МАТЕМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 1 (22). 2017

УДК 512.566

ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ T_1-ПРОСТРАНСТВ РЕШЕТКОЙ ПОДАЛГЕБР ПОЛУКОЛЕЦ НЕПРЕРЫВНЫХ ЧАСТИЧНЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ НА НИХ

Е. М. Вечтомов[1]***, Е. Н. Лубягина***

Работа относится к общей теории полуколец непрерывных функций. Рассматриваются подалгебры полуколец $CP(X)$ непрерывных частичных функций на топологических пространствах X со значением в топологическом поле $\mathbf{R}$ действительных чисел. Изучаются минимальные и максимальные подалгебры $\mathbf{R}$-алгебры $CP(X)$. Доказана теорема определяемости произвольного T_1-пространства X решеткой $A(X)$ всех подалгебр полукольца $CP(X)$.

Ключевые слова: полукольцо, поле действительных чисел, частичная действительнозначная функция, подалгебра.

Полукольцом называется непустое множество S с бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, для которых $\langle S, +\rangle$ — коммутативная полугруппа, $\langle S, \cdot\rangle$ — полугруппа и умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. Поле $\mathbf{R}$ всех действительных чисел является коммутативным полукольцом с делением с мультипликативным нулем 0 и единицей 1.

Для произвольного множества X через $SP(X) = \bigcup\{\mathbf{R}^Y : Y \subseteq X\}$ обозначается множество всех частичных $\mathbf{R}$-значных функций f на X. Области определения $D(f)$ функций f являются подмножествами множества X. На множестве $SP(X)$ полукольцевые операции задаются правилом: для любых частичных функций $f, g \in SP^X$ функции $f + g$ и

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ, «Полукольца и их связи», проект 1.5879.2017/БЧ.

fg определены на $D(f+g) = D(fg) = D(f) \cap D(g)$ поточечно, т. е. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ и $(fg)(x) = f(x)g(x)$ для всех $x \in D(f) \cap D(g)$. В результате множество $SP(X)$ становится коммутативным полукольцом с единицей 1 и поглощающим элементом $\varnothing$, рассматриваемым как частичная функция с пустой областью определения: $D(\varnothing) = \varnothing$.

Для любого топологического пространства X через $C(X)$ обозначается кольцо всех непрерывных действительнозначных функций на X ([7], см. также [3, гл. 2]), а через $CP(X) = \bigcup\{C(Y) : Y \subseteq X\}$ — полукольцо всех непрерывных частичных $\mathbf{R}$-значных функций на X с поточечными операциями сложения и умножения частичных функций f и g на их общей области определения $D(f) \cap (g)$. Считаем, что $C(\varnothing) = \{\varnothing\}$. Ясно, что полукольцо $CP(X)$ служит дизъюнктным объединением колец $C(Y)$ по всевозможным подпространствам Y в X и подполукольцом полукольца $SP(X)$. Полукольцо $CP(X)$ имеет поглощающий элемент $\varnothing$. Если топологическое пространство X дискретно, то $C(X) = \mathbf{R}^X$ и $CP(X) = SP(X)$.

Впервые полукольца частичных и непрерывных частичных функций изучались в статье [2]. Теория полуколец $SP(X)$ и $CP(X)$ развита в [4, гл. 8].

Подалгеброй в полукольце $CP(X)$ называется произвольное его подполукольцо, выдерживающее умножение на числа из $\mathbf{R}$. Пустое множество $\varnothing$ также считается подалгеброй в $CP(X)$. Относительно отношения включения $\subseteq$ множество $A(X)$ всех подалгебр полукольца $CP(X)$ образует полную решетку с наименьшим элементом $\varnothing$ и наибольшим элементом $CP(X)$. При этом точной нижней гранью всякого непустого семейства подалгебр в $CP(X)$ будет их пересечение, а $\sup(A, B) = A \vee B = A \cup B \cup (A + B + AB)$ для любых $A, B \in A(X)$.

Топологическое пространство X называется:

T_1-*пространством*, если для любых его различных точек x и y существует открытое множество в X, содержащее x и не содержащее y, что равносильно замкнутости всех одноточечных подмножеств пространства X;

T_0-*пространством*, если для любых его различных точек x и y существует открытое множество в X, содержащее ровно одну из этих точек, что эквивалентно тому, что равенство замыканий одноточечных множеств $\{x\}$ и $\{y\}$ влечет равенсто самих точек $x, y \in X$.

