смысл рассматривать $t \leqslant k+n-1$. Если $n = 1$, то $t \leqslant k$. Рассмотрим $n > 1$. Имеем $a^t \rho a^{t+d}$, $a^{k+n-t} \rho a^{k+n-t}$, откуда $a^k \rho a^{k+d}$. В силу минимальности t получаем $t \leqslant k$. Таким образом, $0 \leqslant t \leqslant k$.

Имеем $a^t \rho a^{t+d}$, $a^{k-t} \rho a^{k-t}$, откуда $a^k \rho a^{k+d}$. Поскольку, элементы a^k и a^{k+d} принадлежат циклу C, который является циклической группой, то по замечанию 1 число d является делителем n.

В итоге $\rho = \rho(t, d)$, где $0 \leqslant t \leqslant k$, d – делитель числа n. □

Замечание 2. Учитывая лемму 4, числа t и d в случае конечного циклического полукольца S можно минимизировать. Пусть S имеет тип (k, n), тогда отношение эквивалентности на S для произвольных $t \in \mathbb{N}_0$ и $d \in \mathbb{N}$:

$$\rho(t, d) = \begin{cases} \rho(t, (d, n)), \text{если } t \leqslant k, \\ \rho(k, (d, n)), \text{если } t > k. \end{cases}$$

Таким образом, будем считать, что $0 \leqslant t \leqslant k$, d – делитель числа n.

Замечание 3. Пусть S – циклическое полукольцо типа (k, n). Тогда единичную конгруэнцию на S можно записать в виде $\mathbf{1} = \rho(0, 1)$, а нулевую – $\mathbf{0} = \rho(k, n)$. Если $n = 1$, то произвольная конгруэнция на S является отношением $\rho(t, 1)$ для некоторого $0 \leqslant t \leqslant k$.

Суммируя леммы 3 и 4, получаем следующий результат.

Предложение 3. *Отношения вида $\rho(t, d)$, где $0 \leqslant t \leqslant k$, d – делитель числа n, заданные на любом циклическом полукольце S типа (k, n), и только они являются конгруэнциями на S.*

Отсюда вытекает

Предложение 4. *Решетка всех конгруэнций на циклическом полукольце типа (k, n) изоморфна прямому произведению $(k + 1)$ – элементной цепи $k \lhd k - 1 \lhd \ldots \lhd 1 \lhd 0$ и дистрибутивной решетки натуральных делителей числа n с операциями* НОК *и* НОД *(т. е. с*

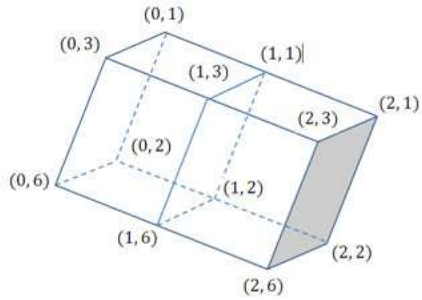

Рис. 1. Решетка конгруэнций циклического полукольца типа $(2, 6)$

отношением «делится»). Значит, число конгруэнций на циклическом полукольце типа (k, n) равно $(k+1)\tau(n)$, где $\tau(n)$ – число натуральных делителей числа n.

Замечание 4. Порядок $\subseteq$ на решетке всех конгруэнций следующий:

$$\rho(t, d) \subseteq \rho(t', d') \Longleftrightarrow ((t \geqslant t') \quad \text{и} \quad (d \,\vdots\, d')).$$

Пример 1. Пусть $S = (a)$ – циклическое полукольцо типа $(2, 6)$. По предложению 4 решетка всех конгруэнций на S изоморфна прямому произведению цепи $2 \lhd 1 \lhd 0$ и дистрибутивной решетки натуральных делителей числа 6. На рис. 1 изображена решетка всех конгруэнций на циклическом полукольце типа $(2, 6)$.

Замечание 5. Отношение эквивалентности $\rho(\infty, 1)$, заданное на бесконечном циклическом полукольце с коммутативным сложением, будем считать нулевой конгруэнцией.

Лемма 5. *Отношение эквивалентности $\rho(t, 1)$, где $t \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, заданное на бесконечном циклическом полукольце с коммутативным сложением, является конгруэнцией.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 3. $\square$

Лемма 6. *Любая конгруэнция на бесконечном циклическом полукольце с коммутативным сложением является отношением вида $\rho(t, 1)$, где $t \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$.*

Доказательство. Пусть ρ – конгруэнция на бесконечном циклическом полукольце $S = (a)$ с коммутативным сложением. Если ρ – нулевая конгруэнция, то $\rho = \rho(\infty, 1)$

Пусть $\rho \neq \mathbf{0}$ и $t \in \mathbb{N}_0$ и $d \in \mathbb{N}$ – наименьшие числа, такие, что $a^t \rho a^{t+d}$. Тогда $a^t \rho a^{t+qd}$ верно для любого $q \in \mathbb{N}_0$ (см. доказательство леммы 4). Очевидно, что $a^r \rho a^s \Rightarrow r - s \equiv 0 \pmod{d}$.

