МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 1 (21). 2016

УДК 537.622

ФОРМУЛА СМИТА – БЕЛЬЕРСА

В. А. Устюгов

В статье дан краткий исторический обзор исследований ферромагнитного резонанса и приведен вывод формулы Смита – Бельерса для расчета положения и ширины резонансной линии. Приведен пример расчета резонансной частоты однодоменной частицы эллипсоидальной формы.

Ключевые слова: ферромагнетизм, резонансная частота.

Методы радиоспектроскопии, в том числе метод ферромагнитного резонанса (ФМР) позволяют выяснить тонкие детали внутренних свойств атомных образований, взаимодействий, происходящих в кристаллических структурах магнетиков [5]. Начало этой области физики положило открытие П. Зееманом в 1896 году эффекта расщепления внешним однородным полем H_0 энергетических уровней изолированного атома. В эксперименте это наблюдается в виде расщепления спектральных линий, возникающего при оптических квантовых переходах между различными зеемановскими мультиплетами. Объяснение явления в рамках классической физики дал Х. Лоренц и в 1902 году разделил с Зееманом Нобелевскую премию.

1. Общая формула для резонансной частоты

Как известно, поведение намагниченности в ферромагнетике обусловлено конкуренцией внутренних и внешних полей. Однако внутренние взаимодействия (среди которых поля обмена, кристаллической анизотропии, анизотропии формы, т.е. различной природы и действия) можно учесть феноменологически, полагая, что вектор намагниченности прецессирует не в композиции внутренних и внешнем поле $\mathbf{H}_0$, а в некотором эффективном внутреннем поле $\mathbf{H}_{\text{эфф}}$. Уравнение движения в этом случае принимает вид

$$\dot{\mathbf{M}} = -\gamma[\mathbf{M}, \mathbf{H}_{\text{эфф}}]. \tag{1}$$

Отличие эффективного поля от внешнего постоянного обусловливает отличие резонансной частоты вектора намагниченности от частоты ларморовской прецессии ω_0. Смит [4] и Сул [3] в 1954-1955 годах независимо предложили удобный метод вычисления резонансной частоты.

Перейдем к сферической системе координат, в которой ориентация вектора $\mathbf{M}$ определяется полярным и азимутальным углами ϑ и φ. Переход от декартовых координат (x_1, x_2, x_3) осуществляется следующим образом:

$$M_{x_1} = M \sin\vartheta \cos\varphi; \quad M_{x_2} = M \sin\vartheta \sin\varphi; \quad M_{x_3} = M \cos\vartheta. \tag{2}$$

Распишем покомпонентно систему уравнений (1):

$$\dot{\mathbf{M}} = -\gamma[\mathbf{M}, \mathbf{H}_{\text{эфф}}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{x_1} & \mathbf{e}_{x_1} & \mathbf{e}_{x_3} \\ M_{x_1} & M_{x_2} & M_{x_3} \\ H_{x_1} & H_{x_2} & H_{x_3} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \dot{M}_{x_1} =& -\gamma(M_{x_2}H_{x_3} - M_{x_3}H_{x_2}) = \\ & -\gamma(M\sin\vartheta\sin\varphi H_{x_3} - M\cos\vartheta H_{x_2}), \\ \dot{M}_{x_2} =& -\gamma(M_{x_3}H_{x_1} - M_{x_1}H_{x_3}) = \\ & -\gamma(M\cos\vartheta H_{x_1} - M\sin\vartheta\cos\varphi H_{x_3}), \\ \dot{M}_{x_3} =& -\gamma(M_{x_1}H_{x_2} - M_{x_2}H_{x_1}) = \\ & -\gamma(M\sin\vartheta\cos\varphi H_{x_2} - M\sin\vartheta\sin\varphi H_{x_1}). \end{aligned} \tag{4}$$

При переходе к сферическим координатам радиальная H_M, полярная H_ϑ и азимутальная H_φ — составляющие эффективного поля, выражаются через декартовы компоненты следующим образом:

$$\begin{aligned} H_M &= H_{x_1}\sin\vartheta\cos\varphi + H_{x_2}\sin\vartheta\sin\varphi + H_{x_3}\cos\vartheta, \\ H_\vartheta &= H_{x_1}\cos\vartheta\cos\varphi + H_{x_2}\cos\vartheta\sin\varphi - H_{x_3}\sin\vartheta, \\ H_\varphi &= -H_{x_1}\sin\varphi + H_{x_2}\cos\varphi. \end{aligned} \tag{5}$$