Информацию топологического характера можно найти в книге [6].

Для любого подмножества Y топологического пространства X обозначим через 0_Y и 1_Y такие функции из $CP(X)$, что $D(0_Y) = D(1_Y) = Y$, $0_Y = 0$ и $1_Y = 1$ на Y. Имеем $0_\varnothing = 1_\varnothing = \varnothing$. Для точек $x \in X$ будем писать $0_x = 0_{\{x\}}$ и $1_x = 1_{\{x\}}$.

Атомами решетки L с наименьшим элементом θ называются минимальные элементы упорядоченного множества $L \setminus \theta$. Двойственным образом определяется понятие коатома решетки с наибольшим элементом. Атомы (коатомы) решетки $A(X)$ называются также *минимальными* (*максимальными*) *подалгебрами* полукольца $CP(X)$. Элемент a решетки L с наименьшим элементом θ назовем ее *предатомом*, если a строго больше ровно двух элементов решетки L: θ и некоторого атома. Теоретико-решеточные сведения содержатся в книге [5].

Следующее, легко проверяемое, предложение дает описание всех атомов и предатомов решетки $A(X)$. Предварительно отметим, что $\{0_Y\} = \{0_Z\} \Leftrightarrow Y = Z$ (для любых $Y, Z \subseteq X$).

Предложение 1. *Для любого топологического пространства* X *верны следующие утверждения*:
1) *атомами решетки* $A(X)$ *являются в точности одноэлементные подалгебры* $\{0_Y\}, Y \subseteq X$;
2) *предатомы решетки* $A(X)$ *суть в точности подалгебры* $e\boldsymbol{R}$ *по всем идемпотентам* $e \in CP(X)$, *принимающим ровно одно значение* 1 *(*$e = 1_Y$ *при* $Y \neq \varnothing$*) или ровно два значения* 0 *и* 1.

Предложение 1, с другой стороны, описывает некоторые простейшие подалгебры полуколец $CP(X)$ в терминах решеток $A(X)$. На языке $A(X)$ приведем решеточные характеризации ряда других соотношений в полукольцах $CP(X)$.

Следующие три леммы доказываются непосредственно.

Лемма 1. *Для любых двух различных атомов* $\{0_Y\}$ *и* $\{0_Z\}$ *решетки* $A(X)$ *верны следующие утверждения*:
1) $\{0_Y\} \vee \{0_Z\} = \{0_Y, 0_Z, 0_{Y\cap Z}\}$;
2) *подалгебра* $\{0_Y\} \vee \{0_Z\}$ *содержит ровно два атома* $\{0_Y\}$ *и* $\{0_Z\} \Leftrightarrow Y \subset Z$ *или* $Z \subset Y$;
3) *подалгебра* $\{0_Y\} \vee \{0_Z\}$ *содержит ровно три атома* $\{0_Y\}, \{0_Z\}$ *и* $\{0_{Y\cap Z}\} \Leftrightarrow Y \not\subset Z$ *и* $Z \not\subset Y$.

Отметим, что в 3) $\{0_{Y\cap Z}\} = \{\varnothing\} \Leftrightarrow Y \cap Z = \varnothing$.

Лемма 2. *Для произвольного атома* $\{0_Y\}$ *решетки* $A(X)$ *имеем*:
1) $\{0_Y\} = \{\varnothing\}$ *или* $\{0_Y\} = \{0_X\} \Leftrightarrow \{0_Y\} \vee \{0_Z\}$ *содержит ровно два атома для любого атома* $\{0_Z\} \neq \{0_Y\}$;
2) $\{0_Y\} = \{\varnothing\} \Leftrightarrow$ *не существует предатома над* $\{0_Y\}$;
3) $\{0_Y\} = \{0_X\} \Leftrightarrow \{0_Y\}$ *удовлетворяет достаточной части эквиваленции* 1) *и не удовлетворяет достаточной части эквиваленции* 2).