Тогда из $a^t\rho a^{t+2d}$ и $a^{t+1}\rho a^{t+1+d}$ следует $(a^t+a^{t+1})\rho(a^{t+2d}+a^{t+1+d})$. По теореме [2, теорема 4, с. 27] сложение в S является сложением max, следовательно, $a^{t+1}\rho a^{t+2d}$, откуда $(t+2d)-(t+1)\equiv 0 \pmod d$ и $1\equiv 0 \pmod d$. Следовательно, $d=1$ и $\rho=\rho(t,1)$. □

Предложение 5. *Отношения вида $\rho(t,1)$, где $t\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$, на любом бесконечном циклическом полукольце с коммутативным сложением и только они являются конгруэнциями.*

Доказательство следует из лемм 5 и 6. □

Следствие 4. *Все конгруэнции на бесконечном циклическом полукольце $S=(a)$ с коммутативным сложением образуют цепь:*

$$\mathbf{1}=\rho(0,1)\supset\rho(1,1)\supset\rho(2,1)\supset\ldots\supset\rho(n,1)\supset\ldots\supset\rho(\infty,1)=\mathbf{0}.$$

Лемма 7. *Отношение эквивалентности $\rho(t,d)$, где $t\in\mathbb{N}_0$ и $d\in\mathbb{N}$, заданное на бесконечном циклическом полукольце с некоммутативным сложением, является ненулевой конгруэнцией.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 3. □

Лемма 8. *Любая ненулевая конгруэнция на бесконечном циклическом полукольце с некоммутативным сложением является отношением вида $\rho(t,d)$, где $t\in\mathbb{N}_0$, $d\in\mathbb{N}$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 4. При этом $\rho(0,1)\ =\ \mathbf{1}$. □

Предложение 6. *Отношения вида $\rho(t,d)$, где $t\in\mathbb{N}_0$ и $d\in\mathbb{N}$, на любом бесконечном циклическом полукольце S с некоммутативным сложением и только они являются ненулевыми конгруэнциями на S. Причем*

$$\rho(t,d)\subseteq\rho(t',d')\Longleftrightarrow((t\geqslant t')\quad \text{и}\quad (d\,\vdots\,d')).$$

Доказательство следует из лемм 7 и 8. □

Предложение 7. *Решетка всех конгруэнций на бесконечном циклическом полукольце S с некоммутативным сложением изоморфна прямому произведению цепи неположительных натуральных чисел: $\ldots\lhd n\lhd n-1\lhd\ldots\lhd 1\lhd 0$, и дистрибутивной решетки всех натуральных чисел с операциями* НОК *и* НОД, *с присоединенным наименьшим элементом* $\mathbf{0}$.

По предложению 6 и теореме 1 [4] имеем

Следствие 5. *Факторполукольцо $S/\rho(t,d)$ бесконечного циклического полукольца с некоммутативным сложением является конечным циклическим полукольцом типа (t,d) с левым или правым сложением.*

Замечание 6. Любое циклическое полукольцо типа $(k, 1)$ с некоммутативным сложением является факторполукольцом бесконечного циклического полукольца с некоммутативным сложением. Но не любое циклическое полукольцо типа (k, n), где $n \geqslant 2$, является факторполукольцом бесконечного циклического полукольца с некоммутативным сложением.

Пример 2. Бинарное отношение $\sim$, заданное на циклическом полукольце $S = (a) \neq C$ типа (k, n) следующей формулой:

$$x \sim y \Leftrightarrow (x, y \in C \text{ или } x = y),$$

является конгруэнцией $\rho(k, 1)$. Отношение $\sim$ «склеивает» элементы цикла C в один класс, а каждый из остальных элементов полукольца S образует одноэлементный класс. Факторполукольцо $S/{\sim}$ также является конечным циклическим полукольцом с поглощающим элементом $[a^k]_\sim$.

Пример 3. Рассмотрим отношение ρ, заданное на идемпотентной аддитивной полугруппе $\langle S, +\rangle$ идемпотентного циклического полукольца $S = (a)$ с некоммутативным сложением следующим образом:

$$x\rho y \Leftrightarrow (x + y + x = x \text{ и } y + x + y = y). \tag{2}$$

Отношение ρ является конгруэнцией [8].

Предложение 8. *Конгруэнция ρ, заданная формулой* (2) *на циклическом полукольце S типа (k, n) с идемпотентным некоммутативным сложением, в случае левого* (*правого*) *сложения в S является единичной конгруэнцией $\rho(0, 1)$, в остальных случаях является конгруэнцией $\rho(k, 1)$ при $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть $S = (a)$ – циклическое полукольцо типа (k, n) с идемпотентным некоммутативным сложением и циклом C.

Если сложение в S левое (правое), то для любых элементов $x, y \in S$ выполняется $x + y + x = x$ и $y + x + y = y$, откуда $x\rho y$ и $\rho = \rho(0, 1)$.

Пусть сложение в S не левое и не правое. По теореме 2 [4] и лемме 5 [4] для любых элементов $x, y \in C$ верно $x\rho y$. Следовательно, конгруэнция ρ «склеивает» элементы цикла C в один класс.