Учитывая это, преобразуем систему уравнений (1). Найдем производную компоненты M_{x_3}:

$$(M_{x_3})' = (M\cos\vartheta)' = -M\sin\vartheta \cdot \dot{\vartheta}. \tag{6}$$

Принимая во внимание, что $M = const$, получим закон изменения полярного угла:

$$\begin{aligned} -\sin\vartheta \cdot \dot{\vartheta} &= -\gamma(\sin\vartheta\cos\varphi H_{x_2} - \sin\vartheta\sin\varphi H_{x_1}), \\ \dot{\vartheta} &= \gamma(\cos\varphi H_{x_2} - \sin\varphi H_{x_1}) = \gamma H_\varphi. \end{aligned} \tag{7}$$

В состоянии термодинамического равновесия направление вектора намагниченности $\mathbf{M}$ совпадает с направлением внутреннего эффективного поля $\mathbf{H}_M$, величина которого может быть определена через плотность свободной энергии w:

$$H_M = -\frac{\partial w}{\partial M}. \tag{8}$$

В этом случае составляющие эффективного поля H_ϑ и H_φ отсутствуют. Углы ϑ_0 и φ_0 равновесной ориентации вектора намагниченности могут быть найдены из уравнений

$$w_\vartheta \equiv \frac{\partial w}{\partial \vartheta} = 0; \quad w_\varphi \equiv \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0. \tag{9}$$

Поскольку задача нахождения равновесной ориентации ветора намагниченности приводит к существенным математическим затруднениям, на практике применяют методы численного (в том числе компьютерного) моделирования либо проводят аналитический расчет резонансной частоты только в некоторых предельных случаях.

В случае малого отклонения намагниченности от равновесия условия (9) не выполняются и ориентация вектора $\mathbf{M}$ будет изменяться под действием отличных от нуля компонент поля:

$$H_\vartheta = -\frac{w_\vartheta}{M}; \quad H_\varphi = -\frac{w_\varphi}{M\sin\vartheta}. \tag{10}$$

Если отклонения угла вектора намагниченности от положения равновесия малы, т.е.

$$\delta\vartheta(t) = \vartheta(t) - \vartheta_0; \quad \delta\varphi(t) = \varphi(t) - \varphi_0, \tag{11}$$

то, вычисляя производные свободной энергии, можно ограничиться линейными членами:

$$w_\vartheta = w_{\vartheta\vartheta}\delta\vartheta + w_{\vartheta\varphi}\delta\varphi; \quad w_\varphi = w_{\varphi\vartheta}\delta\vartheta + w_{\varphi\varphi}\delta\varphi, \tag{12}$$

где вторые производные вычисляются для положения равновесия.

Учитывая (10) и (12), получаем систему линейных уравнений, описывающих малые колебания вектора намагниченности около положения равновесия:

$$\begin{aligned} -\gamma^{-1}M\sin\vartheta_0 \cdot \delta\dot{\vartheta} &= w_{\varphi\vartheta}\delta\vartheta + w_{\varphi\varphi}\delta\varphi; \\ \gamma^{-1}M\sin\vartheta_0 \cdot \delta\dot{\varphi} &= w_{\vartheta\vartheta}\delta\vartheta + w_{\vartheta\varphi}\delta\varphi. \end{aligned} \tag{13}$$

Система однородных уравнений (13) имеет периодические решения $\delta\vartheta, \varphi \sim \exp(i\omega t)$, если определитель характеристической системы уравнений равен нулю:

$$w_{\vartheta\varphi}^2 - w_{\vartheta\vartheta} w_{\varphi\vartheta} + \omega^2 \gamma^{-1} M^2 \sin^2 \vartheta_0 = 0. \tag{14}$$

Отсюда найдем выражение для резонансной частоты колебаний:

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{\gamma}{M \sin \vartheta_0} \left(w_{\vartheta\vartheta} w_{\varphi\vartheta} - w_{\vartheta\varphi}^2 \right)^{1/2}. \tag{15}$$

Выражение (15) известно, так же как формула Смита – Бельерса.

2. Расчет резонансных частот частицы эллипсоидальной формы

В качестве примера использования методики Смита – Бельерса рассмотрим задачу нахождения резонансных частот однодоменной частицы эллипсоидальной формы. Выберем систему координат так, чтобы равные полуоси эллипса лежали в плоскости $x - y$, как показано на рис. 1. Пусть подмагничивающее поле направлено вдоль оси z.