Лемма 3. *Для любых отличных от* $\{\varnothing\}$ *различных атомов* $\{0_Y\}$ *и* $\{0_Z\}$ *решетки* $A(X)$ *имеем*: $Y \subset Z \Leftrightarrow$ *существует такой атом* $\{0_U\}$, *что* $\{0_U\} \vee \{0_Y\}$ *включает ровно три атома* $\{0_U\}, \{0_Y\}, \{\varnothing\}$ *и* $\{0_U\} \vee \{0_Z\}$ *включает только атомы* $\{0_U\}$ *и* $\{0_Z\}$.

В силу предложения 1 леммы 1–3 устанавливают на множестве всех атомов решетки $A(X)$ отношение *подчинения*, при этом, очевидно, имеет место

Предложение 2. *Упорядоченное множество* $\{\{0_Y\} : Y \subseteq X\}$ *с отношением подчинения изоморфно булеану* $B(X) = \{Y : Y \subseteq X\}$ *с отношением включения* $\subseteq$, *причем атомы* $\{0_x\}$ *решетки* $A(X), x \in X$, *соответствуют атомам* $\{x\}$ *булеана* $B(X)$.

Замечание 1. Предложение 2 позволяет отождествлять атомы $\{0_Y\}$ решетки $A(X)$ с подмножествами Y топологического пространства X.

Лемма 4. *Пусть* X *— произвольное* T_1*-пространство,* $\varnothing \neq Y \subseteq X$ *и* $x \in X \setminus Y$. *Тогда имеют место следующие утверждения*:
1) *точка* x *не принадлежит замыканию множества* Y *в* $X \Leftrightarrow$ *существует функция* $e \in C(Y \cup \{x\})$, *равная* 0 *на* Y *и* 1 *в точке* x;
2) *подалгебра* $e\boldsymbol{R}$ *решеточно определяется как предатом* P *решетки* $A(X)$, *для которого единственным включенным в него атомом служит* $\{0_{Y\cup\{x\}}\}$ *и подалгебра* $P \vee \{0_Y\}$ *включает ровно* 5 *подалгебр, именно*: $\varnothing, \{0_Y\}, \{0_{Y\cup\{x\}}\}, P, P \vee \{0_Y\}$.

Доказательство. Утверждение 1) очевидно.

Докажем 2). Ясно, что подалгебра $e\mathbf{R}$ служит предатомом решетки $A(X)$ над атомом $\{0_{Y\cup\{x\}}\}$, причем $e\mathbf{R} \vee \{0_Y\}$ включает ровно 5 подалгебр. По утверждению 2) предложения 1 над атомом $\{0_{Y\cup\{x\}}\}$ существуют также другие предатомы $Q = f\mathbf{R}$, в частности $1_{Y\cup\{x\}}\mathbf{R}$. Но в решетке $A(X)$ подалгебры $Q \vee \{0_Y\}$ включают по 6 подалгебр: $\varnothing, \{0_Y\}, \{0_{Y\cup\{x\}}\}, Q, Q \vee \{0_Y\}$ и gR, где g — сужение функции f на множество Y.

Из пункта 1) леммы 4 следует

Лемма 5. *Подмножество* Y *произвольного* T_1*-пространства* X *замкнуто тогда и только тогда, когда для любой точки* $x \in X \setminus Y$ *существует такая функция* $e \in C(Y \cup \{x\})$, *что* $e = 0$ *на* Y *и* $e(x) = 1$.

На основе предложения 2, лемм 4 и 5 получаем:

Теорема. *Произвольные* T_1*-пространство* X *и топологическое пространство* Y *гомеоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны решетки* $A(X)$ *и* $A(Y)$ *их подалгебр.*

Следствие. *Любое* T_1*-пространство* X *определяется* (*однозначно с точностью до гомеоморфизма*) *полукольцом* $CP(X)$ *в классе всевозможных топологических пространств.*

Отметим, что определяемость хьюиттовских пространств X решетками подалгебр колец $C(X)$ установлена в [1], см. также [3, п. 9].

Пример 1. Возьмем одноточечное топологическое пространство $X = \{x\}$. Полукольцо $CP(X)$ совпадает с $1_x\mathbf{R} \cup \{\varnothing\}$, и решетка $A(X) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{0_x\}, \{\varnothing, 0_x\}, 1_x\mathbf{R}, CP(X)\}$ — это шестиэлементная дистрибутивная решетка, изоморфная прямому произведению двухэлементной и трехэлементной цепей.