Пусть для некоторых $x = a^r$ и $y = a^s$, $r \neq s$, выполняется $x\rho y$ и $x \notin C$ (поэтому по предложению 4 [4], замечанию 3 [4] и лемме 9 [4] имеем $y \notin C$). Тогда $r < k$ и $a^r + a^s + a^r = a^r$. Можно считать, что $r < s$. Обозначим $a^r + a^s = a^t$. Тогда $a^r(1 + a^{s-r}) = a^t$. Если $t = r$, то $1 + a^{s-r} = 1$ и по лемме 4 [5] сложение в S левое; противоречие. В случае $t > r$ имеем $a^t + a^r = a^r(a^{t-r} + 1) = a^r$, откуда $a^{t-r} + 1 = 1$ и по лемме 4 [5] сложение в S правое; противоречие. В случае $t < r$ получаем, что S – полуполе, что невозможно.

Следовательно каждый из элементов хвоста полукольца S образует одноэлементный класс и $\rho = \rho(k, 1)$. $\square$

Список литературы

1. **Бестужев А. С., Вечтомов Е. М.** Циклические полукольца с коммутативным сложением // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер.1: Математика. Механика. Информатика. 2015. Вып. 1(20). С. 8–39.*

2. **Вечтомов Е. М.** Введение в полукольца. Киров: ВГПУ, 2000. 44 с.

3. **Вечтомов Е. М., Бестужев А. С., Орлова И. В.** Строение циклических полуколец // *IX Всероссийская научная конференция «Математическое моделирование развивающейся экономики, экологии и технологий», ЭКОМОД - 2016 : сборник материалов конференции. Киров: Изд–во ВятГУ, 2016. С. 21–30.*

4. **Вечтомов Е. М., Лубягина (Орлова) И. В.** Циклические полукольца с идемпотентным некоммутативным сложением // *Фундаментальная и прикладная математика. 2011/2012. Т. 17. Вып. 1. С. 33–52.*

5. **Вечтомов Е. М., Орлова И. В.** Циклические полукольца с неидемпотентным некоммутативным сложением // *Фундаментальная и прикладная математика. 2015. Т. 20. Вып. 6. С. 17–41.*

6. **Орлова И. В.** Идеалы и конгруэнции циклических полуколец с некоммутативным сложением // *Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского. Казань: Казанское математическое общество, 2015. Т. 52. С. 118–120.*

7. **Скорняков Л. А.** Элементы алгебры. М.: Наука, 1986. 240 с.

8. **Brown T. Lazerson E.** On finitely generated idempotent semigroups // *Semigroup Forum. 2009. Vol. 78. Iss. 1. P. 183–186.*

ВятГУ *Поступила 15.03.2017*

Summary

Vechtomov E. M., Orlova I. V. Ideals and congruences of cyclic semirings

In this paper we study ideals and congruences of cyclic semirings with commutative and non-commutative addition.
Keywords: semiring, semifield, cyclic semiring, ideal, equivalence relation, congruence.

References

1. **Bestuzev A. S., Vechtomov E. M.** Cyclic Semirings with Commutative Addition, *Bulletin of Syktyvkar State University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics,* edition 1 (20), 2015, pp. 8–39.

2. **Vechtomov E. M.** *Introduction to Semirings*, Kirov: VGPU, 2000, 44 p.

3. **Vechtomov E. M., Bestuzev A. S., Orlova I. V.** The Structure of Cyclic Semirings, *IX Vserossiiskaya nauchnaya conferenciya «Matematicheskoe modelirovanie razvivausheysya ekonomoki, ekologii i tehnologii»*, EKOMOD - 2016: Sbornik materialov conferencii, Kirov: Izdatelstvo VyatGU, 2016, pp. 21–30.

4. **Vechtomov E. M., Lubyagina (Orlova) I. V.** Cyclic Semirings with Idempotent Noncommutative Addition, *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika*, 2011/2012, t. 17, vyp. 1, pp. 33–52.

5. **Vechtomov E. M., Orlova I. V.** Cyclic Semirings with Nonidempotent Noncommutative Addition, *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika*, 2015, t. 20, vyp. 6, pp. 17–41.

6. **Orlova I. V.** Ideals and Congruences of Cyclic Semirings with Noncommutative Addition, *Trudi Matematiteskogo Centra imeni N. I. Lobachevskogo*, Kazan: Kazanskoe matematicheskoe obshestvo, 2015, t. 52, pp. 118–120.

7. **Skornyakov L. A.** *Elements of Algebra*, M.: Nauka, 1986, 240 p.

8. **Brown T. Lazerson E.** On Finitely Generated Idempotent Semigroups, *Semigroup Forum*, 2009, vol. 78, iss. 1, pp. 183–186.

Для цитирования: Вечтомов Е. М., Орлова И. В. Идеалы и конгруэнции циклических полуколец // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 1 (22). С. 29–40.*

For citation: Vechtomov E. M., Orlova I. V. Ideals and congruences of cyclic semirings, *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics,* 2017, №1 (22), pp. 29–40.