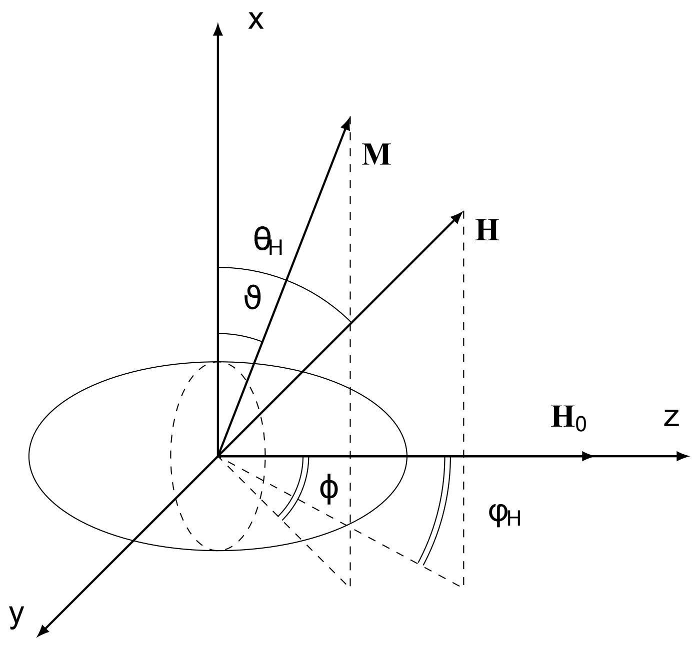

Рис. 1. Геометрия задачи

Плотность магнитной свободной энергии частицы в этом случае можно представить в виде суммы энергии анизотропии формы (энергии размагничивающего поля) и энергии взаимодействия со статическим внешним полем [1]:

$$w(\mathbf{m}) = -\mathbf{MH} + 2\pi\mathbf{M}\hat{\mathbf{N}}\mathbf{M}, \tag{16}$$

где $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M$ — вектор направляющих косинусов намагниченности, $\hat{\mathbf{N}} = diag\,(N_x, N_y, N_z)$ — тензор размагничивающих факторов.

Для удобства дальнейших расчётов перейдём к сферическим координатам [6]. Полярные углы будем отсчитывать от оси x, азимутальные — от оси y. Тогда свободная энергия частицы в общем виде запишется следующим образом:

$$\begin{gathered} w(\vartheta,\varphi) = -M_s H_0\left(\sin\vartheta\sin\theta_H\cos(\phi_H-\varphi) + \cos\vartheta\cos\theta_H\right) + \\ +\frac{1}{2}M_s^2\left(N_y\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + N_z\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + N_x\cos^2\vartheta\right), \end{gathered} \tag{17}$$

где углы (ϑ, φ) определяют ориентацию вектора $\mathbf{M}$, углы (θ_H, ϕ_H) — ориентацию вектора $\mathbf{H}$.

Обозначим оси рассматриваемого эллипсоида следующим образом:

$$l_x = l_y = l_\perp, \qquad l_z = l_\parallel.$$

В этом случае

$$N_x = N_y = N_\perp, \qquad N_z = N_\parallel.$$

Обозначим также разность продольного и поперечного размагничивающих факторов (фактор анизотропии формы) как $\Delta N = N_\parallel - N_\perp$, а отношение полуосей эллипса как $n = \dfrac{l_\parallel}{l_\perp}$.

Аналитические выражения для размагничивающих факторов могут быть получены по формулам Осборна [2]. Для вытянутого вдоль оси z эллипсоида вращения (овоида) $n > 1$, $\Delta N < 0$ и

$$N_\parallel = \frac{n}{2\left(n^2-1\right)}\left(n - \frac{1}{2\sqrt{n^2-1}} \times \ln\left(\frac{n+\sqrt{n^2-1}}{n-\sqrt{n^2-1}}\right)\right), \tag{18}$$

$$N_\perp = \frac{1}{n^2-1}\left(\frac{n}{2\sqrt{n^2-1}} \times \ln\left(\frac{n+\sqrt{n^2-1}}{n-\sqrt{n^2-1}}\right) - 1\right), \tag{19}$$

где $n = \dfrac{l_\perp}{l_\parallel}$ — отношение полуосей эллипса.