Пример 2. Рассмотрим двухточечное антидискретное топологическое пространство $X = \{x, y\}$ и связное двоеточие Y с этими же точками x и y. Тогда $CP(X) = CP(Y) = 1_x\mathbf{R} \cup 1_y\mathbf{R} \cup 1\mathbf{R} \cup \{\varnothing\}$ есть множество частичных функций-констант на X. Стало быть, $A(X) = A(Y)$. Решетка $A(X)$ содержит пентагон $\{\varnothing, \{0_x\}, \{0_y\}, \{\varnothing, 0_x\}, \{\varnothing, 0_x, 0_y\}\}$ в качестве подрешетки, поэтому не является модулярной. Пусть теперь Z — произвольное топологическое пространство, содержащее, по крайней мере, две различные точки x и y. Решетка $A(Z)$ имеет своей подрешеткой пентагон $\{\varnothing, \{0_x\}, \{0_y\}, \{\varnothing, 0_x\}, \{\varnothing, 0_x, 0_y\}\}$, значит, не является модулярной.

Замечание 2. Легко видеть, что множество $CP(X)$ состоит лишь из функций-констант на топологическом пространстве X тогда и только тогда, когда каждое двухэлементное подпространство в X является связным двоеточием. Последнее условие на X эквивалентно тому, что открытые множества пространства X образуют цепь по отношению включения.

Пример 3. Пусть $X = \{x, y, z\}$, $\tau_1 = \{\varnothing, \{x\}, \{x, y\}, \{x, z\}, X\}$ и $\tau_2 = \{\varnothing, \{y\}, \{z\}, \{y, z\}, X\}$ и — топологии на X. Получаем негомеоморфные, но антигомеоморфные T_0-пространства $X_1 = \langle X, \tau_1 \rangle$ и $X_2 = \langle X, \tau_2 \rangle$, имеющие равные полукольца $CP(X_1) = CP(X_2)$. Поэтому T_0-пространства X не обязаны определяться ни полукольцом $CP(X)$, ни тем более решеткой $A(X)$.

Примеры 1 и 2 доказывают справедливость следующего утверждения:

Предложение 3. *Для любого топологического пространства X имеем:*
1) *если X содержит ровно одну точку, то решетка $A(X)$ дистрибутивна;*
2) *если X содержит более одной точки, то решетка $A(X)$ не модулярна.*

Замечание 3. Решетка подалгебр кольца $C(X)$ над двухэлементным дискретным пространством X является диамантом, поэтому она модулярна, но не дистрибутивна [3, с. 114, рис. 2]. Для трехэлементного дискретного пространства Y решетка подалгебр кольца $C(Y)$ является немодулярной 15-элементной решеткой [3, с. 114, рис. 1], изоморфной подрешетке решетки $A(C(X))$ над любым T_1-пространством X мощности ≥ 3.

Подпространство Y топологического пространства X называется *C-расширяемым*, если каждая функций из $C(Y)$ продолжается до некоторой функции из $C(X)$.

Легко видеть, что справедливо

Предложение 4. *Пусть X — произвольное топологическое пространство, $x \in X$, подпространство $X \setminus \{x\}$ C-расширяемо, A — максимальная подалгебра кольца $C(X)$. Тогда множества $CP(X) \setminus C(X \setminus \{x\})$ и $(CP(X) \setminus C(X)) \cup A$ будут максимальными подалгебрами полукольца $CP(X)$.*

Для конечных дискретных пространств X получаем полное описание максимальных подалгебр полуколец $CP(X)$:

Предложение 5. *Для всякого конечного дискретного пространства X максимальные подалгебры полукольца $CP(X)$ исчерпываются подалгебрами $CP(X) \setminus C(X \setminus \{x\})$ и $(CP(X) \setminus C(X)) \cup A$ по всем точкам $x \in X$ и всевозможным максимальным подалгебрам кольца $C(X)$.*

Доказательство. Пусть X — n-элементное дискретное пространство. В силу предложения 4 подалгебры вида $CP(X) \setminus C(X \setminus \{x\})$ и $(CP(X) \setminus C(X)) \cup A$ являются максимальными подалгебрами полукольца $CP(X)$.