Для сплюснутого эллипсоида $n < 1$, $\Delta N > 0$ и справедливы формулы:

$$N_{\parallel} = \frac{1}{2\left(1-n^2\right)}\left(\frac{n^2}{\sqrt{1-n^2}} \times \arcsin\left(\frac{\sqrt{1-n^2}}{n}\right) - 1\right), \qquad (20)$$

$$N_{\perp} = \frac{n^2}{1-n^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-n^2}} \times \arcsin\left(\frac{\sqrt{1-n^2}}{n}\right)\right). \qquad (21)$$

Зависимость фактора формы от соотношения осей эллипсоида приведена на рис. 2.

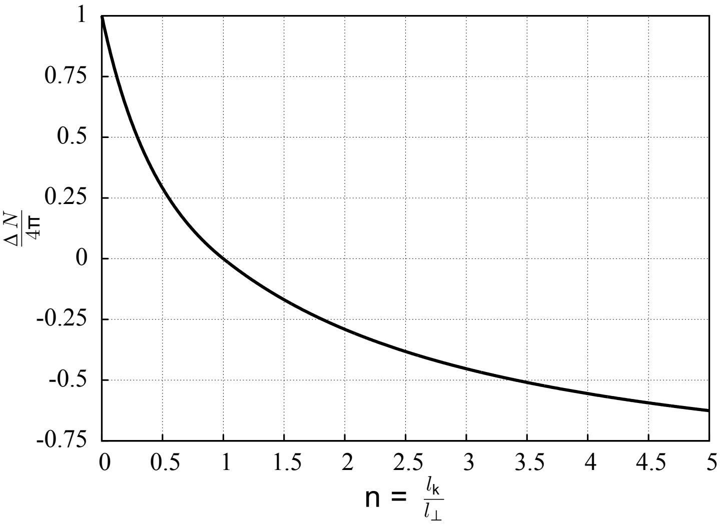

Рис. 2. Зависимость разности продольного и поперечного размагничивающих факторов эллипсоида вращения от отношения его полуосей

Определим положение равновесия вектора намагниченности для эллипсоида. Согласно поставленной задаче, углы, определяющие направление вектора $\mathbf{H}_0$, равны $\theta_H = \dfrac{\pi}{2}$, $\quad \phi_H = \dfrac{\pi}{2}$. В этом случае свободная энергия запишется в виде:

$$\begin{aligned} w(\vartheta, \varphi) = &- M_s H_0 \sin\vartheta \sin\varphi + \\ &+ \frac{1}{2} M_s^2 \left(N_y \sin^2\vartheta \cos^2\varphi + N_z \sin^2\vartheta \sin^2\varphi + N_x \cos^2\vartheta\right). \end{aligned} \qquad (22)$$

Положение равновесия соответствует минимуму свободной энергии, т. е. может быть найдено из условия [5]:

$$w_\varphi \equiv \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0, \tag{23}$$

$$w_\vartheta \equiv \frac{\partial w}{\partial \vartheta} = 0. \tag{24}$$

Полагая для простоты, что вектор $\mathbf{M}$ лежит в плоскости $x - z$, получим следующие выражения для частных производных:

$$w_\varphi = 0, \tag{25}$$

$$w_\vartheta = -H_0 M_s \cos\vartheta + M_s \sin\vartheta \cos\vartheta (N_\parallel - N_\perp). \tag{26}$$

Таким образом, получаем следующие условия равновесия:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \sin\vartheta_0 = \frac{H_0}{M_s(N_\parallel - N_\perp)} \tag{27}$$

для

$$H_0 < M_s(N_\perp - N_\parallel)$$

и

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{для} \quad H_0 > M_s(N_\parallel - N_\perp). \tag{28}$$

Находя вторые производные в положениях равновесия, для случая (28) можно получить уравнение, связывающее резонансную частоту и подмагничивающее поле (формула Киттеля):

$$\omega_{res} = \gamma(H_0 - M_s \Delta N). \tag{29}$$

Рассмотрим в качестве предельных случаев эллипсоида бесконечно тонкий диск ($n = \infty$, $\Delta N = 4\pi$) и бесконечно длинный цилиндр ($n = 0$, $\Delta N = -2\pi$). Графики зависимости резонансных частот от $\omega_0 = \gamma H_0$ (рис. 3) иллюстрируют влияние формы на резонансные свойства частиц.

3. Заключение

Рассмотренная методика позволяет рассчитывать резонансные частоты ферромагнитных частиц, однако обладает рядом ограничений, связанных с трудностью вычисления равновесных углов, записью выражений для составляющих внутренних полей в сферических координатах. Также в оригинальном варианте не учитываются процессы затухания. Для проведения точных расчетов резонансных частот частиц сложной формы требуются расширенные версии методики, рассмотрение которых выходит за рамки настоящей статьи.