Обратно, возьмем произвольную максимальную подалгебру M в $CP(X)$. Если подалгебра M не содержит $C(X \setminus \{x\})$ для некоторой точки $x \in X$, то $M \cap C(X \setminus \{x\}) = \varnothing$ и $M \subseteq CP(X) \setminus C(X \setminus \{x\})$, т. е. $M = CP(X) \setminus C(X \setminus \{x\})$. Поэтому можно считать, что M содержит n подалгебр $C(X \setminus \{x\})$ для всех $x \in X$. Но тогда M содержит и всевозможные пересечения подалгебр $C(X \setminus \{x\}), x \in X$. Значит, подалгебра $CP(X) \setminus C(X)$ содержится в M, и $A = M \cap C(X)$ будет максимальной подалгеброй кольца $C(X)$.

Известно также, что всякое T_1-пространство X определяется решеткой всех идеалов полукольца $CP(X)$ [4, Теорема 40.8].

В связи с этим возникают следующие проблемы:

Задача 1. Доказать (или опровергнуть), что произвольное T_1-пространство X определяется решеткой всех конгруэнций на полукольце $CP(X)$.

Задача 2. Любое ли T_1-пространство X определяется решеткой всех подалгебр с единицей полукольца $CP(X)$?

Список литературы

1. **Вечтомов Е. М.** Решетка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства // *Математические заметки. 1997. Т. 62. №5. С. 687–693.*

2. **Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н.** О полукольцах частичных функций // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2014. Вып. 19. С. 3–11.*

3. **Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Сидоров В. В., Чупраков Д. В.** Элементы функциональной алгебры : монография : в 2 т. / под ред. Е. М. Вечтомова. Киров: ООО «Издательство „Радуга-ПРЕСС“», 2016. Т. 1. 384 с.

4. **Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Сидоров В. В., Чупраков Д. В.** Элементы функциональной алгебры : монография : в 2 т. / под ред. Е. М. Вечтомова. Киров: ООО «Издательство „Радуга-ПРЕСС“», 2016. Т. 2. 316 с.

5. **Гретцер Г.** Теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.

6. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.

7. **Gillman L., Jerison M.** Rings of continuous functions. N. Y.: Springer-Verlang, 1976. 300 p.

ВятГУ
Поступила 12.03.2017

Summary

Vechtomov E. M., Lubyagina E. N. Definability of T_1-spaces by the lattice of subalgebras of semirings of continuous partial real-valued functions on them

The article refers to the general theory of semirings of continuous functions. We consider subalgebras of semirings $CP(X)$ of continuous partial functions on topological spaces X with values in the topological field $\mathbf{R}$ of real numbers. We study the minimal and maximal subalgebras of the $\mathbf{R}$-algebra $CP(X)$. We prove a definability theorem of an arbitrary T_1-space X by the lattice $A(X)$ of all subalgebras of the semiring $CP(X)$.
Keywords: semiring, field of real numbers, partial real-valued function, subalgebra.

References

1. **Vechtomov E. M.** Lattice of subalgebras of the ring of continuous functions and Hewitt spaces, *Mat. Zametki*, vol. 62, issue. 5, 1997, pp. 687–693.

2. **Vechtomov E. M., Lubyagina E. N.** On semirings of partial functions, *Vestnik of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Computer science*, 2014, issue. 19, pp. 3–11.

3. **Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Sidorov V. V., Chuprakov D. V.** *Elements of functional algebra*: a monograph: in 2 volumes, vol. 1 / ed. E. M. Vechtomov, Kirov: Publishing House «Raduga-Press», 2016, 384 p.

4. **Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Sidorov V. V., Chuprakov D. V.** *Elements of functional algebra*: a monograph: in 2 vol, vol. 2 / ed. E. M. Vechtomov, Kirov: Publishing House «Raduga-Press», 2016, 316 p.

5. **Grettser G.** *The theory of lattices*, Moscow: Mir, 1982, 456 p.

6. **Engelking R.** *General topology*, Moscow: Mir, 1986, 752 p.

7. **Gillman L., Jerison M.** *Rings of continuous functions*, N. Y.: Springer-Verlang, 1976, 300 p.

Для цитирования: Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н. Определяемость T_1-пространств решеткой подалгебр полуколец непрерывных частичных действительнозначных функций на них // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 1 (22). С. 21–28.*

For citation: Vechtomov E. M., Lubyagina E. N. Defiinability of T_1-spaces by the lattice of subalgebras of semirings of continuous partial real-valued functions on them, *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics,* 2017, №1 (22), pp. 21–28.