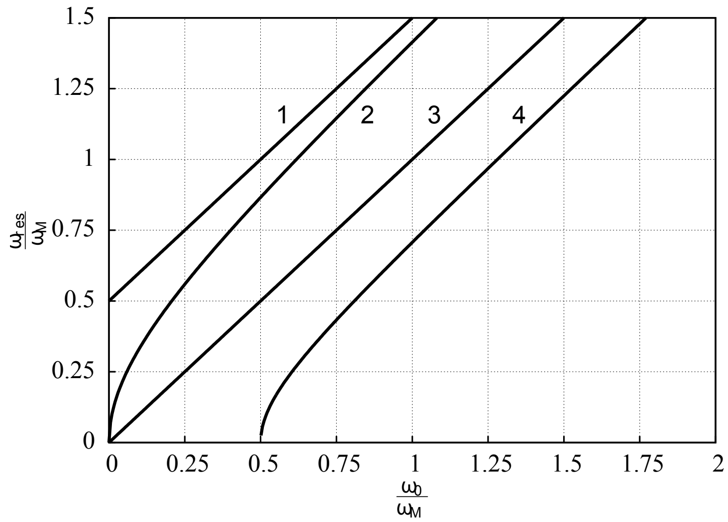

Рис. 3. Зависимость резонансной частоты ω_{res} от ω_0 (в единицах $\omega_M = 4\pi\gamma M_s$) для образцов различной формы: (1) — продольно намагниченный цилиндр, (2) — параллельно намагниченный диск, (3) — сфера, (4) — поперечно намагниченный цилиндр

Список литературы

1. **Coey, J.** Magnetism and Magnetic Materials / J. Coey. *Cambridge University Press, 2010. 633 p.*

2. **Osborn, J. A.** Demagnetizing factors of the general ellipsoid / J. A. Osborn // *Phys. Rev. B. 1945. vol. 67. Pp. 352–357.*

3. **Suhl, H.** Ferromagnetic resonance in nickel ferrite / H. Suhl // *Phys. Rev. 1954. Vol. 97. Pp. 555–557.*

4. **Smith J., Beljers H. J.** Ferromagnetic resonance absorbtion in $BaFe_{12}O_{19}$, a highly anisotropic crystall // *Philips Res. Rep. 1955. Vol. 10. Pp. 113-130.*

5. Ферромагнитный резонанс / под ред. С. В. Вонсовского. *М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 344 с.*

6. **Гуревич А. Г., Мелков Г. А.** Магнитные колебания и волны. *М.: Физматлит, 1994. 464 с.*

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 01.10.2016*

Summary

Ustyugov V. A. Smith – Beljers formula

The article gives a brief historical overview of ferromagnetic resonance studies and describes a derivation of the Smith – Beljers formula. An example of the calculation of the resonance frequency of single-domain ellipsoidal particles is given.

Keywords: ferromagnetism, resonance frequency.

References

1. **Coey, J.** Magnetism and Magnetic Materials / J. Coey. *Cambridge University Press, 2010. 633 p.*

2. **Osborn, J. A.** Demagnetizing factors of the general ellipsoid / J. A. Osborn // *Phys. Rev. B. 1945. vol. 67. Pp. 352–357.*

3. **Suhl H.** Werromagnetic resonance in nickel ferrite / H. Suhl // *Phys. Rev. 1954. Vol. 97. Pp. 555–557.*

4. **Smith J., Beljers H. J.** Ferromagnetic resonance absorbtion in $BaFe_{12}O_{19}$, a highly anisotropic crystall // *Philips Res. Rep. 1955. Vol 10. Pp. 113-130.*

5. Ferromagnetic resonance / Ed. by S. V. Vonsovsky. *Moscow: Gosudarstvennoe izdatelstvo fiziko-tekhnichskoi literatury, 1961. 344 p.*

6. **Gurevich A. G.** Magnetic oscillations and waves / A.G. Gurevich, G.A. Melkov. *Moscow: Fizmatlit, 1994. 464 p.*

Для цитирования: Устюгов В. А. Формула Смита – Бельерса // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2016. Вып. 1 (21). С. 77–85.

For citation: Ustyugov V. A. Smith-Beljers formula // Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2016. №1 (21). Pp. 77–85.